Действительно, непосредственно проверяется, что перестановочность элемента f с элементом t равносильна включению $g \in St(\varphi)$, а перестановочность f с элементом $x \in G$ равносильна равенству $x\varphi^n = gxg^{-1}$.

Следовательно, при условии (1.2) из того, что $f = t^n g \in Z(G^*)$, следует, что $n = 0$, и потому равенство $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$ выполнено и в этом случае.

Предположим теперь, что порядок автоморфизма φ по модулю подгруппы $\operatorname{Inn} G$ конечен и равен числу m, и пусть внутренний автоморфизм φ^m производится элементом $c \in St(\varphi)$. Тогда элемент $f = t^m c^{-1}$ является центральным, и нетрудно видеть, что центр группы G^* порождается элементом f и подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$.

Пусть, в самом деле, $g = t^n d$ (где $d \in G$) — произвольный центральный элемент группы G^*. Разделим n на m с остатком: $n = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$. С учетом перестановочности элемента t с элементами c и d имеем $gf^{-q} = t^r(dc^q)$. Так как элемент gf^{-1} является центральным, при $r > 0$ автоморфизм φ^r должен быть внутренним, что невозможно, так как $r < m$. Следовательно, $r = 0$ и потому элемент $gf^{-q} = dc^q$ входит в подгруппу $G \cap Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$. Таким образом, элемент $g = (dc^q)f^q$ принадлежит подгруппе, порожденной подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$ и элементом f, и теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 448 с.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.

УДК 510.5

Б. Я. Солон

m-СВОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматривается стандартное понятие m-сводимости множеств, примененное к арифметическим функциям. При этом возникает понятие m-сводимости функций, близкое к сводимости частично-рекурсивных функций, введенной А. Н. Дёгтевым в 1975 году.

Ключевые слова: m-сводимость, m-степень.

B. Ya. Solon

m-REDUCIBILITY OF PARTIAL FUNCTIONS

The article discusses the standard concept of m-reducibility of sets applied to arithmetic functions. This gives rise to a notion of m-reducibility of functions, which is close to the reducibility of partially recursive functions introduced by A. N. Dëgtev in 1975.

Key words: m-reducibility, m-degree.

Будем называть *множествами* подмножества множества натуральных чисел $\omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ и *функциями* — одноместные функции, определенные на множестве ω (или на его подмножествах) со значениями во множестве ω. В статье вместо термина «*рекурсивная функция*» используется синоним «*вычислимая функция*», вместо «*рекурсивное множество*» — термин «*вычислимое множество*». Говорят, что множество A *m-сводится* к множеству B, если существует всюду определенная вычислимая функция f такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ для всех $x \in \omega$. В этом случае говорят, что множество A m-сводится к множеству B *посредством функции* $f(x)$. Будем говорить «вычислимая функция» в любом случае, и когда она всюду определенная (тотальная), и когда она частичная. В конкретных случаях будем добавлять при необходимости «всюду определенная» или «частичная».

Цель нашей работы — изучение алгоритмической сводимости на одноместных функциях, которая явным образом связана с m-сводимостью множеств. Ранее А. Н. Дёгтев [1] рассматривал подобную сводимость только на множестве частично вычислимых функций, в статье [2] она получила название «*F-сводимость частично вычислимых функций*».

Пусть PF — множество одноместных функций, для $\psi \in PF$ обозначим через $\delta\psi$ область определения, через $\rho\psi$ множество значений и через

$$\tau\psi = \big\{\langle x, y\rangle : x \in \delta\psi \wedge \psi(x) = y\big\}$$

график функции ψ. Тот факт, что $x \in \delta\psi$, т. е. значение $\psi(x)$ определено, будем обозначать через $\psi(x)\!\downarrow$, а $x \notin \delta\psi$ — через $\psi(x)\!\uparrow$. Далее α, β, ψ, $\eta \in PF$. Если $\delta\psi = \omega$, то функцию $\psi(x)$ будем называть *тотальной*.

