Вычислимость на действительных числах

М.М. Арсланов

Всероссийская конференция "Алгебра и теория алгоритмов"
Иваново, 23 Марта, 2018

$\alpha \in [0,1)$, $\alpha \in 2^\omega$.

Если $\alpha \in 2^\omega$, то полагаем $\alpha = 0.\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots$,

$\alpha \in [0,1)$, $\alpha \in 2^\omega$.

Если $\alpha \in 2^\omega$, то полагаем $\alpha = 0.\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots$,

$\alpha = \sum_{n\in A} 2^{-(n+1)} := 0.A$,

где $A(x) = \alpha_x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$

Вычислимые числа

Определение (А. Тьюринг'1936) Вещественное число $\alpha \in [0;1)$ называется вычислимым, если существует такая вычислимая функция $f : N \to \{0,1\}$, что

$$\alpha = 0.f(0)f(1)f(2)\ldots\ldots$$

Вычислимые числа

Определение (А. Тьюринг'1936) Вещественное число $\alpha \in [0;1)$ называется вычислимым, если существует такая вычислимая функция $f : N \to \{0,1\}$, что

$$\alpha = 0.f(0)f(1)f(2)\ldots\ldots$$

R. M. Robinson in Review of "Peter, R., Rekursive Funktionen". The Journal of Symbolic Logic, 16:280-282, 1951

Вещественное число α *вычислимо перечислимо* (слева вычислимо перечислимо), если существует возрастающая вычислимая последовательность $\{r_s\}$ рациональных чисел, сходящихся к α.

Вычислимые и в.п. вещественные числа

Вещественное число α *вычислимо перечислимо* (слева вычислимо перечислимо), если существует возрастающая вычислимая последовательность $\{r_s\}$ рациональных чисел, сходящихся к α.

Вещественное число α *вычислимо* тогда и только тогда, когда $\alpha = 0.A$ для некоторого вычислимого множества $A \subseteq N$, и тогда и только тогда, когда оно и слева, и справа вычислимо перечислимо.

Вычислимо перечислимые числа

Верно ли, что

вещественное число α в.п. тогда и только тогда, когда $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A?

Вычислимо перечислимые числа

Верно ли, что

вещественное число α в.п. тогда и только тогда, когда $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A?

Ясно, что если $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A, тогда α в.п.

Вычислимо перечислимые числа

Верно ли, что

вещественное число α в.п. тогда и только тогда, когда $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A?

Ясно, что если $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A, тогда α в.п.

($\alpha = \lim_s r_s$, где $A = \lim A_s$ и $r_s = 0.A_s$ для каждого $s > 0$.)

Вычислимо перечислимые числа

Верно ли, что

вещественное число α в.п. тогда и только тогда, когда $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A?

Ясно, что если $\alpha = 0.A$ для некоторого в.п. множества A, тогда α в.п.

($\alpha = \lim_s r_s$, где $A = \lim A_s$ и $r_s = 0.A_s$ для каждого $s > 0$.)

Но обратное неверно:

- (C. Jockusch'1969): не каждое в.п. вещественное число имеет в.п. бинарное представление, т.е. существуют такие в.п. вещественные числа α, что $\alpha = 0.A$ ни для какого в.п. множества A.

Вычислимо перечислимое вещественное число

- (C. Jockusch'1969): не каждое в.п. вещественное число имеет в.п. бинарное представление, т.е. существуют такие в.п. вещественные числа α, что $\alpha = 0.A$ ни для какого в.п. множества A.

Пример:

Пусть $\alpha = 0.A$, где $A := \{2x : x \in B\} \cup \{2x+1 : x \notin B\}$, для некоторого в.п. невычислимого множества B.

Вычислимо перечислимое вещественное число

- (C. Jockusch'1969): не каждое в.п. вещественное число имеет в.п. бинарное представление, т.е. существуют такие в.п. вещественные числа α, что $\alpha = 0.A$ ни для какого в.п. множества A.

Пример:

Пусть $\alpha = 0.A$, где $A := \{2x : x \in B\} \cup \{2x + 1 : x \notin B\}$, для некоторого в.п. невычислимого множества B.

Определение.

В.п. вещественное число $0.A$ называется *жестко в.п. числом*, если A является в.п. множеством.

