

Некоторые категории абелевых групп

А.А. Фомин (МПГУ)

Иваново,
22 марта 2018

Кольцо полиадических чисел $\hat{Z} = \prod_p \hat{Z}_p$ (Х.Прюфер 1896-1934)

Рассмотрим полиадическое число $(\alpha_p) = \alpha \in \hat{Z}$,

Для каждого простого числа p рассмотрим наибольшую степень p , для которой следующее уравнение имеет решение

$$p^{m_p} x = \alpha_p$$

Получаем характеристику полиадического числа

$$\text{char}(\alpha) = (m_p), \text{ где для каждого } p \quad m_p \in \{\infty, 0, 1, \dots\}$$

Всякий конечнопорожденный идеал имеет вид

$$I_\chi = \{\alpha \in \hat{Z} : \text{char}(\alpha) \geq \chi\} \subseteq \hat{Z}$$

Для некоторой характеристики χ .

Заметим, что если $\chi \geq \kappa$, то имеют место включения $\hat{Z} \supseteq I_\kappa \supseteq I_\chi$

Мы получаем естественные гомоморфизмы колец, которые называются спуском от большей характеристики к меньшей

$$\hat{Z}/I_\chi \longrightarrow \hat{Z}/I_\kappa$$

Конечно представимые модули

Определение Модуль M над коммутативным кольцом R называется конечно представимым, если для некоторых целых положительных чисел m и n существует точная последовательность $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$.

Кольцо $Z_\chi = \hat{Z}/I_\chi$, рассматриваемое как модуль над кольцом $\hat{Z}$, является циклическим конечно представимым модулем над кольцом полиадических чисел.

Теорема Всякий конечно представимый модуль M над кольцом полиадических чисел однозначно представляется в виде $M \cong Z_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus Z_{\chi_n}$, где $\chi_1 \leq \cdots \leq \chi_n$ - некоторая последовательность характеристик.

Категория $\mathcal{S}$

Объекты: конечные последовательности элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел $a_1, \dots, a_n \in M$

Морфизмы: $a_1, \dots, a_n \rightarrow b_1, \dots, b_k$

это пары (f, T) , состоящие из модульного гомоморфизма $f: \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\hat{Z}} \rightarrow \langle b_1, \dots, b_k \rangle_{\hat{Z}}$ и целочисленной матрицы T , для которых выполнено матричное равенство $(f a_1, \dots, f a_n) = (b_1, \dots, b_k) T$.

Пример 1 Все элементы равны нулю. Тогда $f = 0$, а T может быть любая целочисленная матрица размера $k \times n$. В этом случае множество морфизмов совпадает с множеством целочисленных матриц размера $k \times n$.

Пример 2 Последовательности из одного элемента находятся во взаимно однозначном соответствии с характеристиками.

Один элемент a порождает циклический конечно представимый модуль над кольцом полиадических чисел $\langle a \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}} \cong \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ .

Если имеет место неравенство $\chi \geq \kappa$ для характеристик, соответствующих элементам a и b , то мы получаем гомоморфизм спуска, при котором $a \mapsto b$.

Этот гомоморфизм вместе с единичной матрицей составляет морфизм категории $\mathcal{S}$, который мы будем называть морфизмом спуска категории $\mathcal{S}$ от большей характеристики к меньшей.

Категория F абелевых групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами

Pontryagin L.S. The theory of topological commutative groups // Ann. of Math. - 1934. - Vol. 13. - P. 361-388.

Мальцев А.И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. - 1938. - Т. 4, N 1. - С. 45-68.

Kurosh A.G. Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen von endlichen Range // Ann. of Math. - 1937. - Vol. 38. P. 175-203.

Derry D. Über eine Klasse von abelschen Gruppen // Proc. London Math. Soc. - 1938. - Vol. s2-43. - P. 490-506.

Levi F. Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen. - Leipzig: Habilitationsschrift, 1917.

Baer R. Abelian groups without elements of finite order// Duke Math. J. - 1937. - Vol 3. - P. 68-122.

Объекты категории F : группы без кручения конечного ранга с выделенными базисами $A; a_1, \dots, a_n$.

Под базисом понимается любая максимальная линейно независимая система элементов.

Морфизмы категории F : $A; a_1, \dots, a_n \rightarrow B; b_1, \dots, b_k$

Морфизмами являются любые гомоморфизмы групп $f: A \rightarrow B$, для которых матрица относительно выделенных базисов является целочисленной. То есть имеет место матричное равенство $(f a_1, \dots, f a_n) = (b_1, \dots, b_k) M_f$ с целочисленной матрицей M_f .

