

**Ретроспектива научных достижений
факультета: алгебры рекурсивных функций
Б.Я. Солон**

**“Научно-исследовательская деятельность в
современном классическом университете:
ИвГУ – 2017”**

**Секция фундаментальной и прикладной математики, 8
февраля 2017 года**

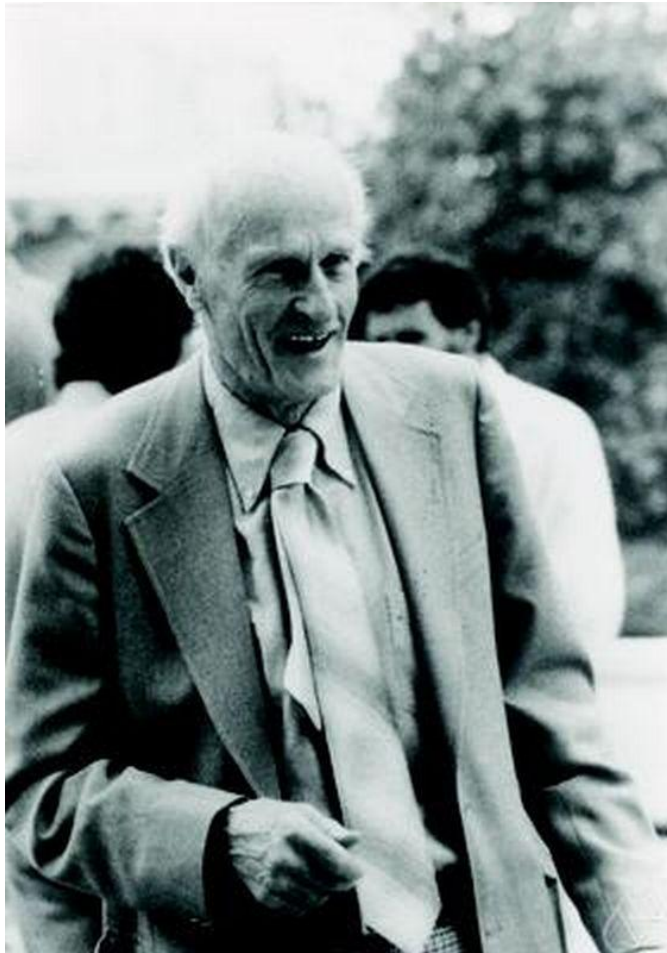
Курт Фридрих Гёдель

(28.04.1906 - 14.01.1978)



Описал класс
примитивно
рекурсивных функций
[1931] как класс всех
числовых функций,
определимых в
некоторой формальной
системе.

Стивен Коул Клини (5.01.1909 - 25.01.1994)



Ввел понятие частично рекурсивных функций [1936] и общерекурсивных как всюду определенных ЧРФ.

Класс ПРФ $\mathcal{F}_{\text{пр}}$

- это наименьший класс всюду определенных арифметических функций, содержащий функции константы $C_q^n(x_1, \dots, x_n) = q$, где $n, q = 0, 1, 2, \dots$, функцию следования $S(x) = x + 1$ и функции выбора $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$, где $0 \leq m \leq n$ и замкнутый относительно операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Класс ЧРФ $\mathcal{F}_{\text{чр}}$

- это наименьший класс арифметических (частичных) функций, содержащий функции константы $C_q^n(x_1, \dots, x_n) = q$, где $n, q = 0, 1, 2, \dots$, функцию следования $s(x) = x + 1$ и функции выбора $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$, где $0 \leq m \leq n$, и замкнутый относительно операций суперпозиции S , примитивной рекурсии и минимизации.

Класс ОРФ $\mathcal{F}_{\text{ор}}$

- это класс всех всюду определенных ЧРФ.

Теорема о системе порождающих алгебры $(\mathcal{F}_{\text{чн}}; S, \text{ }^{-1})$

Теорема (Дж. Робинсон, 1950). Любая ЧРФ, и только ЧРФ, может быть получена конечным числом применений операций подстановки и обращения к функциям системы

$$\{s, 0, I_m^n, c, r, \cdot, +\}.$$

При этом, если получаемая функция ОРФ, то операция обращения применяется лишь к таким функциям f , для которых f^{-1} является всюду определенной.