Пусть A — фиксированное непустое множество, обозначим через PF_A множество функций с областью значений A. Перенесем определение А. Н. Дёгтева на все функции из PF.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ *F-сводится к функции* $\beta(x)$, если существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Обозначим факт F-сводимости α к β через $\alpha \leqslant_F \beta$.

В определении 1 равенство $\alpha(x) = \beta(f(x))$ мы понимаем в следующем толковании: если $\alpha(x)\!\downarrow$, то $f(x) \in \delta\beta$ и $\alpha(x) = \beta(f(x))$, а если $\alpha(x)\!\uparrow$, то $f(x) \notin \delta\beta$. В следующих леммах зафиксируем ряд простых свойств F-сводимости функций.

Лемма 1. $\alpha \leqslant_F \beta \Leftrightarrow$
$[\delta\alpha \leqslant_m \delta\beta$ *посредством вычислимой функции* $f(x)] \wedge \alpha(x) = \beta(f(x))$.

Доказательство. Пусть $\alpha \leqslant_F \beta$, тогда для некоторой вычислимой функции $f(x)$ выполнено $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\forall x[x \in \delta\alpha \Leftrightarrow f(x) \in \delta\beta]$. Последнее условие означает, что $\delta\alpha \leqslant_m \delta\beta$ посредством функции $f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\delta\alpha \neq \omega$ *и* $\delta\beta = \omega$, *то* $\alpha \nleqslant_F \beta$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \leqslant_F \beta$, тогда $\alpha(x) = \beta(f(x))$, откуда, в частности, следует, что $\omega \neq \delta\alpha = \delta(\beta f) = \omega$. Получили противоречие, следовательно, $\alpha \nleqslant_F \beta$.

Легко проверить, что бинарное отношение $\leqslant_F$ на множестве PF рефлексивно и транзитивно. Обычным образом определяется F-степень функции $\alpha(x)$:

$$d_F(\alpha) = \{\psi : \alpha \leqslant_F \psi \wedge \psi \leqslant_F \alpha\}.$$

Лемма 3. *Если $A = \rho\alpha$, то для любой функции $\psi \in d_F(\alpha)$ выполнено $A = \rho\psi$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in d_F(\alpha)$. Если $\alpha \leqslant_F \psi$ посредством некоторой вычислимой функции $f(x)$, т. е. $\alpha(x) = \psi(f(x))$, то $A = \rho\alpha \subseteq \rho\psi$. Если $\psi \leqslant_F \alpha$ посредством некоторой вычислимой функции $g(x)$, т. е. $\psi(x) = \alpha(g(x))$, то $\rho\psi \subseteq \rho\alpha = A$. Следовательно, $A = \rho\psi$, и лемма доказана.

Совокупность F-степеней функций, имеющих одну и ту же область значений A, с естественно определенным частичным порядком $\leqslant$ обозначим через $L_F(A)$. При этом, по определению, полагаем

$$d_F(\alpha) \leqslant d_F(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant_F \beta.$$

Лемма 4. *Для любой частично вычислимой функции $\varphi \in PF_A$ и любой $\psi \in PF_A$,*

(i) если $\psi \leqslant_F \varphi$, то ψ — вычислимая функция;

(ii) если $\delta\varphi \neq \omega$ — вычислимое множество, $|A| = 1$ и $\delta\psi \neq \omega$, то $\varphi \leqslant_F \psi$.

Доказательство. (i). Из определения 1 следует, что в этом случае $\psi(x) = \varphi(f(x))$ для некоторой вычислимой функции $f(x)$. Следовательно, $\psi(x)$ — вычислимая функция как суперпозиция двух вычислимых функций.

(ii). Пусть $\delta\varphi = B \neq \omega$ — вычислимое множество, $c \in \delta\psi$ и $d \notin \delta\psi$. Определим вычислимую функцию

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x \in B, \\ d, & \text{если } x \notin B. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, равенство $\varphi(x) = \psi f(x)$ выполнено для всех $x \in \omega$. Следовательно, $\varphi \leqslant_F \psi$.

