

Краткая история Великой теоремы Ферма от ее возникновения до ее счастливого завершения

В середине XVIII века великий французский математик Пьер Ферма¹ заинтересовался поиском четверок положительных целых чисел a, b, c, n , для которых выполняется равенство $a^n + b^n = c^n$. Скорее всего этот интерес возник при чтении книги «Арифметика» древнегреческого математика Диофанта², изданной в 1621 г. в Париже на двух языках – греческом и латинском. Кстати, Ферма был по образованию юристом, и его служебные обязанности состояли в заведовании отделом петиций Тулузского парламента. Можно сказать, что занятия математикой, а заодно и оптикой, для него были не более чем хобби. Тем не менее, именно внеслужебные увлечения принесли Ферма мировую известность.

При $n = 2$ можно указать бесконечное множество троек чисел a, b, c , для которых выполнено равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Все такие числа образуют так называемые *пифагоровы тройки*: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17); (7, 24, 25) и т.д. С давних времен известен способ, позволяющий получить все пифагоровы тройки. Заметим, что любая пифагорова тройка a, b, c порождает бесконечное семейство пифагоровых троек ka, kb, kc для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ (докажите!).

Можно ли привести примеры таких положительных целых чисел a, b, c , чтобы равенство $a^n + b^n = c^n$ выполнялось для $n = 3$, или для $n = 4$, или для $n = 5$ и т.д.? Другими словами, существуют ли четверки положительных целых чисел a, b, c, n при $n > 2$, для которых выполнено равенство $a^n + b^n = c^n$?

Пьер Ферма пришел к убеждению, что таких четверок не существует. Теорему о несуществовании четверок положительных целых чисел a, b, c, n при $n > 2$, для которых выполнено равенство $a^n + b^n = c^n$, принято называть *Великой теоремой Ферма*.

Итак, Великая теорема Ферма утверждает, что

Для любого целого положительного $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет положительных целых решений a, b, c .

До момента ее полного доказательства Великую теорему Ферма следовало бы называть *гипотезой Ферма*, поскольку автор утверждения не оставил его доказательства, и доказательства не было еще более 350 лет. Теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 на полях «Арифметики» Диофанта. Дело в том, что Ферма на полях читаемых математических трактатов делал свои пометки и тут же формулировал пришедшие на ум задачи и теоремы. Теорему, о которой идет речь, он записал с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его можно было поместить на полях книги.

¹ Пьер Ферма (Pierre Fermat) [17.08.1601, Бомон-де-Ломань, - 12.01.1665, Кастр] – французский математик. Автор ряда выдающихся работ, оказавших большое влияние на дальнейшее развитие математики. При жизни Ферма полученные им результаты становились известны ученым благодаря переписке и личному общению. Большинство его работ было издано после смерти его сыном под названием «Разные математические сочинения» в Тулузе в 1679 г.

² Диофант (Διόφαντος) [вероятно, 3 в.] – древнегреческий математик из Александрии. В его математических трактатах дается решение задач, приводящихся к неопределенным уравнениям, решения которых ищутся в множестве неотрицательных рациональных чисел. Позже такие уравнения стали называться *диофантовыми*. Сочинения Диофанта послужили отправной точкой для исследований П. Ферма, Л. Эйлера, К. Гаусса и др.

Вот как он сформулировал свою теорему: «Невозможно куб разложить на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем».

В бумагах Ферма было найдено доказательство частного случая Великой теоремы для показателя $n = 4$. Это доказательство добавляет сомнение в том, что у него было доказательство общего случая, о котором он написал на полях книги.

Формулировка теоремы стала известна широкой математической общественности только в 1670 году, когда старший сын Ферма переиздал в Тулузе Диофантову «Арифметику», включив в издание и 48 примечаний, сделанных его отцом на полях. Простота формулировки, заявление о существовании поистине удивительного доказательства – сразу привлекли внимание к гипотезе Ферма многих и многих математиков – профессионалов и любителей. Однако многочисленные попытки доказать сразу общий случай были тщетны.

Лишь спустя 100 лет, в 1770 году великий математик Эйлер³ доказал частный случай Великой теоремы для показателя $n = 3$. Через 55 лет в 1825 году немецкий математик Дирихле⁴ и французский математик Лежандр⁵ доказали частный случай Великой теоремы для показателя $n = 5$, а затем Ламе⁶ в 1839 году – для показателя доказал частный случай Великой теоремы для показателя $n = 7$. Немецкий математик Куммер⁷ начал заниматься проблемой Ферма в 1837 году и в 1844 году доказал, что теорема верна для всех простых $n < 100$, за возможным исключением $n = 37, 59, 67$.