Переход к одноместным рекурсивным функциям

Теорема Джулии Робинсон (и другие соображения) сделала актуальным изучение только одноместных рекурсивных функций с операциями, применимыми к одноместным функциям: сложение $+$, обращение $^{-1}$, итерирования $i_a, a = 0, 1, 2, \dots$. Операция суперпозиции $*$ определена и для n -местных функций.

Джулия Робинсон (8.12.1919-30.07.1985)



Алгебры Дж.

Робинсон [1950]

$$\mathcal{F}_{\text{чр}} = \langle \Phi_{\text{чр}}; +, *, {}^{-1} \rangle$$

$$\mathcal{F}_{\text{ор}} = \langle \Phi_{\text{ор}}; +, *, {}^{-1} \rangle$$

Основной результат

Теорема. Алгебры $\mathcal{F}_{\text{чр}}$ и $\mathcal{F}_{\text{ор}}$ являются конечно порожденными.

[1950] J. Robinson, General recursive functions. Proc.Amer.Math.Soc.,1, pp.703-708

Рафаэль Митчел Робинсон (2.11.1911 – 27.01.1995)

Алгебра Р. Робинсона
[1947, 1955]



Фото 1990 года

$$\mathcal{F}_{\text{пр}} = \langle \Phi_{\text{пр}}; +, *, i_0 \rangle$$

Основной результат

Теорема. Алгебра $\mathcal{F}_{\text{пр}}$ является конечно порожденной.