Следствие 1. *Любая F-степень, содержащая вычислимую функцию, состоит из вычислимых функций.*

Обозначим через L_F^{pc} частично упорядоченное множество F-степеней, состоящих из частично вычислимых функций. Из следствия 1 вытекает, что для любого вычислимо перечислимого множества A частично упорядоченное множество $L_F^{pc}(A)$ образует начальный сегмент в $L_F(A)$. В статьях [1, 2] изучаются свойства $L_F^{pc}(A)$, в частности, доказано, что $L_F^{pc}(A)$ является верхней полурешеткой.

Теорема 1. *Любая F-степень $d_F(\alpha)$ состоит либо только из тотальных функций, либо только из частичных функций с m-эквивалентными областями определения (отличными от ω).*

Доказательство. Пусть $d_F(\psi)$ содержит тотальную функцию $h(x)$, тогда, в частности, $\psi \leqslant_F h$. Из леммы 2 следует, что функция ψ при этом не может быть частичной. Следовательно, $d_F(h)$ состоит только из тотальных функций. Теорема доказана.

Определение 2. F-степень $d_F(\alpha)$ называется *тотальной*, если она содержит хотя бы одну всюду определенную функцию.

Из теоремы 1 следует, что тотальные F-степени состоят только из тотальных функций.

Свойства $L_F(A)$ зависят от множества A. Например, если $|A| = 1$, допустим, $A = \{0\}$, то $L_F(\{0\})$ и L_m — частично упорядоченное множество m-степеней — изоморфны. В самом деле, установим отображение

$$\lambda\colon L_F(\{0\}) \to L_m, \quad \lambda(d_F(\alpha)) = d_m(\delta\alpha).$$

Ясно, что λ — биекция, и для любых функций $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$ имеем

$$d_F(\alpha) \leqslant d_F(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant_F \beta \Leftrightarrow \delta\alpha \leqslant_m \delta\beta \Leftrightarrow d_m(\delta\alpha) \leqslant d_m(\delta\beta).$$

В частности, существуют F-степени, состоящие из вычислимых функций, причем они образуют подполурешетку частично упорядоченного множества $L_F(\{0\})$. Из теоремы 1 следует, что тотальные F-степени, состоящие из вычислимых функций, образуют нижний сегмент этой подполурешетки.

Теорема 2. *Если A и B — два бесконечных вычислимо перечислимых множества, то $L_F(A)$ и $L_F(B)$ изоморфны.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $A = \omega$ и $B = \rho h$ для некоторой вычислимой $1{-}1$ функции h. Определим отображение $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$, полагая для любой F-степени $d_F(\alpha) \in L_F(A)$

$$\theta(d_F(\alpha)) = d_F(h\alpha).$$

Проверим, что $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$ — изоморфизм полурешеток.

Сначала проверим корректность определения, т. е. покажем, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in PF_A$

$$\alpha_1 \equiv_F \alpha_2 \to h\alpha_1 \equiv_F h\alpha_2.$$

Пусть $\alpha_1 \leqslant_F \alpha_2$, тогда $\alpha_1(x) = \alpha_2(f(x))$ для некоторой вычислимой функции f. Так как h является $1{-}1$ функцией, то $h\alpha_1(x) = h\alpha_2(f(x))$, откуда следует, что $h\alpha_1 \leqslant_F h\alpha_2$. Далее, так как по условию $\rho\alpha = A = \omega$, $\theta\alpha = h\alpha \in PF_B$, поэтому $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$ — корректно определенное отображение. Из выше доказанной корректности определения отображения θ следует, что θ монотонно относительной отношения $\leqslant$ на степенях из $L_F(B)$.