Над полным доказательством Великой теоремы работало немало выдающихся математиков и множество дилетантов-любителей; считается, что теорема стоит на первом месте по количеству некорректных «доказательств». Тем не менее, важность гипотезы Ферма отметил Давид Гильберт в своем знаменитом докладе «Математические проблемы» на II Международном конгрессе математиков (1900 г.) следующими словами: «Великая теорема Ферма являет разительный пример того, какое побуждающее влияние науке может оказать специальная и на первый взгляд малозначительная проблема».

Многочисленные неудачные попытки решить положительно гипотезу Ферма в общем виде вызвали определенный пессимизм в среде математиков – профессионалов. Предпринимались даже попытки опровергнуть эту гипотезу, но также безуспешные. Заниматься этой проблемой среди профессионалов сделалось дурным тоном, и если кто из них всерьез доказывал или опровергал гипотезу Ферма, то делал это в тайне.

Проблема Ферма вдруг стала популярной среди дилетантов и просто душевно неустойчивых людей. Всех, кто предлагал то или иное решение (и всегда ошибочное) проблемы Ферма стали называть *ферматистами*. Все началось с того, что немецкий любитель математики и ферматист Пауль Вольфскель в 1905 году завещал 100 000 немецких марок научному обществу в Геттингене для награждения того, кто первым докажет Великую теорему Ферма. Пауль Вольфскель умер в 1906 году, а 13 сентября 1908 году Королевское научное общество в Геттингене обнародовало условия конкурса из 9 пунктов. В частности, пункт 5 гласил, что премия присуждается не ранее чем через два года после

³ Леонард Эйлер (Leonhard Euler) [04.04.1707, Базель – 07(18).09.1783, Петербург] – математик, механик и физик. В Петербурге жил с 1727 г. по 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни. Изучил русский язык, был членом Петербургской и Берлинской АН. По выражению Лапласа, Эйлер явился общим учителем математиков 2-й половины 18 века.

⁴ Петер Густав Дирихле (Peter Gustav Dirichlet) [13.02.1805, Дюрен – 05.05.1859, Геттинген] – немецкий математик. Основные труды по теории чисел и математическому анализу.

⁵ Адриент Мари Лежандр (Adrien Marie Legendre) [18.09.1752, Париж – 10.01.1833, Париж] – французский математик. Основные труды в теории чисел, математическом анализе и вариационном исчислении.

⁶ Габриэль Ламе (Gabriel Lamé) [22.07.1795, Тур – 01.05.1870, Париж] – французский математик и инженер. В 1820-32 работал в России. Основные труды по математической физике и теории упругости.

⁷ Эрнст Эдуард Куммер (Ernst Eduard Kummer) [29.01.1810, Зорпау – 14.05.1893, Берлин] – немецкий математик. Основные труды по математическому анализу, алгебре и теории чисел.

опубликования правильного решения, а пункт 9 ограничивал прием заявок на премию 13 сентября 2007 года.

Среди многочисленных ферматистов неожиданно оказался известный математик Фердинанд Линдеман⁸. Говорят, что по настоянию жены, которая соблазнилась возможностью получить премию Вольфскеля, в 1908 году Линдеман опубликовал 66-страничную работу, посвященную решению проблемы Ферма. Его доказательство содержало фатальную ошибку, которая могла возникнуть только в результате гонки за премией.

Интерес к проблеме Ферма возник вновь в 1980-х годах, когда немецкий математик Фалтингс⁹ доказал, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ при $n > 3$ может иметь лишь конечное число взаимно простых¹⁰ решений. Последний, но самый важный шаг в доказательстве теоремы Ферма сделал английский математик Эндрю Уайлс¹¹.

Эндрю Уайлс заинтересовался проблемой Ферма, когда он был школьником в возрасте 10 лет. В книге Саймона Сингха¹² «Великая теорема Ферма» приводится рассказ Эндрю о тех эмоциях, которые он испытал при первом знакомстве с проблемой Ферма: «Она выглядела такой простой, и все же великие умы в истории математики не смогли доказать ее. Передо мной была проблема, понятная мне, десятилетнему мальчику, и я почувствовал, что с того самого момента никогда не смогу от нее отступить. Я должен был решить ее».