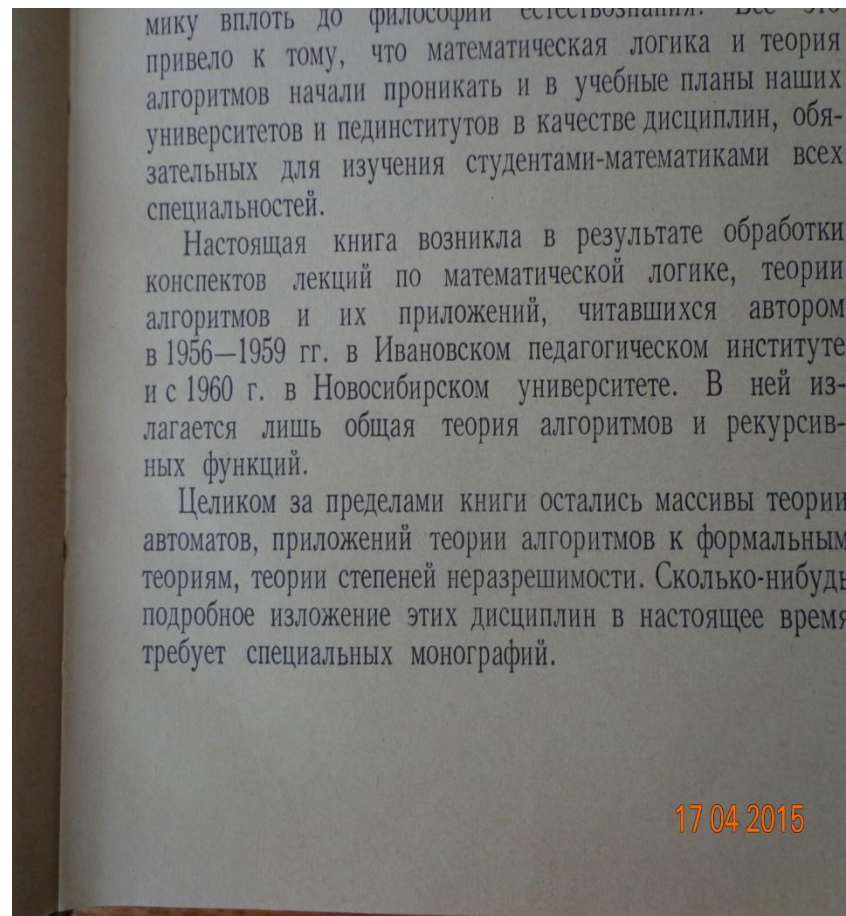
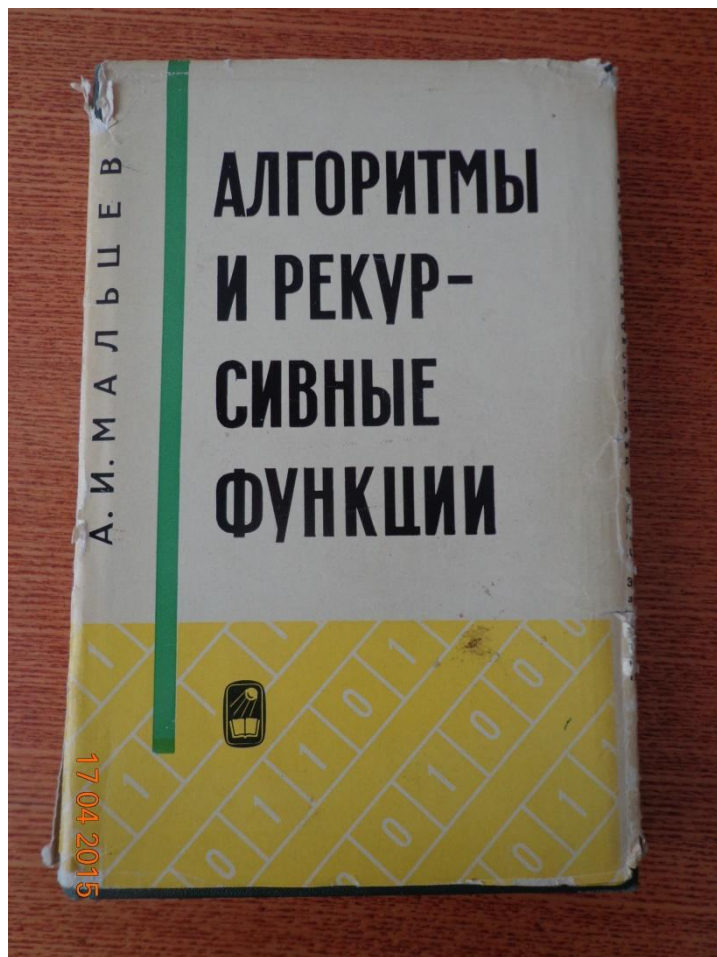
[1947] R.M. Robinson, Primitive recursive functions. Bull.Amer.Math.Soc.,53,№10, pp.925-942

[1955] R.M. Robinson, Primitive recursive functions II. Proc.Amer.Math.Soc.,6,№4, pp.663-666

Монографии

1. Р. Петер, Рекурсивные функции. ИЛ, 1954
2. С. Клини, Введение в метаматематику. ИЛ, 1957.
3. В.А. Успенский, Лекции о вычислимых функций. Физматгиз, 1960
4. А.И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции. «Наука», М., 1965

Монография возникла в результате обработки конспектов лекций А.И. Мальцева



Владимир Андреевич Успенский



Начало систематического изучения алгебр рекурсивных функций



КОНСТРУКТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ. I
УМН, 1961, том 16, выпуск 3(99), 3–60

А. И. М а л ь ц е в

СОДЕРЖАНИЕ

В в е д е н и е	3
§ 1. Алгебраические системы.....	5
1.1. Функции, операции, предикаты...	5
1.2. Порождающие совокупности. Термы	7
1.3. Примитивные и квазипримитивные классы	11
1.4. Определяющие соотношения	13
1.5. Алгебры рекурсивных функций.....	15

§ 2. Нумерованные множества 18

Теорема (А.И. Мальцев, 1961) Алгебры $\mathcal{F}_{\text{пр}}$ и $\mathcal{F}_{\text{чр}}$ не являются конечно определенными.

А.И. Мальцев поставил ряд вопросов и призвал к систематическому изучению данных алгебр рекурсивных функций.

Основные вопросы

1. Конечная порожденность и базисы алгебр рекурсивных функций.
2. Примеры подалгебр и существование максимальных подалгебр.
3. Мощность множества максимальных подалгебр.
4. Изоморфизм некоторых подалгебр.
5. Редукции алгебр.