Осталось доказать инъективность отображения $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$. Для этого достаточно показать, что если $h\alpha_1 \leqslant_F h\alpha_2$, то $\alpha_1 \leqslant_F \alpha_2$. Пусть $h\alpha_1(x) = h\alpha_2(f(x))$ для некоторой вычислимой функции $f(x)$. По условию h является всюду определенной вычислимой $1{-}1$ функцией, поэтому функция $h^{-1}(x) = \mu y[h(y) = x]$ является (частичной) вычислимой функцией. При этом функция $h^{-1}(h(x)) = x$ определена для всех $x \in \omega$. Следовательно,

$$h\alpha_1(x) = h\alpha_2(f(x)) \Leftrightarrow h^{-1}h\alpha_1(x) = h^{-1}h\alpha_2(f(x)) \Leftrightarrow \alpha_1(x) = \alpha_2(f(x)),$$

т. е. $\alpha_1 \leqslant_F \alpha_2$. Теорема доказана.

Если множество A не является вычислимо перечислимым, то $L_F(A)$ не содержит ни одной F-степени, содержащей вычислимые функции. Это следует из того простого факта, что область значений любой вычислимой функции является вычислимо перечислимым множеством.

Докажем, что для всех $A \neq \varnothing$ частично упорядоченное множество $L_F(A)$ является верхней полурешеткой. Сначала дадим

Определение 3. Частично упорядоченное множество $(L; \leqslant)$ образует *верхнюю полурешетку*, если для любых $a, b \in L$ существует $c = \sup\{a, b\} \in L$. В этом случае элемент $c \in L$ называется *точной верхней границей* элементов $a, b \in L$.

Теорема 3. *Для любого множества $A \neq \varnothing$ частично упорядоченное множество $L_F(A)$ образует верхнюю полурешетку.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha)$ и $\boldsymbol{b} = d_F(\beta)$ — две произвольные F-степени из $L_F(A)$. Определим функцию $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x/2), & \text{если } x \text{ — четное и } \alpha(x/2)\downarrow, \\ \beta((x-1)/2), & \text{если } x \text{ — нечетное и } \beta((x-1)/2)\downarrow. \end{cases}$$

Докажем, что $\boldsymbol{c} = d_F(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Для этого поверим, что $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{c}$ и $\forall \boldsymbol{x}[\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{x}]$. Имеем очевидные равенства $\alpha(x) = \gamma(2x)$ и $\beta(x) = \gamma(2x+1)$ для всех $x \in \omega$. Поэтому $\alpha \leqslant_F \gamma$ посредством вычислимой функции $f(x) = 2x$ и $\beta \leqslant_F \gamma$ посредством вычислимой функции $g(x) = 2x + 1$. Пусть $\alpha \leqslant_F \sigma$ посредством вычислимой функции $h_1(x)$ и $\beta \leqslant_F \sigma$ посредством вычислимой функции $h_2(x)$, т. е. $\alpha(x) = \sigma(h_1(x))$ и $\beta(x) = \sigma(h_2(x))$. Докажем, что $\gamma \leqslant_F \sigma$. Определим функцию

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x/2), & \text{если } x \text{ — четное}, \\ h_2((x-1)/2), & \text{если } x \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Ясно, что $h(x)$ — вычислимая функция, легко проверяется, что $\gamma(x) = \sigma(h(x))$ для всех $x \in \omega$. Теорема доказана.

Определение 4. Пусть $(L; \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Элемент $o \in L$ называется *наименьшим элементом множества L*, если $\forall x[x \in L \to o \leqslant x]$.

Лемма 5. *Если F-степень $\boldsymbol{m} = d_F(\mu)$ является наименьшим элементом частично упорядоченного множества $L_F(A)$, то она является тотальной.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{m} = d_F(\mu) \leqslant d_F(\alpha)$ для любой функции $\alpha(x)$. В частности, $\alpha(x)$ может быть тотальной функцией. В этом случае функция $\mu(x)$ не может быть частичной в силу леммы 2, т. е. $\mu(x)$ является тотальной функцией. Следовательно, если F-степень $\boldsymbol{m} = d_F(\mu)$ является наименьшим элементом частично упорядоченного множества $L_F(A)$, то она является тотальной. Лемма доказана.