Вычислимо перечислимое вещественное число

Определение

(Calude, Hertling, Khoussainov, Wang'1998). Множество A называется nearly в.п., если существует такая вычислимая последовательность $\{A_s\}$ сходящихся к A конечных множеств, что
$(\forall n, s)(n \in A_s - A_{s+1} \Rightarrow (\exists m < n)(m \in A_{s+1} - A_s))$.

Вычислимо перечислимое вещественное число

Определение

(Calude, Hertling, Khoussainov, Wang'1998). Множество A называется nearly в.п., если существует такая вычислимая последовательность $\{A_s\}$ сходящихся к A конечных множеств, что
$(\forall n, s)(n \in A_s - A_{s+1} \Rightarrow (\exists m < n)(m \in A_{s+1} - A_s))$.

Теорема

(Calude, Hertling, Khoussainov, Wang'1998). Вещественное число α в.п. тогда и только тогда, когда $\alpha = 0.A$ для некоторого nearly в.п. множества A.

Теорема

Число α вычислимо аппроксимируемо

- *тогда и только тогда, когда оно жесткое Δ^0_2-число, т.е. $\alpha := 0.A$ для некоторого Δ^0_2-множества A;*

Теорема

Число α вычислимо аппроксимируемо

• *тогда и только тогда, когда оно жесткое Δ^0_2-число, т.е.* $\alpha := 0.A$ *для некоторого Δ^0_2-множества A*;

• тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность $\{r_s\}_{s\in\omega}$ рациональных чисел такая, что a) она сходится к α *эффективно* в том смысле, что

$$(\forall s, t)(t \geq s \Rightarrow | r_t - r_s | \leq 2^{-s}),$$

b) существует такая вычислимая функция $f(t, s)$, что

$$(\forall s)[\lim_t f(t, s) = r_s]$$

.

Сводимость по Соловею

Определение

(Solovay'1975) *Пусть* α *и* β *в.п. вещественные числа. Говорят, что* $\beta \leq_s \alpha$ *(*β *сводится к* α *по Соловею), если существуют такие константа c и частично вычислимая функция* $\varphi : Q \to Q$ *такие, что*

$$(\forall q \in Q)([q < \alpha \to \varphi(q)\downarrow \& \varphi(q) < \beta] \& [\beta - \varphi(q) \leq c(\alpha - q)]).$$

(По аппроксимации α рациональными числами, φ задает такую же аппроксимацию для β, сходящуюся к β по крайней мере не медленнее, чем соответствующая аппроксимация для α.)

Эквивалентное определение

Пусть α *и* β *в.п. вещественные числа. Тогда* $\beta \leq_s \alpha$, *если существуют такие константа c и такие вычислимые последовательности* $\{x_s\}$ *и* $\{y_s\}$ *рациональных чисел, сходящихся к* α *и* β, *соответственно, что*

$$(\forall n)(\mid \beta - y_n \mid \leq c \cdot \mid \alpha - x_n \mid)$$

Определение

(Rettinger, Zheng'2004) *Пусть* α *и* β *вычислимо аппроксимируемые вещественные числа. Тогда* $\beta \leq_s \alpha$ *(*β *обобщенно сводимо по Соловею к* α*), если существуют константа* c *и вычислимые последовательности рациональных чисел* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *такие, что они сходятся соответственно к* α *и* β*, и*

$$(\forall n)(|\beta - y_n| \leq c(|\alpha - x_n| + 2^{-n})).$$

Сводимость по Соловею является мерой относительной случайности:

Теорема

(Solovay'1975; Rettinger, Zheng'2004). *Пусть K универсальная беспрефиксная машина Тьюринга, α и β произвольные вычислимо аппроксимируемые вещественные числа. Если $\beta \leq_s \alpha$, то для всех n,*

$$K(\beta\lceil n) \leq K(\alpha\lceil n) + O(1).$$

Сводимость по Соловею является мерой относительной случайности:

Теорема

(Solovay'1975; Rettinger, Zheng'2004). *Пусть K универсальная беспрефиксная машина Тьюринга, α и β произвольные вычислимо аппроксимируемые вещественные числа. Если $\beta \leq_s \alpha$, то для всех n,*

$$K(\beta\lceil n) \leq K(\alpha\lceil n) + O(1).$$

Теорема

(Chaitin, Solovay, Kuchera, Slaman). *В.п. вещественное число случайно тогда и только тогда, когда оно s-полно, и тогда и только тогда, если оно является Ω-числом.* ($\Omega = \Sigma_{K(\sigma)\downarrow} 2^{-|\sigma|}$.)

