ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ ГРУПП

1. Jon M. Corson and Thomas J. Ratkovich A strong form of residual finiteness for groups J. Group Theory 9 (2006), 497-505.
2. P. R. Hewitt. Extensions of residually finite groups. J. Algebra 163 (1994), 757-772.

Конечное расширение финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой (если $H \trianglelefteq G$ такая, что G/H конечна и H финитно аппроксимируема, то и G финитно аппроксимируема).

Верно ли двойственное утверждение: расширение конечной группы при помощи финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой (если $H \trianglelefteq G$ такая, что G/H финитно аппроксимируема и H конечна, то и G финитно аппроксимируема)?

Пример

Пусть p — простое число, пусть для любого натурального числа n символ A_n обозначает конечную циклическую группу порядка p^{n+1} с порождающим a_n и пусть

$$G = \langle a_1, a_2, \dots ;\ a_n^{p^{n+1}} = 1,\ a_1^p = a_n^{p^n}\ (n = 1, 2, \dots)\rangle$$

— свободное произведение семейства групп A_1, A_2, … с одной объединенной подгруппой. Группа G не является финитно аппроксимируемой, поскольку содержит неединичные полные элементы. С другой стороны, объединяемая подгруппа A_1^p является конечной нормальной (даже центральной) подгруппой группы G, а фактор-группа G/A_1^p является (обычным) свободным произведением семейства конечных групп $A_n/A_n^{p^n}$ и потому финитно аппроксимируема.

Вопрос: Существует ли конечно порожденная группа с аналогичными свойствами?

Положительный ответ получен в работе [1].

Из известной теоремы А.И.Мальцева о финитной аппроксимируемости полупрямого произведения групп следует, что каждое расширение любой конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы при помощи бесконечной циклической группы является финитно аппроксимируемой группой. В [1] формулируется задача описания всех конечно порожденных групп, которые ведут себя в этом смысле так же, как бесконечная циклическая группа. Для ее решения авторы этой статьи вводят следующее понятие:

Конечно порожденная группа G называется *сверх финитно аппроксимируемой* (super-(residually finite)) если каждое расширение произвольной конечной группы при помощи группы G является финитно аппроксимируемой группой. Следуя [1], такие группы будем сокращенно называть SRF-группами.

Основной результат статьи [1]:

каждое расширение любой конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы при помощи SRF-группы является финитно аппроксимируемой группой.

В работе [2] доказано, что среди расширений группы $\mathbb{Z}^3$ при помощи группы $SL_3(\mathbb{Z})$ существуют не финитно аппроксимируемые группы.

Группа $SL_3(\mathbb{Z})$ не является SRF-группой и, следовательно, представляет собой пример финитно аппроксимируемой конечно порожденной группы, расширение при помощи которой некоторой конечной группы не финитно аппроксимируемо.

Теорема 1. *Для любой группы G следующие утверждения равносильны:*

(1) *группа G не является финитно аппроксимируемой и обладает конечной нормальной подгруппой, фактор группа по которой финитно аппроксимируема;*
(2) *подгруппа $\sigma(G)$ группы G конечна и неединична.*

Кроме того, если группа G не является финитно аппроксимируемой и N — конечная нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/N финитно аппроксимируема, то (неединичная) подгруппа $\sigma(G)$ содержится в центре подгруппы N. В частности, центр подгруппы N неединичен, а подгруппа $\sigma(G)$ является конечной абелевой.

(Здесь $\sigma(G)$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Известно, что $\sigma(G)$ является наименьшей из всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым финитно аппроксимируемы.)

Следствие. *Произвольное расширение конечной группы без центра при помощи финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой.*

В статье [1] также доказано, что

класс SRF-групп замкнут относительно расширений и обычных свободных произведений,

свободное произведение двух SRF-групп с объединенной конечной подгруппой и HNN-расширение, базовая группа которого является SRF-группой и связанные подгруппы конечны, также являются SRF-группами.

Теорема 2. *Пусть G — некоторая группа, φ — инъективный эндоморфизм группы G и $G(\varphi) = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$ — соответствующее нисходящее HNN-расширение. Если G является SRF-группой и группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема, то и $G(\varphi)$ является SRF-группой.*

Отсюда и из упомянутой выше замкнутости класса SRF-групп относительно расширений и свободных произведений вытекает

Следствие. *Каждая финитно аппроксимируемая группа Баумслага – Солитэра является SRF-группой.*

Предложение 1. *Пусть группа $G^* = \big(G, t; t^{-1}At = B, \varphi\big)$ является — HNN-расширением группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами A и B и пусть для некоторой группы H существует эпиморфизм π на группу G^*. Тогда группа H является HNN-расширением вида $\big(G_1, s; s^{-1}A_1 s = B_1, \psi\big)$, где G_1, A_1 и B_1 — π-прообразы подгрупп G, A и B соответственно, s — π-прообраз элемента t и отображение ψ определяется по правилу $x\psi = s^{-1}xs$ для любого $x \in A_1$. При этом выполнено равенство $\psi\pi = \pi\varphi$.*

Пусть G — некоторая группа и φ — эндоморфизм группы G. φ-орбитой элемента $a \in G$ называется множество

$$\mathrm{Orb}_\varphi(a) = \big\{a\varphi^k \bigm| k = 0, 1, \dots\big\}.$$

Предложение 2. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и φ — инъективный эндоморфизм группы G. Нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$ является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда для любого неединичного элемента $a \in G$ найдется φ-допустимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G, пересечение которой с φ-орбитой элемента a пусто.*