и оператор

$$\Delta \equiv 4\left[\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_1}\partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial\overline{z_2}\partial z_2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial\overline{z_n}\partial z_n}\right] \tag{2.2}$$

— классический оператор Лапласа (лапласиан) [4, с. 17] в пространстве $\mathbb{C}^n$ (или в $2n$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{1}{|z-\zeta|^m}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left[\sum_{j=1}^{n}(z_j-\zeta_j)\overline{(z_j-\zeta_j)}\right]^{-\frac{m}{2}} = -\frac{m}{2}\frac{1}{R^{m+2}}\overline{(z_j-\zeta_j)}. \tag{2.3}$$

В силу (2.3) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_j}\partial z_j}\left(\frac{1}{|z-\zeta|^m}\right) = \frac{m(m+2)}{4}\frac{|z_j-\zeta_j|^2}{R^{m+4}} - \frac{m}{2}\frac{1}{R^{m+2}}.$$

Отсюда и из (2.2)

$$\Delta\left(\frac{1}{R^m}\right) = 4\left[\frac{m(m+2)}{4}\frac{1}{R^{m+4}}\sum_{j=1}^{n}|z_j-\zeta_j|^2 - \frac{nm}{2}\frac{1}{R^{m+2}}\right] =$$
$$= \frac{m}{R^{m+2}}\big[(m+2)-2n\big],$$

откуда сразу следует, что при $m = 2n-2$, $z \neq \zeta$, функция (2.1) является гармонической в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Библиографический список

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
2. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
3. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
4. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 456 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. 7-е изд. М.: Наука, 1969. 800 с.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть 2. Функции нескольких переменных. 2-е изд., перераб. и допол. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1984. 208 с.

УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ И ЦЕНТРЕ *HNN*-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Получены условия отсутствия нециклических свободных подгрупп в HNN-расширениях групп и нетривиальности центра HNN-расширений.

Ключевые слова: HNN-расширения групп, свободная группа, центр группы.

© Логинова Е. Д., Молдаванский Д. И., 2021

E. D. Loginova, D. I. Moldavanskii

ON FREE SUBGROUPS AND ON THE CENTER OF AN *HNN*-EXTENSION OF GROUPS

Conditions for the absence of noncyclic free subgroups in *HNN*-extensions of groups and for non-triviality of center of *HNN*-extensions are obtained.

Key words: *HNN*-extensions of groups, free group, center of group.

1. Формулировка результатов и предварительные замечания

Одним из заметных направлений исследований в современной комбинаторной теории групп является изучение свойств групп, построенных с помощью теоретико-групповых конструкций свободного произведения с объединенными подгруппами и HNN-расширения. В этой статье применительно к ним рассматриваются свойство отсутствия нециклических свободных подгрупп и описание строения центра.

Хорошо известно (и нетрудно показать), что свободное произведение $G = \big(A * B;\ U\big)$ групп A и B с объединенной подгруппой U, где $U \neq A$ и $U \neq B$, не содержит нециклических свободных подгрупп тогда и только тогда, когда нециклических свободных подгрупп нет в объединяемой подгруппе U и индекс этой подгруппы в каждом из свободных сомножителей A и B равен числу 2. При тех же предположениях центр $Z(G)$ группы G совпадает с пересечением (лежащим в U) $Z(A) \cap Z(B)$ центров подгрупп A и B (см. [2, следствие 4.5]).

Здесь будут доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}At = B, \varphi\big)$ группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon A \to B$ подгруппами A и B не имеет нециклических свободных подгрупп тогда и только тогда, когда хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с базовой группой G и в группе G нет нециклических свободных подгрупп.*

Теорема 2. *Пусть группа $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}At = B, \varphi\big)$ та же, что в формулировке теоремы 1, и пусть $St(\varphi) = \big\{a \in A \bigm| a\varphi = a\big\}$ — множество всех элементов группы A, неподвижных относительно действия отображения φ. Справедливы следующие утверждения о строении центра $Z(G^*)$ группы G^*.*

1. *Если либо*

   (1.1) *хотя бы одна из связанных подгрупп A или B отлична от группы G, либо*

   (1.2) *$A = B = G$ и порядок автоморфизма φ группы G по модулю группы $\operatorname{Inn} G$ ее внутренних автоморфизмов бесконечен,*

то $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$.