**Ивановские математики,
вовлеченные в изучение алгебр
рекурсивных функций**

1964 -1972 гг

Профессор Дмитрий Андреевич Захаров – научный руководитель Е.А. Полякова

Январь 1956 г., у общежития ИГПИ (3-й корпус ИвГУ) Д.А. Захаров – первый справа



Дмитрий Алексеевич Захаров

фото 1970 года, НГУ



Д.А. Захаров в 1968 – 1970 годы читал в НГУ спецкурс «Рекурсивные функции», в котором систематически излагал результаты, связанные с алгебрами рекурсивных функций $\mathcal{F}_{\text{пр}}$, $\mathcal{F}_{\text{чр}}$ и $\mathcal{F}_{\text{ор}}$.

Содержание указанного спецкурса представлено в учебном пособии Д.А. Захарова «Рекурсивные функции», изд-во НГУ, 1970 г.

Евгений Александрович Поляков

(2.04.1937 – 17.03.2015)



Защитил кандидатскую
диссертацию «Алгебры
рекурсивных функций»

В 1964 году в
Новосибирском
государственном
университете

Основные публикации

Е.А. Полякова

[1964] Алгебра рекурсивных функций. Алгебра и логика, 3, № 1, 41-56

[1964] О некоторых свойствах алгебры рекурсивных функций. Алгебра и логика, 3, № 3, 39-57

[1966] О некоторых свойствах алгебр рекурсивных функций. Сибирск. матем. журнал, 7, № 3, 720-723

Лавров И.А., Поляков Е.А. [1966] О базисах алгебр рекурсивных функций. Сибирск. матем. журнал, 7, № 5, 1059-1067

[1967] Некоторые свойства алгебры общерекурсивных функций. Кибернетика, 2, 20-23

[1968] Некоторые вопросы теории рекурсивных функций. Алгебра и логика, 7, № 2, 77-84

[1968] Некоторые свойства алгебр рекурсивных функций. ДАН СССР, 178, № 2, 296-298

[1968] О рекурсивных подмножествах множества рекурсивных функций. ДАН СССР, 183, № 6, 1262-1264

Харис Хатипович Насибуллов



В 1964-1967 гг. – аспирант на кафедре алгебры и математической логики ИГПИ, научный руководитель – Е.А. Поляков.

В 1968 году защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые базисы алгебр Дж. Робинсон» в МГПИ им. В.И. Ленина

Основные публикации

Х.Х.Нисибуллова

[1967] Некоторые базисы алгебры Робинсон.
Кибернетика, №2, 24-26

[1968] О базисах в алгебрах частично
рекурсивных функций. Алгебра и логика, 7, № 4,
87-105

[1968] О рекурсивных функциях большого
размаха. ДАН СССР, 178, № 3, 539-541

[1969] О рекурсивных функциях большого
размаха. Сибирск. матем. журнал, 10, № 1, 105-
115

Алексей Иванович Щеглов



В 1969 году
защитил кандидатскую
диссертацию «О
максимальных
подалгебрах алгебры
частично рекурсивных
функций» в
Новосибирском
государственном
университете

Основные публикации

А. И. Щеглова

[1967] Алгебра частично рекурсивных функций. Алгебра и логика, 6 , № 6, 33-48

[1968] О мощности множества максимальных подалгебр алгебры частично рекурсивных функций. Алгебра и логика, 7 , № 3, 119-121

[1969] Об одной алгебре одноместных примитивно рекурсивных функций. Уч. зап. Иван. пед. ин-та, 44, 11-16

[1972] Два замечания об алгебре частично-рекурсивных функций. Уч. зап. Иван. пед. ин-та, 106, 77-82

Игорь Андреевич Лавров (1937–2011)



Основные направления исследований:
элементарные теории,
рекурсивные функции,
сводимости, степени
неразрешимости,
рекурсивно
перечислимые
множества, обобщения
понятия вычислимости и
др.