Теорема 4. *Для любого конечного множества $A \neq \varnothing$ частично упорядоченное множество $L_F(A)$ обладает наименьшим элементом.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ и $\alpha \in PF_A$ — произвольная функция. Сначала заметим, что если $L_F(A)$ обладает наименьшим элементом, то он — тотальная F-степень $\boldsymbol{m} = d_{wm}(\mu)$. Определим функцию $\mu(x) = a_i$, где $x \equiv i \pmod n$ и $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажем, что $\mu \leqslant_F \alpha$ для любой $\alpha \in PF_A$. Ясно, что $\mu(x)$ — тотальная вычислимая функция.

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \delta\alpha$ — такие значения x, что $\alpha(x_i) = a_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как $\alpha \in PF_A$, то эти значения обязательно найдутся. Мы зафиксируем какие-нибудь из них. Определим функцию $f(x)$ с помощью следующего алгоритма: $f(x) = x_i \Leftrightarrow \mu(x) = a_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая функция, как и функция $\mu(x)$.

Осталось доказать, что $\mu(x) = \alpha(f(x))$ для всех $x \in \omega$. В самом деле, пусть $x \equiv i \pmod n$ для некоторого $i = 0, 1, \ldots, n-1$, тогда $\mu(x) = a_i$. С другой стороны, при этом $f(x) = x_i$ и $\alpha(x_i) = a_i$, т. е. $\alpha(f(x)) = a_i$. Следовательно, $\mu \leqslant_F \alpha$ посредством вычислимой функции $f(x)$. Таким образом, доказано, что $\boldsymbol{m} = d_F(\mu)$ — наименьший элемент верхней полурешетки $L_F(A)$. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, когда $|A| = 1$. Пусть для определенности $A = \{0\}$ и $o(x) = 0$ для всех $x \in \omega$. Докажем, что $o \leqslant_F \alpha$ для любой функции $\alpha \in PF_{\{0\}}$. Пусть $\alpha(a) = 0$ для некоторого $a \in \omega$. Такое число обязательно найдется, так как по условию $\rho\alpha = \{0\}$. Определим функцию $f(x) = a$ для всех $x \in \omega$. Очевидно, $o(x) = \alpha(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $o \leqslant_F \alpha$ и $d_F(o) \leqslant d_F(\alpha)$, т. е. $d_F(o)$ является наименьшим элементом в $L_F(\{0\})$.

Опишем F-степень $d_F(o)$. Докажем, что она состоит только из одной функции $o(x)$. В самом деле, если $\alpha \leqslant_F o$, то существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что $\alpha(x) = o(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Однако, ясно, что для любой функции $f(x)$ при этом $\alpha(x) = 1$ для всех $x \in \omega$.

Если исключить из множества $PF_{\{0\}}$ функцию $o(x)$, то вопрос о наименьшей F-степени решают следующие рассуждения. Пусть $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$ — произвольные функции с вычислимой областью определения, отличные от $o(x)$, докажем, что $\alpha \equiv_F \beta$. Пусть $\delta\alpha = A$ и $\overline{\delta\alpha} = B$. По условию, оба множества A и B вычислимы и непусты, причем $A \cup B = \omega$. Пусть $\beta(a) = 0$ и $\beta(b)\uparrow$, такие a и b существуют по нашему предположению. Определим функцию $f(x)$ с помощью следующего алгоритма. Пусть c — произвольное число, проверим $c \in A$? Если «да», т. е. $c \in A$, полагаем $f(x) = a$. Если «нет», т. е. $c \notin A$, полагаем $f(x) = b$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая всюду определенная функция. Легко убедиться, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $\alpha \leqslant_F \beta$. Аналогично доказывается, что $\alpha \geqslant_F \beta$. Итак, все функции с вычислимой областью определения, отличные от $o(x)$, образуют одну F-степень. Обозначим эту F-степень через $\boldsymbol{v}$.