Теорема Категории S и F являются взаимно двойственными.

Пример 1 Последовательность, состоящая из n нулей $0, \dots, 0$, в категории $\mathcal{S}$ переходит при этой двойственности в свободную группу ранга n со свободным базисом.

Замечание Если учесть разложение конечно представимого $\widehat{\mathbf{Z}}$ -модуля в прямую сумму циклических модулей $M = Z_{\chi_1} \oplus \dots \oplus Z_{\chi_n}$, то элемент модуля M можно представить в виде столбца, состоящего из классов вычетов по модулю соответствующих характеристик. Тогда объект категории $\mathcal{S}$ будет представлен в виде матрицы.

Матрица, двойственная группе категории $\mathcal{F}$, совпадает с матрицей, введенной А.И. Мальцевым для описания таких групп. Таким образом, эта двойственность по сути дела совпадает с описанием Мальцева.

А.И. Мальцев работал в Иваново 1931-1960, защитил кандидатскую диссертацию «Абелевы группы без кручения конечного ранга» в 1937 г.

Факторно делимые группы

Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible Abelian groups //

Proc. Amer. Math. Soc. - **1998**. - Vol. 126, no. 1. - P. 45-52.

Определение Абелева группа A называется факторно делимой, если она содержит такую свободную подгруппу $F \subseteq A$ конечного ранга, что факторгруппа A/F является делимой периодической группой. При этом сама группа A не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп. Ранг и свободный базис подгруппы F называются соответственно рангом и базисом факторно делимой группы A .

Категория D факторно делимых групп с отмеченными базисами

Объектами категории D являются факторно делимые группы с отмеченными базисами $A; a_1, \dots, a_n$.

Морфизмы категории D : $A; a_1, \dots, a_n \rightarrow B; b_1, \dots, b_k$

Морфизмами являются любые гомоморфизмы групп $f: A \rightarrow B$, для которых матрица относительно выделенных базисов является целочисленной. То есть имеет место матричное равенство $(f a_1, \dots, f a_n) = (b_1, \dots, b_k) M_f$ с целочисленной матрицей M_f .

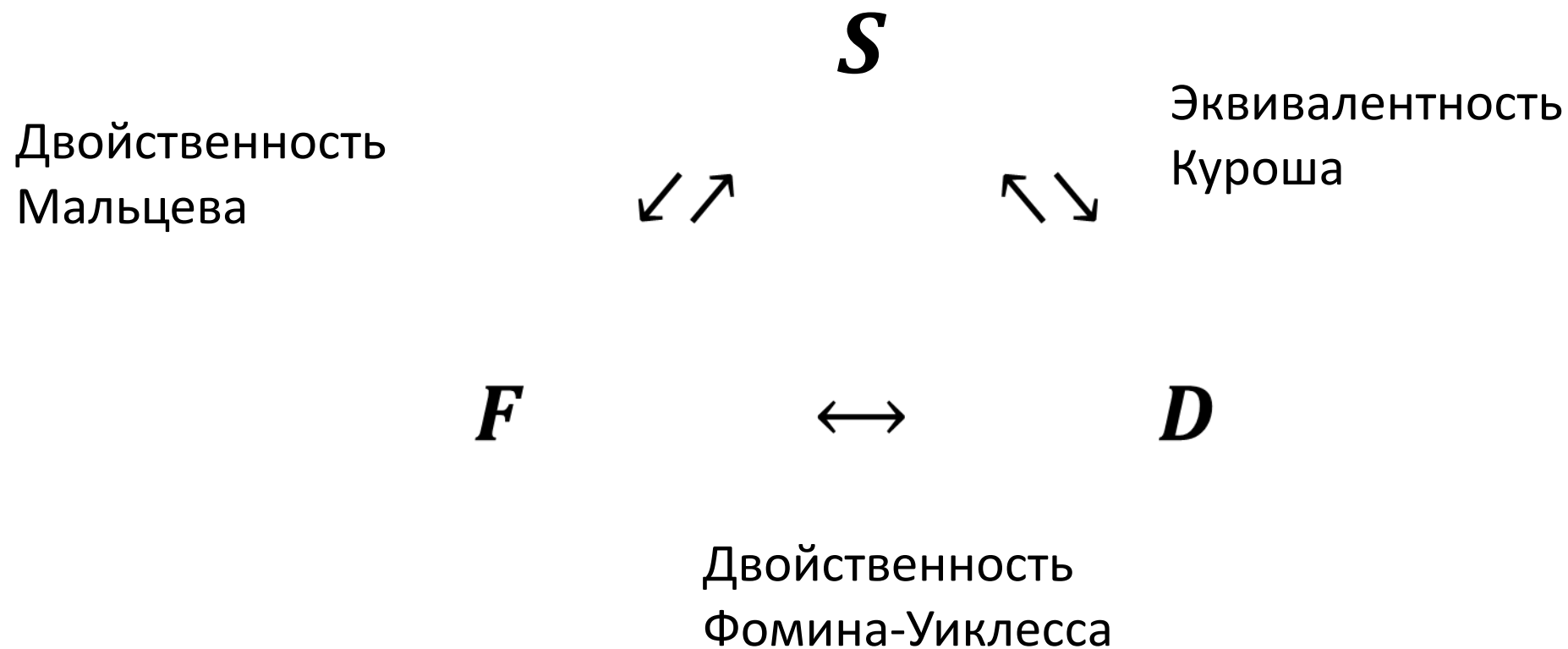
Теорема Категории S и D эквивалентны.