Заниматься всерьез проблемой Ферма Уайлс начал в 1986 году. В это время он уже работал в Принстонском университете, и, зная отношение окружающих к ферматистам, делал это в тайне от всех. Напряженная работа над проблемой продолжалась семь лет. Он использовал новейшие методы и теоремы, которые могли бы привести к желанному результату. В январе 1993 года Уайлсу показалось, что он доказал теорему Ферма. Он поделился полученным доказательством с коллегой по Принстонскому университету Ником Катцем¹³. Спустя три месяца Уайлс изложил основные идеи доказательства в трех лекциях, которые состоялись в Кембриджском университете 21, 22 и 23 июня 1993 года. Математический мир был восхищен успехом Уайлса, и все с нетерпением ждали публикации текста доказательства. Комиссия в Геттингене была оповещена о возможном лауреате ее премии.

Однако публикация затягивалась. Как оказалось Уайлс направил 200-страничное доказательство в журнал «*Inventiones Mathematicae*», где работу отдали на проверку сразу шести рецензентам. Одним из рецензентов был Ник Катц – он и обнаружил пробел в доказательстве. Это скрывалось до тех пор, пока 4 декабря 1993 года Уайлс не признал о возникших пробелах в доказательстве. Это еще не было очередным поражением в решении проблемы Ферма, но в тот момент никто не был, включая Уайлса, уверен в обратном.

В январе 1994 года Уайлс пригласил для совместной работы своего ученика Ричарда Тэйлора¹⁴. В результате совместной работы, как пишет сам Уайлс, 19 сентября 1994 года он понял, что наконец теорема Ферма окончательно доказана. В мае 1995 года в журнале «*Annals of Mathematics*» были опубликованы две статьи общим объемом в 130 стра-

⁸ Карл Луис Фердинанд Линдеман (Carl Louis Ferdinand Lindemann) [12.04.1852, Ганновер – 01.05.1939, Мюнхен] – немецкий математик. Основные труды по теории чисел, доказал в 1882 году трансцендентность числа π и тем самым неразрешимость задачи квадратуры круга.

⁹ Герд Фалтингс (Gerd Faltings) [р.28.07.1954, Гельзенкирхен] – немецкий математик. С 1985 г. работает в Принстонском ун-те. Золотая медаль и премия Дж.Филдса (1986).

¹⁰ Два натуральных числа a и b называются *взаимно простыми*, если их единственный общий делитель равен 1.

¹¹ Эндрю Уайлс (Andrew John Wiles) [р.11.04.1953, Кембридж] – английский математик, работает в Принстонском ун-те. Награжден призом Ферма (Prix Fermat) (1995)

¹² Singh S., Fermat's Last Theorem. <http://ega-math.narod.ru/Singh/FLT.htm>

¹³ Ник Катц (Nicholas Michael Katz) [р.07.12.1943, Балтимор] – американский математик, работает в Принстонском университете. Труды в области алгебраической геометрии и теории чисел.

¹⁴ Ричард Тэйлор (Richard Lawrence Taylor) [р.19.04.1962, Кембридж] – английский математик, ученик и соавтор Эндрю Уайлса. В настоящее время работает в Гарвардском ун-те.

ниц. Первой шла статья Уайлса «Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem», поступившая в редакцию 14 октября 1994 года, второй – совместная статья Уайлса и Тэйлора «Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras», поступившая в редакцию 7 октября 1994 года. В совокупности они давали доказательство гипотезы Таниямы-Симуры-Вейля, из которого следует доказательство Великой теоремы Ферма.

Так счастливо завершилась 357-летняя история Великой теоремы Ферма. 27 октября 1995 года Уайлс был награжден призом Ферма в Тулузе, посетил городок Бомон-де-Ломань, где родился Ферма, и его могилу, на надгробии которой высечена в виде формулы великая теорема Ферма. Так как условия конкурса на премию Вольфскеля были выполнены Уайлсом полностью, то он через два года после публикации – 27 июня 1997 года получил награду. К этому времени Королевское научное общество было переименовано в Геттингенскую академию наук, а премия составила 75000 немецких марок.

solon@isuct.ru

Борис Яковлевич Солон