Докажем, что $\boldsymbol{v} \leqslant d_F(\gamma)$ для любой функции $\gamma \in PF_{\{0\}} - \{o\}$. Пусть $\alpha \in \boldsymbol{v}$, $\delta\alpha = A$ и $\overline{\delta\alpha} = B$. Пусть $\gamma(a) = 0$ и $\gamma(b)\uparrow$, такие a и b существуют по нашему предположению. Определим функцию $f(x)$ с помощью следующего алгоритма. Пусть c — произвольное число, проверим $c \in A$? Если «да», т. е. $c \in A$, полагаем $f(x) = a$. Если «нет», т. е. $c \notin A$, полагаем $f(x) = b$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая всюду определенная функция. Легко убедиться, что $\alpha(x) = \gamma(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $\alpha \leqslant_F \gamma$.

Представляет интерес вопрос о существовании наименьших элементов в верхних полурешетках $L_F(A)$ для различных бесконечных множеств $A \subseteq \omega$.

Сводимость функций может быть определена традиционным способом с помощью хорошо изученных алгоритмических сводимостей множеств. В частности, можно использовать m-сводимость.

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ *m-сводится к функции* $\beta(x)$, если существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что $x \in \tau\alpha \leftrightarrow f(x) \in \tau\beta$ для всех $x \in \omega$. Обозначим факт m-сводимости α к β через $\alpha \leqslant_m \beta$.

Связь между сводимостями $\leqslant_m$ и $\leqslant_F$ на функциях из $PF_{\{0\}}$ дает следующая теорема. Для случая произвольного множества A взаимосвязь между сводимостями $\leqslant_m$ и $\leqslant_F$ на функциях из PF_A ранее не изучалась.

Теорема 5. *$\alpha \leqslant_m \beta \Leftrightarrow \alpha \leqslant_F \beta$ для любых функций $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$ и вычислимая функция g такова, что $z \in \tau\alpha \leftrightarrow g(z) \in \tau\beta$ для всех $z \in \omega$. Пусть $z = \langle x, 0\rangle \in \tau\alpha$, т. е. $\alpha(x) = 0$, тогда $g(\langle x, 0\rangle) \in \tau\beta$, т. е. $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big) = 0 = \alpha(x)$. Если $z = \langle x, 0\rangle \notin \tau\alpha$, т. е. $\alpha(x)\uparrow$, тогда $g(\langle x, 0\rangle) \notin \tau\beta$, т. е. $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big)\uparrow$. В самом деле, если $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big)\downarrow$, то из условия $\beta \in PF_{\{0\}}$ следует, что $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big) = 0$ и тогда $g(\langle x, 0\rangle) \in \tau\beta$. Это противоречит нашему предположению.

Пусть $f(x) = \big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая функция, как и $g(z)$. Кроме того, установлено, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $\alpha \leqslant_F \beta$.

$\Leftarrow$: Пусть $\alpha \leqslant_F \beta$, тогда $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для некоторой вычислимой функции $f(x)$. В соответствие с леммой 1 в этом случае $\delta\alpha \leqslant_m \delta\beta$ посредством вычислимой функции $f(x)$. Тогда

$$\big[x \in \delta\alpha \leftrightarrow f(x) \in \delta\beta\big] \leftrightarrow \big[\langle x, 0\rangle \in \tau\alpha \leftrightarrow \langle f(x), 0\rangle \in \tau\beta\big].$$

Пусть $z = \langle x, y\rangle$, определим функцию

$$h(z) = h\big(\langle x, y\rangle\big) = \begin{cases} \langle f(x), 0\rangle, & \text{если } y = 0, \\ \langle x, 1\rangle, & \text{если } y \neq 0. \end{cases}$$