2. *Если $A = B = G$, порядок автоморфизма φ группы G по модулю $\operatorname{Inn} G$ конечен и равен числу m и внутренний автоморфизм φ^m производится элементом $c \in G$ (т. е. $x\varphi^m = c^{-1}xc$ для произвольного $x \in G$), причем $c \in St(\varphi)$, то $Z(G^*)$ порождается подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$ и элементом $t^m c^{-1}$.*

Для большей замкнутости изложения приведем необходимые нам для доказательств известные свойства конструкции HNN-расширения.

Пусть G — некоторая группа с изоморфными подгруппами A и B и $\varphi\colon A \to B$ — фиксированный изоморфизм группы A на группу B. HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}At = B, \varphi\big)$ группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами A и B можно определить как фактор-группу (обычного) свободного произведения $F = G * \langle t\rangle$ группы G и бесконечной циклической группы с порождающим t по нормальному замыканию N в группе F множества элементов $\big\{t^{-1}at(a\varphi)^{-1} \bigm| a \in A\big\}$. Практически все результаты о строении групп, являющихся HNN-расширениями, получены с использованием двух основных свойств этой конструкции (см., например, [1, теорема IV.2.1]).

Первое из них состоит в том, что $G \cap N = 1$, так что группа G естественным образом вложима в группу G^*, и потому можно считать ее подгруппой группы G^*.

Так как группа G^* порождается подгруппой G и элементом t, то произвольный элемент f этой группы определяется произведением вида

$$f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{n-1} t^{\varepsilon_n} f_n, \tag{$*$}$$

где $n \geqslant 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f_0, f_1, \ldots, f_n$ — элементы группы G. Если для некоторого номера i, $1 \leqslant i < n$, выполнены условия $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$ и элемент f_i принадлежит подгруппе A, то, поскольку при $f_i' = f_i\varphi$ выполнено включение $t^{-1}g_i t(g_i')^{-1} \in N$, элемент f определяется и произведением

$$f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 \cdots t^{\varepsilon_{i-1}} (f_{i-1} f_i' f_{i+1}) t^{\varepsilon_{i+2}} f_{i+2} \cdots f_{n-1} t^{\varepsilon_n} f_n,$$

число вхождений буквы t в котором на 2 меньше, чем в $(*)$. Аналогичное преобразование записи $(*)$ выполнимо и в случае, когда при $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$ слово f_i определяет элемент из подгруппы B.

Очевидно, что с помощью указанных преобразований (называемых *t-редукциями*) можно для любого элемента $f \in G^*$ получить запись вида $(*)$, к которой t-редукции не применимы. Такая запись элементов группы G^* называется *приведенной*, и второе основное свойство группы G^*, называемое леммой Бриттона, состоит в том, что приведенная запись единичного элемента не содержит вхождений проходной буквы t. Это, говоря подробнее, означает, что если выражение вида $(*)$ при $n > 0$ определяет единицу группы G^*, то к нему должна быть применима хотя бы одна t-редукция.

Вообще говоря, элемент группы G^* может обладать разными приведенными записями. Тем не менее, из того, что

$$f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m \quad \text{и} \quad g_0 t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\delta_n} g_n$$

— приведенные записи некоторого элемента группы G^*, следует (см. [1, лемма IV.2.3]), что $m = n$ и (при $n \geqslant 1$) для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство $\varepsilon_i = \delta_i$. Число вхождений буквы t в (любой) приведенной записи данного элемента $f \in G^*$ называется *длиной* этого элемента и обозначается через $l(f)$.

HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}At = B, \varphi\big)$ называется *нисходящим*, если хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с группой G. Если считать (как легко видеть, без потери общности), что $A = G$, то отображение φ оказывается инъективным эндоморфизмом группы G таким, что $G\varphi = B$. В этом случае каждый элемент f группы G^* однозначно представим в виде $f = t^m g t^{-n}$ для некоторого элемента $g \in G$ и некоторых неотрицательных целых m и n, причем при $m > 0$ и $n > 0$ элемент g не входит в подгруппу B.