Пример 1 Последовательность, состоящая из n нулей $0, \dots, 0$, в категории $\mathcal{S}$ переходит при этой эквивалентности в делимую группу без кручения ранга n .

Замечание А.Г. Курош описал так называемые p -примитивные группы без кручения, где p – простое число, при помощи матриц определенного вида с p -адическими элементами.

Заметим, что p -примитивные группы Куроша являются факторно делимыми. Если к ним применить нашу эквивалентность, то получатся матрицы Куроша.

Коммутативная диаграмма



Подгруппы аддитивной группы рациональных чисел

Рассмотрим группы A , для которых $\mathbb{Z} \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}$. Имеем $1 \in A, \text{char}_A(1) = \chi$. Подгруппа однозначно определяется этой характеристикой, поэтому мы можем обозначить $A = R_\chi$.

Любой объект категории $\mathbf{F}$ ранга 1 изоморфен в этой категории объекту вида $R_\chi; 1$ для некоторой характеристики χ . Это в точности объекты, двойственные объектам из одного элемента в категории $\mathbf{S}$ (Пример 2). Если имеет место неравенство для характеристик $\chi \geq \kappa$, то спуску в категории $\mathbf{S}$ соответствует тождественное вложение $R_\kappa \rightarrow R_\chi$.

Теорема Следующие условия равносильны:

- 1) Подгруппа R_χ является подкольцом кольца $\mathbb{Q}$
- 2) Характеристика идемпотентна, то есть состоит из нулей и бесконечностей
- 3) Объект $R_\chi; 1$ принадлежит категории $\mathbf{D}$

Теорема (Р. Бэр) $R_\chi \cong R_\kappa \Leftrightarrow \chi \sim \kappa$

Пример 2 в категории D

Пусть $\chi = (m_p)$ – некоторая характеристика. Тогда кольцо Z_χ имеет следующий вид $Z_\chi = \prod_p K_p$, где K_p – кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} , если $m_p < \infty$, или $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ – кольцо целых p -адических чисел, если $m_p = \infty$.

Обозначим через R^χ множество всех элементов $a \in Z_\chi$, для которых существует пара целых чисел m и $n \neq 0$ такая, что $na = m1$. $R^\chi = \langle 1 \rangle_*$ называется сервантной оболочкой единицы кольца Z_χ . R^χ является факторно делимой группой ранга 1, единица кольца служит ее базисом.

Теорема (О.И. Давыдова)

Любая факторно делимая группа ранга 1 изоморфна группе R^χ для некоторой характеристики χ . Разным характеристикам соответствуют неизоморфные группы.

Если две характеристики связаны соотношением $\chi \geq \kappa$, то мы имеем гомоморфизм спуска в категории **S**

$$Z_\chi \longrightarrow Z_\kappa$$

Ограничение этого отображения на множество R^χ является морфизмом в категории **D**

$$R^\chi \longrightarrow R^\kappa$$

Если эти две характеристики идемпотентны, т.е. состоят из нулей и бесконечностей, то $R^\chi = R_{\bar{\chi}}$, где характеристика $\bar{\chi}$ получается из характеристики χ заменой нулей на бесконечности и бесконечностей на нули. При этом получается $\bar{\chi} \leq \bar{\kappa}$. В этом случае морфизм категории **D**

$$R^\chi \longrightarrow R^\kappa$$

Совпадает с морфизмом категории **F**

$$R_{\bar{\chi}} \longrightarrow R_{\bar{\kappa}}$$

Это есть в точности пересечение двух спектров морфизмов в категориях **F** и **D**, которые соответствуют морфизмам спуска в категории **S**.

Спасибо за внимание