Из выше сказанного и того, что $\beta \in PF_{\{0\}}$, следует, что для всех $z \in \omega$

$$z \in \tau\alpha \leftrightarrow h(z) \in \tau\beta.$$

Отсюда следует, что $\alpha \leqslant_m \beta$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что тотальные F-степени образуют в верхней полурешетке $L_F(A)$ подполурешетку $T(A)$. Другими словами, это означает, что для любых $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha)$, $\boldsymbol{b} = d_F(\beta) \in L_F(A)$ выполнены следующие условия:

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in T(A) \to \boldsymbol{c} = \sup\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in T(A),$$
$$\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b} \in T(A) \to \boldsymbol{a} \in T(A).$$

Нетотальные F-степени не могут, как было показано в лемме 5, быть наименьшими элементами в $L_F(A)$ для любого множества A. Однако, если рассматривать частично упорядоченное множество $L_F(A)\backslash T(A)$, то можно ставить вопрос о существовании в нем минимальных элементов.

Определение 6. Пусть $f \in PF_A$ — тотальная функция. F-степень $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha) \in L_F(A)$ называется *f-квазиминимальной*, если $f \leqslant_F \alpha$, $\alpha \nleqslant_F f$ и $\forall g[g \leqslant_F \alpha \to g \leqslant_F f]$. Если f — вычислимая функция, то $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha)$ называется *квазиминимальной F-степенью.*

Заметим, что если $|A| = 1$, то все нетотальные F-степени из $L_F(A)$ являются квазиминимальными. Если множество A не является вычислимо перечислимым, то $L_F(A)$ не содержит квазиминимальных F-степеней, так как в этом случае $L_F(A)$ не имеет степеней, содержащих вычислимые функции.

В следующей теореме докажем одно достаточное условие квазиминимальности F-степени из $L_F(A)$ для случая, когда множество A является вычислимо перечислимым.

Теорема 6. *Если $\delta\alpha$ — иммунное множество, то $d_F(\alpha)$ является квазиминимальной в $L_F(A)$.*

Доказательство. Пусть функция $\alpha \in PF_A$ имеет иммунную область определения $\delta\alpha$, т. е. множество $\delta\alpha$ не содержит бесконечных вычислимо перечислимых подмножеств. Ясно, что при этом функция α не может быть частично вычислимой.

Рассмотрим сначала случай, когда множество A конечно. Допустим, что $d_F(\alpha)$ не является квазиминимальной, тогда существует невычислимая функция g такая, что $g \leqslant_F \alpha$. Пусть h — такая вычислимая функция, для которой $g(x) = \alpha h(x)$ для всех $x \in \omega$. Ясно, что при этом $\rho h \subseteq \delta\alpha$, следовательно, множество ρh, как подмножество иммунного множество, является конечным. Тогда существует конечная подфункция $\widetilde{\alpha}$ функции α такая, что $g(x) = \widetilde{\alpha} h(x)$ для всех $x \in \omega$. Отсюда следует, что $g(x)$ — вычислимая функция, что противоречит нашему предположению. Следовательно, в этом случае $d_F(\alpha)$ является квазиминимальной.

Пусть теперь A — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Покажем, что в этом случае невозможна сводимость $g \leqslant_F \alpha$. Действительно, если $g(x) = \alpha h(x)$ для некоторой вычислимой функции $h(x)$, то $|\rho h| < \infty$ и, следовательно, $|\rho(\alpha h)| < \infty$. С другой стороны, $\rho g = A$ — бесконечное множество, поэтому равенство $g(x) = \alpha h(x)$ невозможно, что противоречит предположению. В этом случае имеем тривиальное выполнение определения квазиминимальности F-степени $d_F(\alpha)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если A — вычислимо перечислимое множество, то $L_F(A)$ содержит континуум квазиминимальных F-степеней.*

Библиографический список

1. *Дёгтев А. Н.* Сводимость частично рекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 5. С. 970–988.
2. *Дёгтев А. Н.* Сводимость частично рекурсивных функций. II // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 765–774.