Если $A = G$ и $B = G$ (и потому φ — автоморфизм группы G), группа G^* является расщепляемым расширением группы G при помощи бесконечной циклической группы $\langle t \rangle$, т. е. $G \trianglelefteq G^*$, $G^* = \langle t \rangle G$ и $\langle t \rangle \cap G = 1$. В этом случае произвольный элемент $f \in G^*$ однозначно представим в виде $t^n g$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$ и $g \in G$.

2. Доказательства теорем

Предполагая, что каждая из подгрупп A и B не совпадает с базовой группой G, выберем в этой группе элементы f и g, не принадлежащие соответственно подгруппам A и B. Тогда элементы $u = t^{-1} f t^2$ и $v = t^2 g t^{-1}$ являются свободными порождающими порожденной ими подгруппы в группе G^*.

В самом деле, непосредственно проверяется, что записи каждого из элементов u^2, v^2, uv, vu, uv^{-1}, $u^{-1}v$ не допускают t-редукций. Отсюда следует, очевидно, что любое непустое и несократимое слово от элементов u и v обладает приведенной записью положительной длины и потому отлично от единицы группы G^*.

Необходимость сформулированных в теореме 1 условий отсутствия в группе G^* нециклических свободных подгрупп теперь очевидна.

Обратно, предположим, что подгруппа A совпадает с группой G (т. е. группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1} g t = g\varphi\ (g \in G)\big)$ является нисходящим HNN-расширением группы G) и что группа G не имеет нециклических свободных подгрупп.

Очевидно, что фактор-группа G^*/N группы G^* по нормальному замыканию N в группе G^* подгруппы G является бесконечной циклической группой. Строение подгруппы N имеет следующее простое описание.

Для произвольного целого числа $k \geqslant 0$ полагаем $G_k = t^k G t^{-k}$. Тогда для любого k подгруппа G_k группы G^* изоморфна группе G и содержится в подгруппе G_{k+1}, а подгруппа N совпадает с объединением $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ подгрупп G_k.

В самом деле, включение $G_k \subseteq G_{k+1}$ практически очевидно, поскольку для любого элемента $u \in G_k$ имеем $u = t^k g t^{-k}$ для некоторого $g \in G$, откуда

$$u = t^k g t^{-k} = t^k (t (g\varphi) t^{-1}) t^{-k} = t^{k+1} (g\varphi) t^{-(k+1)},$$

так что $u \in G_{k+1}$.

Включение $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k \subseteq N$ является очевидным следствием определения подгруппы N как наименьшей из нормальных подгрупп группы G^*, содержащих подгруппу G, а для доказательства противоположного включения достаточно, в силу того же определения, показать, что подгруппа $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ нормальна в G^*.

Произвольный элемент u этой подгруппы имеет вид $u = t^k g t^{-k}$, где $k \geqslant 0$ и $g \in G$. Как отмечено выше, произвольный элемент v группы G^*

имеет запись вида $v = t^m f t^{-n}$, где $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ и $f \in G$. Поскольку тогда

$$\begin{aligned} v^{-1}uv &= (t^n f^{-1} t^{-m})(t^k g t^{-k})(t^m f t^{-n}) \\ &= (t^n f^{-1})\big(t^k (g\varphi^m) t^{-k}\big)(f t^{-n}) \\ &= t^{n+k}\big((f\varphi^k)^{-1}(g\varphi^m)(f\varphi^k)\big)t^{-(n+k)}, \end{aligned}$$

имеем $v^{-1}uv \in H$, и нормальность подгруппы $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ доказана.

Предположим теперь, рассуждая от противного, что некоторая подгруппа F группы G^* является свободной группой ранга 2. Включение $F \subseteq N$ невозможно, поскольку в силу конечной порожденности подгруппы F оно означало бы включение $F \subseteq G_k$ для некоторого $k \geqslant 0$. Следовательно, подгруппа FN/N бесконечной циклической группы G^*/N является бесконечной циклической, пересечение $H = F \cap N$ является неединичной свободной и потому циклической подгруппой группы N, и группа F оказывается расширением бесконечной циклической группы при помощи бесконечной циклической. Так как для свободных групп это невозможно, доказательство теоремы 1 закончено.

