

“Не Бог ли написал эти знаки,
которые успокоили тревогу моей души
и раскрыли мне тайну природы?”

(Иоганн Гете “Фауст”)

Самый главный вопрос, который может задать любой думающий человек – от наивного ребенка до мудрого старца: «Почему математика – абстрактная и таинственная для непосвященных наука описывает реальный мир?» Этот вопрос задавали еще во времена античности. Пифагор, восхитившись гармонией чисел, считал, что миром правят числа. Он утверждал, что законы природы (или Бога) математичны. В частности, в созданной им теории подобия, он доказал, что отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная¹. Это верно для ЛЮБОЙ окружности! Пифагор открыл принцип, согласно которому устроен мир. И если Бог создавал мир, то Пифагору удалось рассуждать подобно Богу, и эти рассуждения оказались математическими. Пифагор, а вслед за ним и Платон, сделал еще один гениальный вывод – мир един, ибо он имеет единое начало – источник всего сущего, великую изначальную силу, рождающую Вселенную. Этот вывод опирался только на открытой им гармонии чисел. Но и современный взгляд на окружающий мир таков же. Более того, развитие математики привело к объединению различных математических дисциплин в единую науку, а современная теория множеств и топология позволяют построить фундамент математики, используя в качестве первичного понятия только *пустое множество*. Мысли Пифагора и его последователей были облечены Лейбницем² в чеканную формулу: «CUM DEUS CALCULAT, FIT MUNDUS», в переводе с латинского она звучит так: «Как Бог вычисляет, так мир делает». Известно также еще одно высказывание Лейбница: «Геометрия есть сам Бог... и служит его прообразом при сотворении мира».

Именно такие формулировки возродили в XVII веке пифагорейско-платоновскую традицию, состоящую в возможно описать физическую реальность на математическом языке. Получив развитие в учениях средневековых схоластов, считавших, что Бог сотворил мир рационально, на математической основе, эта традиция открыла путь к изучению природы как к поиску математических законов и структур, раскрывающих сущность явлений и замыслы Творца. Ньютона³ настолько поразило то, что фундаментальные физические законы просто описываются в чисто геометрических терминах, что он счел этот таинственный и непознаваемый факт доказательством существования Бога. Сама концепция математичности природы получила философское обоснование в трудах Декарта⁴.

Очередное возрождение пифагорейско-платоновско-декартовой традиции произошло в начале XX века, когда математика получила мощные импульсы для своего развития извне для описания новейших открытий в области физики, биологии и экономики, а также изнутри для разрешения возникших в ней противоречий и парадоксов. Удивительным образом обна-

¹ В настоящее время это отношение обозначается греческой буквой π (пи). Нужды практических расчетов, относящихся к окружности, заставили уже в глубокой древности искать для π приближенные значения. Известно, что 4 тысячи лет назад в Древнем Египте для вычисления площади круга брали $\pi \approx 3$. Лишь сравнительно недавно было доказано, что π является трансцендентным числом, т.е. оно не может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Значение π можно найти с любой точностью в виде десятичной дроби: $\pi = 3,141592653589793238462643...$

² Лейбниц Готфрид Вильгельм (1.07.1646, Лейпциг, – 14.11.1716, Ганновер) – немецкий математик, философ, физик, историк. В математике – создатель (наряду с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления.

³ Ньютон Исаак (4.01.1643, Вулсторп, ок. Грантема, – 31.03.1727, Кенсингтон) – английский физик и математик, открывший закон всемирного тяготения и разработавший (наряду с Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление.

⁴ Декарт Рене (31.03.1596, Лаэ (Турень), – 11.02.1650, Стокгольм) – французский философ и математик. В математике – создатель аналитической геометрии.