Алгебраическая структура $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$

Теорема

(Calude, Khoussainov, Hertling, Wang'1998).

a) *Все в.п. вещественные числа образуют верхнюю полурешетку $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ относительно операции $\leq_s$, с наименьшим элементом 0_s, состоящим из всех вычислимых вещественных чисел, наибольшим элементом 1_s, состоящим из всех Ω-чисел, и операцией взятия верхней грани $\alpha \cup_s \beta = \alpha + \beta$.*

Алгебраическая структура $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$

Теорема

(Calude, Khoussainov, Hertling, Wang'1998).

a) *Все в.п. вещественные числа образуют верхнюю полурешетку $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ относительно операции $\leq_s$, с наименьшим элементом 0_s, состоящим из всех вычислимых вещественных чисел, наибольшим элементом 1_s, состоящим из всех Ω-чисел, и операцией взятия верхней грани $\alpha \cup_s \beta = \alpha + \beta$.*

b) *Существует строгий гомоморфизм из $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ на* $\{CE; \leq_T\}$; т.е. такое отображение $h : R_{\text{в.п.}} \to CE$, что
a) для всех $\alpha, \alpha' \in R_{\text{в.п.}}$, если $\alpha \leq_s \alpha'$, то $h(\alpha) \leq_T h(\alpha')$.
b) для всех $x, x' \in CE$, если $x \leq_T x'$, то существуют такие $\alpha, \alpha' \in R_{\text{в.п.}}$, что $\alpha \leq_s \alpha'$ и $h(\alpha) = x$, $h(\alpha') = x'$.

Алгебраическая структура $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$

Теорема

(Downey, Hirschfeldt, LaForte'2007). *Элементарная теория структуры* $\{R_{в.п.}, \leq_s\}$ *неразрешима.*

Алгебраическая структура $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$

Теорема

(Downey, Hirschfeldt, LaForte'2007). *Элементарная теория структуры* $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ *неразрешима.*

Теорема.

a) Σ_1-*теория структуры* $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ *разрешима.*

Алгебраическая структура $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$

Теорема

(Downey, Hirschfeldt, LaForte'2007). *Элементарная теория структуры* $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ *неразрешима.*

Теорема.

a) Σ_1*-теория структуры* $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ *разрешима.*

b) Σ_2*-теория структуры* $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$ *разрешима.*

Алгебраическая структура $\{R_{\text{в.п.}}, \leq_s\}$

Теорема

(Downey, Hirschfeldt, LaForte'2007). *Элементарная теория структуры $\{R_{в.п.}, \leq_s\}$ неразрешима.*

Теорема.

a) Σ_1*-теория структуры* $\{R_{в.п.}, \leq_s\}$ *разрешима.*

b) Σ_2*-теория структуры* $\{R_{в.п.}, \leq_s\}$ *разрешима.*

c) Σ_8*-теория структуры* $\{R_{в.п.}, \leq_s\}$ *неразрешима.*

d-в.п. вещественные числа

Вещественное число γ называется d-в.п. числом, если существуют такие в.п. вещественные числа α, β, что $\gamma = \alpha - \beta$ (разность - **d**ifference - в.п. чисел).

Вещественное число γ называется d-в.п. числом, если существуют такие в.п. вещественные числа α, β, что $\gamma = \alpha - \beta$ (разность - **d**ifference - в.п. чисел).

Теорема

Все n-в.п. вещественные числа (уровень *n* разностной иерархии Аддисона-Ершова) для любого $n > 2$ являются d-в.п. числами.

Теорема.

Существуют жесткое ω-в.п. вещественное число α (т.е. $\alpha = 0.A$, где A ω-в.п.), которое не являются d-в.п. числом.

Теорема.

Существуют жесткое ω-в.п. вещественное число α (т.е. $\alpha = 0.A$, где A ω-в.п.), которое не являются d-в.п. числом.

Для любого n-в.п. множества A, число $0.A$ является d-в.п. числом. Обратное неверно.

Теорема.

Существуют жесткое ω-в.п. вещественное число α (т.е. $\alpha = 0.A$, где A ω-в.п.), которое не являются d-в.п. числом.