Публикации И.А. Лаврова по алгебрам рекурсивных функций

[1966] Лавров И.А., Поляков Е.А. О базисах алгебр рекурсивных функций. Сибирск. матем. журнал, 7, № 5, 1059-1067

[1967] Использование арифметических прогрессий k -го порядка для построения базиса алгебры примитивно рекурсивных функций. ДАН СССР, 172

Владимир Васильевич Худяков (1.07.1947-27.03.2012)



В 1971-1974 гг. –
аспирант на кафедре
алгебры и
математической логики
ИГПИ, научный
руководитель – А.И.
Черемисин.

Публикации В.В. Худякова

[1971] О некоторых алгебрах примитивно рекурсивных функций. XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Резюме сообщений и докладов. Кишинев, 1971, 273-274

Михаил Гершевич Розинас

(фото 1982 года)



Публикации М. Г. Розинаса

[1972] Алгебра многоместных примитивно рекурсивных функций. Уч. зап. Иван. пед. ин-та, 117, 95-111

Некоторые результаты ивановских математиков по алгебрам рекурсивных функций

1964 - 1972

ТЕОРЕМЫ О БАЗИСАХ

Теорема (Е.А. Поляков, 1964) Для каждого $n \geq 1$ алгебра

$$\mathcal{F}_{\text{ор}} = \langle \Phi_{\text{ор}}; +, *, \quad {}^{-1} \rangle$$

имеет счетное множество независимых базисов, состоящих из n общерекурсивных функций.

Теорема(А.И. Щеглов, 1967) Для каждого $n \geq 1$ алгебра

$$\mathcal{F}_{\text{чр}} = \langle \Phi_{\text{чр}}; +, *, \quad ^{-1} \rangle$$

имеет счетное множество независимых базисов, состоящих из n частично рекурсивных функций.

Вопрос А.И. Мальцева: *будет ли всякий базис $\mathcal{F}_{\text{чр}}$, состоящий из ОРФ, базисом $\mathcal{F}_{\text{ор}}$?*

Теорема (Х.Х. Насибулов, 1968) Существует базис алгебры $\mathcal{F}_{\text{чр}}$, состоящий из ОРФ, который не является базисом $\mathcal{F}_{\text{ор}}$.

Вопрос А.И. Мальцева: если f – произвольная функция большого размаха, то будет ли пара функций $\{f, s\}$ базисом алгебры $\mathcal{F}_{\text{ор}}(\mathcal{F}_{\text{чр}})$?

Теорема (Е.А. Поляков, 1967) Существует ОРФ f большого размаха такая, что пары $\{f, s\}$ не образует базис алгебры $\mathcal{F}_{\text{ор}}$.

ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБР РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Вопрос А.И. Мальцева: существуют ли континуальные семейства максимальных подалгебр алгебр рекурсивных функций?

Теорема (А.И. Щеглов, 1967) Алгебра $\mathcal{F}_{\text{чр}}$ имеет континуальное семейство максимальных подалгебр.

Теорема (А.И. Щеглов, 1967) Подалгебра Фраттини (пересечение всех максимальных подалгебр) алгебры $\mathcal{F}_{\text{чр}}$ бесконечна.

Е.А. Поляков в статьях 1967 и 1968 годов построил счетные семейства максимальных подалгебр алгебры $\mathcal{F}_{\text{ор}}$.

Полный ответ на вопрос А.И. Мальцева дал С.С. Марченков в 1978 году в статье «Об одном методе построения максимальных подалгебр в алгебрах общерекурсивных функций», Алгебра и логика, 17, № 5, 581-595

Теорема (Б.Я. Солон, В.В. Худяков, 1971)

Пусть $\mathcal{F}_{\text{пр}}^a = \langle \Phi_{\text{пр}}; +, *, i_a \rangle$ - обобщенная алгебра Робинсона ($\mathcal{F}_{\text{пр}}^0$ - алгебра Р. Робинсона). Для каждого $a \geq 0$ алгебра $\mathcal{F}_{\text{пр}}^a$ имеет континуум максимальных подалгебр.