руженные с помощью наблюдений и экспериментов явления, регулярности природы и общества облекались в “элегантные математические одежды” и приобретали форму математических структур и теорий. Последние либо строились под открытые явления, либо были уже созданы “чистыми” математиками, исходя из внутренних потребностей математики. Можно сказать, что такие математические теории выглядят для непосвященных как “игры разума”. Последующее использование этих теорий позволяло правильно и эффективно предсказывать развитие явлений, и это давало мощный метод теоретического познания природы и общества. Гильберт⁵ уже в 1900 году говорит о своего рода “предустановленной гармонии” между законами природы и математическими структурами. Он говорил: “Еще большее впечатление производит явление, которое, заимствуя терминологию у Лейбница, мы называем предустановленной гармонией. Она является прямым воплощением и реализацией математических идей...”. Феномен “предустановленной гармонии” и непостижимой эффективности математики в познании природы был сроднен по слова Эйнштейна “космическому религиозному чувству”. Лауэ⁶ говорил: “Научное переживание истины есть в каком-то смысле видение Бога”.

В 1933 году Эйнштейн⁷ писал: “Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы”. Так “космическое религиозное чувство” Эйнштейна соединилось с “предустановленной гармонией” Лейбница-Гильберта и пифагорейско-платоновской божественной математичностью мира. Это позволило Вигнеру⁸ сформулировать фундаментальный эпистемологический закон о непостижимой эффективности математики.

Говоря о “космической религии”, можно предполагать существование Бога и считать, что природа и общество созданы Всевышним и развиваются по Его законам. В этом случае мы вправе сказать, что Бог является математиком недостижимо высокого ранга. В то же время можно быть адептом “космической религии” и отрицать существование Бога. В качестве примера можно привести ответ Лапласа⁹ на упрек Наполеона I о материалистичности его философских взглядов: “В своей теории о происхождении Солнечной системы я не нуждаюсь в гипотезе о существовании Бога”.

Теперь хотелось бы посмотреть на обратную сторону медали – о математике изнутри. Насколько совершенна математика, насколько она соответствует своему высокому значению – быть языком, на котором Бог описал картину мира? Математика как наука имеет не только внешние стимулы для развития, но и внутренние. В основном эти внутренние стимулы связаны с решением проблем, а также с преодолением парадоксов и несовершенства, которые возникают в процессе ее развития. Приписывая математике божественную силу и испытывая восхищение гармонией чисел, Пифагор, к своему разочарованию, открыл одно из “несовершенств” математики. Два отрезка называются *соизмеримыми*, если существует третий отрезок, который целое число раз укладывается в первых двух. Оказалось, что существуют *несоизмеримые* отрезки. Такими отрезками являются, например, диагональ и сторона любого квадрата. Пифагор настолько был удручен таким результатом, что, говорят, скрыл его от своих учеников и последователей. Современная математика это несовершенство преодолела в результате развития понятия числа в рамках математического анализа и алгебры.

⁵ Гильберт Давид (23.01.1862, Велау, близ Кенигсберга – 14.02.1943, Геттинген) – немецкий математик. Для творчества гильберта характерна уверенность в неограниченной силе человеческого разума. Известна его крылатая фраза: “Мы должны знать – мы будем знать”.

⁶ Лауэ Макс фон (1879 – 1960) – немецкий физик, Нобелевский лауреат 1914 г.

⁷ Эйнштейн Альберт (14.03.1879, Ульм – 18.04.1955, Принстон) – немецкий физик-теоретик, один из основателей современной физики, Нобелевский лауреат 1921 г.

⁸ Вигнер Юджин Пол (17.11.1902, Будапешт – 01.01.1995, Принстон) – американский физик-теоретик, Нобелевский лауреат 1963 г. Современники называли его *тихим гением*.

⁹ Лаплас Пьер Симон (23.03.1749, Нормандия – 5.03.1827, Париж) – французский астроном, математик и физик. Ему принадлежат фундаментальные результаты в теории дифференциальных уравнений и в алгебре.