Переходя к доказательству теоремы 2, заметим прежде всего, что если группа G содержит элемент g, не принадлежащий, скажем, подгруппе A, то все центральные элементы группы G^* лежат в подгруппе G.

В самом деле, если, напротив,

$$f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m$$

— приведенная запись центрального элемента f, где $m > 0$, то можно считать, во-первых (заменив, если нужно, элемент f на f^{-1}), что для некоторого номера i показатель ε_i равен 1, и, во-вторых (поскольку f совпадает с любым элементом, сопряженным с ним), что $\varepsilon_1 = 1$ и $f_0 = 1$. Но тогда запись

$$f_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} f_{m-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} f_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} g t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m$$

элемента $f^{-1}gf$ является приведенной и потому равенство $f^{-1}gf = g$ невозможно.

Таким образом, для любого центрального элемента $f \in G^*$ выполнено включение $f \in Z(G)$, а также, поскольку $t^{-1}ft = f$, и включение $g \in St(\varphi)$. Следовательно, $Z(G^*) \subseteq Z(G) \cap St(\varphi)$, и так как противоположное включение очевидно, справедливость равенства $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$ при условии (1.1) доказана.

Предположим теперь, что $A = G = B$. Тогда отображение φ является автоморфизмом группы G и, как отмечено выше, группа G^* является расщепляемым расширением группы G при помощи циклической группы, порождаемой элементом t. В частности, произвольный элемент $f \in G^*$ однозначно представим в виде $f = t^n g$ для некоторого целого n и некоторого $g \in G$.

Очевидно, что и в этом случае подгруппа $Z(G) \cap St(\varphi)$ содержится в центре группы G^* и потому совпадает с пересечением $G \cap Z(G^*)$. Утверждается, кроме того, что элемент $f = t^n g$ принадлежит центру группы G^* тогда и только тогда, когда $g \in St(\varphi)$ и φ^n является внутренним автоморфизмом, производимым элементом g^{-1}.

Действительно, непосредственно проверяется, что перестановочность элемента f с элементом t равносильна включению $g \in St(\varphi)$, а перестановочность f с элементом $x \in G$ равносильна равенству $x\varphi^n = gxg^{-1}$.

Следовательно, при условии (1.2) из того, что $f = t^n g \in Z(G^*)$, следует, что $n = 0$, и потому равенство $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$ выполнено и в этом случае.

Предположим теперь, что порядок автоморфизма φ по модулю подгруппы $\operatorname{Inn} G$ конечен и равен числу m, и пусть внутренний автоморфизм φ^m производится элементом $c \in St(\varphi)$. Тогда элемент $f = t^m c^{-1}$ является центральным, и нетрудно видеть, что центр группы G^* порождается элементом f и подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$.

Пусть, в самом деле, $g = t^n d$ (где $d \in G$) — произвольный центральный элемент группы G^*. Разделим n на m с остатком: $n = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$. С учетом перестановочности элемента t с элементами c и d имеем $gf^{-q} = t^r(dc^q)$. Так как элемент gf^{-1} является центральным, при $r > 0$ автоморфизм φ^r должен быть внутренним, что невозможно, так как $r < m$. Следовательно, $r = 0$ и потому элемент $gf^{-q} = dc^q$ входит в подгруппу $G \cap Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$. Таким образом, элемент $g = (dc^q)f^q$ принадлежит подгруппе, порожденной подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$ и элементом f, и теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 448 с.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.

УДК 510.5

Б. Я. Солон

m-СВОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматривается стандартное понятие m-сводимости множеств, примененное к арифметическим функциям. При этом возникает понятие m-сводимости функций, близкое к сводимости частично-рекурсивных функций, введенной А. Н. Дёгтевым в 1975 году.

Ключевые слова: m-сводимость, m-степень.

B. Ya. Solon

m-REDUCIBILITY OF PARTIAL FUNCTIONS

The article discusses the standard concept of m-reducibility of sets applied to arithmetic functions. This gives rise to a notion of m-reducibility of functions, which is close to the reducibility of partially recursive functions introduced by A. N. Dëgtev in 1975.

Key words: m-reducibility, m-degree.

© Солон Б. Я., 2021