В 1968 году В.В. Козьминых в статье «Об одноместных примитивно рекурсивных функциях», Алгебра и логика, 7, № 1, 75-90 доказал, что алгебра Р. Робинсона имеет континуум максимальных подалгебр.

РЕДУКЦИИ АЛГЕБР РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Алгебры Дж. Робинсон

$\mathcal{F}_{\text{чр}} = \langle \Phi_{\text{чр}}; +, *, \quad {}^{-1} \rangle$ и $\mathcal{F}_{\text{ор}} = \langle \Phi_{\text{ор}}; +, *, \quad {}^{-1} \rangle$
являются конечно порожденными.

Цель – выяснить как влияет
на свойство конечной порожденности этих
алгебр каждая из операций $+, *, \quad {}^{-1}$.

Редукции алгебр Дж. Робинсон

$$\begin{array}{cc} \langle \Phi_{op}; *, &^{-1} \rangle & \langle \Phi_{cp}; *, &^{-1} \rangle \\ \langle \Phi_{op}; +, &^{-1} \rangle & \langle \Phi_{cp}; +, &^{-1} \rangle \\ \langle \Phi_{op}; +, * \rangle & & \langle \Phi_{cp}; +, * \rangle \\ & & \langle \Phi_{cp}; * \rangle \end{array}$$

Теорема (Дж. Робинсон, 1950). Алгебры $\langle \Phi_{\text{ор}}; *, \quad {}^{-1} \rangle$ и $\langle \Phi_{\text{чр}}; *, \quad {}^{-1} \rangle$ являются 2-порожденными.

Теорема (Х.Х. Насибуллов, 1968) Для всякой инъективной ОРФ f такой, что ρf рекурсивно и $\omega \setminus \rho f$ бесконечно существует ЧРФ h , с которой f образует базис алгебры $\langle \Phi_{\text{чр}}; * \rangle$.

Теорема (Е.А. Поляков, 1964) Алгебра $\langle \Phi_{\text{ор}}; +, * \rangle$ не является конечно порожденной.

Обзор результатов

Валерий Анатольевич Соколов

(г. Ярославль)

[1967] Об изоморфизмах максимальных подалгебр алгебры Р.Робинсона. Алгебра и логика, 6, № 3, 91- 99

[1972] Некоторые свойства алгебры всех частично рекурсивных функций. Сб. Математические исследования, Кишинев, Штиинца, т. 7, в.1, 133-149

[1975] Об одной задаче в классе вычислимых функций с операцией суперпозиции. Вестн. Ярос. ун-та, 9, 111-114

Димитър Г. Скордев

(г. София)

[1963] Изчислими и μ -рекурсивни оператори.
Изв. Мат. ин-та Бълг. АН, 7, 5-43 (болг.)

[1966] Об одном классе примитивно
рекурсивных функций. Годишник Унив.
Софии, Фак. Матем., Инф., 1965-1966 (1967),
60, 105-111

[1970] Некоторые простые примеры
универсальных функций. ДАН СССР, 190, № 1,
45-46

В.В. Козьминых

[1968] Об одноместных примитивно рекурсивных функциях. Алгебра и логика, 7, № 1, 75-90

[1970] О подалгебрах алгебры Р.Робинсон. Алгебра и логика, 9, № 6, 672-690

[1972] О представлении частично рекурсивных функций в виде суперпозиций. Алгебра и логика, 11, № 3, 270-294

[1974] О представлении частично рекурсивных функций с некоторым условием в виде суперпозиций. Алгебра и логика, 13, № 4, 420-424

Марченков Сергей Серафимович

(г. Москва, МГУ)

[1978] Об одном методе построения максимальных подалгебр в алгебрах общерекурсивных функций. Алгебра и логика, 17, № 5, 581-595

[1980] **Существование базисов по суперпозиции в счетных примитивно рекурсивных замкнутых классах одноместных функций.** Мат. заметки, 27

[1990] О **существовании бесконечных базисов по суперпозиции** в некоторых классах одноместных функций. Мат. заметки, 47, № 4, 55-62

[1991] Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций. Матем. вопросы кибернетики, в.3, 115-139

С Днём Науки!



OazisDlyaVas.ucoz.ru