В средние века появился ряд труднорешаемых математических задач, которые принято называть проблемами. Некоторые из них не решены до сих пор. Всем известна проблема Ферма¹⁰. Она была сформулирована самим Ферма примерно в 1630 году на полях книги Диофанта «Арифметика» следующим образом: “невозможно разложить ни куб числа на сумму двух кубов, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем”. И далее добавил: “Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы”. Многие частные случаи этой проблемы были решены положительно, но общее доказательство этой проблемы, несмотря на усилия многих математиков (как профессионалов, так и любителей), долгое время достоверно не было получено. Однако все-таки был сделан последний, но самый важный шаг в доказательстве теоремы Ферма. Он принадлежит английскому математику Эндрю Уайлсу.

Эндрю Уайлс заинтересовался проблемой Ферма, когда он был школьником в возрасте 10 лет. В книге Саймона Сингха «Великая теорема Ферма» приводится рассказ Эндрю о тех эмоциях, которые он испытал при первом знакомстве с проблемой Ферма: «Она выглядела такой простой, и все же великие умы в истории математики не смогли доказать ее. Передо мной была проблема, понятная мне, десятилетнему мальчику, и я почувствовал, что с того самого момента никогда не смогу от нее отступить. Я должен был решить ее».

Заниматься всерьез проблемой Ферма Уайлс начал в 1986 году. В январе 1993 года Уайлсу показалось, что он доказал теорему Ферма. В январе 1994 года Уайлс пригласил для совместной работы своего ученика Ричарда Тэйлора. В результате совместной работы, как пишет сам Уайлс, 19 сентября 1994 года он понял, что наконец теорема Ферма окончательно доказана.

Оптимист Гильберт был убежден, что любая математическая проблема, рожденная в умах сколь угодно гениальных математиков, рано или поздно получит определенное решение. Однако, примеры многих нерешенных проблем порождают и пессимистическую точку зрения.

Насколько сложно устроен мир, настолько же сложна математика. Математика едина, так как ее различные теории и направления имеют один общий фундамент. В начале XX века выяснилось, что в этом фундаменте имеются значительные дефекты. Прежде всего, они проявились в рамках теории множеств, созданной немецким математиком Кантором¹¹. В 1902 году независимо Б. Расселом и Э. Цермело в рамках “наивной” теории множеств Кантора был открыт парадокс¹², который получил название *антиномии Рассела*. Он связан с необычными способами образования понятий. Мы сформулируем этот парадокс несколько в “вульгарной” форме, однако она будет намного понятнее читателю, чем ее теоретическомножественная формулировка.

Примем в качестве постулата следующее утверждение: *Бог, как Создатель, всемогущ*. Попробуем выяснить, что верно: Бог может создать камень, который Он не сможет сдвинуть с места, или Бог не может создать камень, который Он не может сдвинуть с места. Первое суждение означает, что Бог не всемогущ, так как существует действие (сдвиг с места камня), которое Он не может выполнить. Таким образом, мы приходим к противоречию с постулатом. Второе суждение также противоречит постулату, так как он не может что-то (камень) создать. Итак, в рамках нашей теории, в которой один из постулатов утверждает всемогущество Бога, мы имеем суждение, истинность или ложность которого приводит к противоречию. Это и есть антиномия. Теория, обладающая антиномиями, не может быть классической математической теорией, так в ней должен выполняться логический закон исключенного третьего.

¹⁰ Ферма Пьер (17.08.1601 – 12.01.1665) – французский математик, автор ряда выдающихся работ, большинство из которых было издано после смерти его сыном под названием «Разные математические сочинения».

¹¹ Кантор Георг (19.02.1845, Петербург – 6.01.1918, Галле) – немецкий математик, разработал теорию бесконечных множеств.

¹² Антиномия (буквально с греческого – противоречие в законе), парадокс – ситуация, когда в теории доказаны два взаимно исключающих друг друга суждения, причем каждое из них выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами.