Для любого n-в.п. множества A, число $0.A$ является d-в.п. числом. Обратное неверно.

Теорема.

Пусть $\tau < \omega^2$ вычислимый ординал. Существуют в.п. вещественные числа α, β такие, что число $\gamma = \alpha - \beta$ не имеет представления $\gamma = 0.A$ ни для какого τ-в.п. множества A.

d-в.п. числа

Теорема.

Любая ω-в.п. s- степень содержит d-в.п. вещественное число, но существует такая Δ^0_2-s-степень, которая не содержит d-в.п. вещественные числа.

Теорема.

Любая ω-в.п. s- степень содержит d-в.п. вещественное число, но существует такая Δ_2^0-s-степень, которая не содержит d-в.п. вещественные числа.

Более того,

Теорема.

Любая ω-в.п. s- степень содержит d-в.п. вещественное число, но существует такая Δ_2^0-s-степень, которая не содержит d-в.п. вещественные числа.

Более того,

Для тьюринговых степеней,

a) любой не низкий класс скачка содержит степень без d-в.п. вещественных чисел.
b) любой класс скачка содержит d-в.п. степени.

Открытый вопрос.

a) Существует ли невычислимая низкая тьюринговая степень, которая целиком состоит из d-в.п. чисел?

Открытый вопрос.

а) Существует ли невычислимая низкая тьюринговая степень, которая целиком состоит из d-в.п. чисел?

или, хотя бы,

Открытый вопрос.

a) Существует ли невычислимая низкая тьюринговая степень, которая целиком состоит из d-в.п. чисел?

или, хотя бы,

b) существует ли невычислимая низкая тьюринговая степень, некоторая s-степень которой целиком состоит из d-в.п. чисел?

Теорема.

Пусть A произвольное nearly в.п. множество. Существует d-в.п. множество B такое, что $A \equiv_T B$.

Теорема.

Пусть A произвольное nearly в.п. множество. Существует d-в.п. множество B такое, что $A \equiv_T B$.

Определение.

Если d-в.п. степень содержит nearly в.п. множества, то такие d-в.п. степени назовем *почти в.п.* степенями.

Теорема.

Пусть A произвольное nearly в.п. множество. Существует d-в.п. множество B такое, что $A \equiv_T B$.

Определение.

Если d-в.п. степень содержит nearly в.п. множества, то такие d-в.п. степени назовем *почти в.п.* степенями.

Теорема.

Существует невычислимая низкая тьюринговая d-в.п. степень, которая не содержит почти в.п. d-в.п. множества.

Теорема.

Пусть A произвольное nearly в.п. множество. Существует d-в.п. множество B такое, что $A \equiv_T B$.

Определение.

Если d-в.п. степень содержит nearly в.п. множества, то такие d-в.п. степени назовем *почти в.п.* степенями.

Теорема.

Существует невычислимая низкая тьюринговая d-в.п. степень, которая не содержит почти в.п. d-в.п. множества.

в частности,

существует невычислимая низкая d-в.п. s-степень, которая не является почти в.п.

Интерпретируемость в.п. чисел

Теорема.

(A. Nies, S. Lempp [2000] для $n = 2$, Арсланов [2013] для $2 < n < \omega$.) Для любых $n \geq 1, m > n$, n-в.п. множества определимы без параметров в полурешеточных структурах m-в.п. множеств.

Интерпретируемость в.п. чисел

Теорема.
(A. Nies, S. Lempp [2000] для $n = 2$, Арсланов [2013] для $2 < n < \omega$.) Для любых $n \geq 1, m > n$, n-в.п. множества определимы без параметров в полурешеточных структурах m-в.п. множеств.

S. Lempp and A. Nies, *Differences of computably enumerable sets*, Math. Log. Quarterly, *46* (2000), 555-561.

Arslanov M.M., *Definable relations in Turing degree structures*, J.Logic Computation, *23*, No.6, (2013), 1145–1154.

Интерпретируемость в.п. чисел

Основная теорема.

а) Nearly в.п. множества определимы без параметров в нижней полурешетке d-в.п. множеств.

Интерпретируемость в.п. чисел

Основная теорема.

а) Nearly в.п. множества определимы без параметров в нижней полурешетке d-в.п. множеств.

б) В.п. числа определимы в сигнатуре $\{\leq_s\}$ без параметров в классе всех d-в.п. вещественных чисел.