Антиномия Рассела произвела очень сильное впечатление на современников именно потому, что она возникла на самой начальной стадии изучения теории множеств и поколебала основы всей математики. Пришлось согласиться с тем, что интуитивно прозрачные, простые свойства (такое, например, как свойство *быть всемогущим*) следует считать не точно описанными (в математическом смысле), и они способны привести к парадоксам. Есть ли надежные области математики, свободные от парадоксов? Какие свойства, широко употребляемые в математике, также ведут к парадоксам и должны быть забракованы?

В 1922 году Гильберт предложил программу обоснования всей математики путем ее полной формализации с последующим «метаматематическим» доказательством непротиворечивости формализованной математики. Однако этот замысел оказался невозможным из-за удивительного открытия, которое сделал Гедель¹³ в 1931 году. Он доказал так называемую теорему о неполноте, которая утверждает, что всякая, достаточно содержательная формализованная теория неполна, т.е. содержит утверждение, которое в рамках этой теории нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Этот результат представляет собой метатеорему, которая показала неосуществимость программы Гильберта, что означает, в частности, что любая, сколь угодно богатая формализованная теория не способна описать природу (или, если угодно, замысел Божий).

В заключение приведем еще один математический результат, интерпретация которого относительно реальной Вселенной еще не завершена до настоящего времени. На развитие математики в XX веке огромное влияние оказал доклад Гильберта, прочитанный им 8 августа 1900 года на II Международном конгрессе математиков в Париже. Среди 23 проблем математики, сформулированных Гильбертом в этом докладе, под номером 10 значилась задача о разрешимости диофантова уравнения¹⁴. Лишь в 1970 году она была полностью решена советским математиком Матиясевичем. Это решение состояло в построении такого диофантова уравнения, множество решений которого *невычислимо*, т.е. для которого не существует алгоритма, который определял бы для любого натурального числа, является ли оно решением этого диофантова уравнения или не является. Заметим, что уже в 30-е годы XX века понятие алгоритма было уточнено в рамках формализованных теорий в работах Тьюринга¹⁵, Черча¹⁶, Поста¹⁷ и др.

Итак, в математике существуют невычислимые объекты, а имеются ли невычислимые объекты в реальной Вселенной? До появления *Principia* Ньютона невычислимость в природе рядовому ученому могла казаться, весьма вероятно, как «деятельность на расстоянии». После появления механики Ньютона и принципа механического детерминизма Лапласа, на чисто интуитивном уровне, стала преобладать модель детерминированного, даже, механистического Универсума. Эта модель живет и в современной науке, сохраняясь, по крайней мере, в глубинах памяти ученых. Однако, часть правды состоит в том, что существуют сложные технические препятствия, чтобы даже сформулировать подходящие понятия и вопросы, касающиеся вычислимости в реальном мире. При этом, несмотря на развитие математической теории вычислимости инициированное Геделем, Тьюрингом, Черчем и Клини в 1930-е годы, все еще осталась неуверенность, как ее приложить к реальному миру. Как можно убедиться (или наоборот) в невычислимости в природе? И если невычислимость в природе существует, то в чем состоял таинственный замысел Всевышнего, предусмотревшего ее открытие в математике?

Б.Я. Солон

¹³ Гедель Курт (28.04.1906, Брно – 14.01.1978, Принстон) – австрийский логик и математик, автор ряда революционных результатов в математической логике и теории множеств.

¹⁴ Диофантовым (по имени Диофанта (3 век) – древнегреческого математика из Александрии) называется алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые решения.

¹⁵ Тьюринг Алан Матисон (23.06.1912, Лондон – 7.06.1954, Манчестер) – английский математик, ввел понятие абстрактной вычислительной машины Тьюринга.

¹⁶ Черч Алонзо (14.06.1903, Вашингтон – 11.07.1995, Хадсон) – американский логик и математик.

¹⁷ Пост Эмиль Леон (11.02.1897 – 21.04.1954, Нью-Йорк) – американский математик и логик.