ЧИСЛО e

Рассмотрим числовую последовательность с общим членом $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где $n = 1,2,3,\ldots$. Выпишем несколько первых членов этой последовательности: $u_1 = 2$, $u_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$, $u_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}370$, $u_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}44140625$, $u_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} = 2{,}48832$ и т.д. Можно доказать, что $u_n < n_{n+1}$ и $u_n < 3$ для всех $n = 1,2,3,\ldots$. В этом случае, как известно из математического анализа, последовательность $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится, т.е. существует ее *предел*. Этот предел по предложению великого математика XVIII века Леонарда Эйлера обозначают малой латинской буквой e. Эйлеру принадлежит много открытий, связанных с числом e, поэтому число e в конце концов стали называть «числом Эйлера»*.

Число e является *трансцендентным*, т.е. его нельзя получить в виде корня алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Этот факт был доказан значительно позже открытия самого числа e. Только в 1873 году французский математик Шарль Эрмит доказал трансцендентность числа e. Таким образом, число e нельзя не только представить в виде десятичной дроби, для чередования десятичных знаков которой известен какой-либо закон, но и выразить с помощью алгебраического выражения, содержащего конечное число радикалов из целых чисел.

Л. Эйлер открыл цепную дробь для представления числа e:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\cdots}}}}}$$

Если разложить по степеням n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то получаем хорошо известный числовой ряд, сумма которого равна числу e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Первые двадцать знаков числа e после запятой выглядят так:

$$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$$

Для получения все более точных значений числа e, выраженных обыкновенной дробью, можно обрывать цепную дробь, представляющую число e, на достаточно больших ее элементах. Например, дробь $\frac{2721}{1001}$ дает значение числа e с шестью верными десятичными знаками, дробь $\frac{878}{323}$ дает значение числа e с тремя верными десятичными знаками, а дробь $\frac{87}{32}$ - с двумя.

* Латинское написание его фамилии (Euler Leonard) начинается с буквы e. Эйлер родился в 1707 году в Швейцарии, но большую часть жизни прожил в России (1727 – 41 гг. и с 1766 г. до конца жизни в 1783 г.).

Несмотря на достаточную «искусственность»* определения числа e и кажущуюся его абстрактность и «бессмысленность», оно появляется естественным образом в самых разнообразных ситуациях при решении вполне практических задач.

Задача о росте вклада. Предположим, что банк предлагает вкладчику так называемый сложный процент, который состоит в том, что после каждого начисления процентов капитал увеличивается и в следующий раз процент начисляется от суммы, полученной после увеличения капитала. Обозначим начальный капитал через 1 у.е. Если ежегодный сложный процент равен $a\%$, то через n лет капитал будет составлять $b(n)=\left(1+\frac{a}{100}\right)^n$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} b(n)=\infty$, т.е. если бы банк не изменял своих условий на протяжении многих лет, то, например, один рубль дал бы через 1000 лет капитал $b(1000)=\left(1+\frac{a}{100}\right)^{1000}$ рублей. Если взять скромно $a\%=1\%$, то $b(1000)=1{,}01^{1000}\approx 25000$ рублей, а $b(2000)=1{,}01^{2000}\approx 700\,000\,000$ рублей!

Однако так долго банки не существуют, поэтому в рекламных проспектах некоторых банков предлагают начислять годовой процент (в размере $a\%$) не один раз в год, несколько раз в год в виде сложного процента $\frac{a}{m}\%$, где m – число таких начислений в год. Непосвященному может показаться, что при достаточно большом m (например, при $m=2000$) за 1 год 1 у.е. превратиться в весьма ощутимую сумму. В действительности ничего подобного не произойдет, так за 1 год после m начислений сложного процента $\frac{a}{m}\%$ начальный капитал в 1 у.е. вырастит до величины $c(m)=\left(1+\frac{a}{100m}\right)^m$. Эта величина для любого m не превосходит предела $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{100m}\right)^m$, который равен числу $e^{a/100}$. Например, если $a=50$, то имеем следующую таблицу значений $c(m)$:

m	$c(m)$
1	1,5
2	1,5625
3	1,5878
4	1,6018
5	1,6105

Заметим, что $e^{50/100}=e^{1/2}=\sqrt{e}\approx 1{,}6487$, и это означает, что даже для очень большого числа начислений в течение года (с сохранением итогового годового процента), мы не сможем сделать начальный капитал 1 у.е. за 1 год более, чем 1,6487 у.е., т.е. не сможем увеличить начальный капитал более чем на 65%.

Если $a=100$, то в результате одного начисления за 1 год начальный капитал удваивается. При непрерывном начислении прибыли в течении года, т.е. при $m\to\infty$ каждая у.е. превращается в конце года в величину $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$ у.е.

Экспонента. *Экспоненциальной функцией* или *экспонентой* называется функция вида $y=e^{\alpha x}$. Она обладает свойством, отличающим ее от всех остальных показательных

* В отличие от определений числа π и золотого сечения φ.

функций, а именно тем, что ее производная пропорциональна самой функции: $\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x}$. Именно этим и объясняется причина столь частого появления в формулах математического анализа.

Свойство экспоненты, о котором сказано выше, можно интерпретировать как описание типа роста некоторой величины подобно изменению снежного кома, несущегося с вершины горы: чем больше становится ком, тем быстрее налипает на него снег. Другими словами, экспонента описывает величины, скорость роста которых пропорциональна значению этой величины. Равенство $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$ означает, что скорость роста экспоненты e^{x} равна самой экспоненте.

Цепная линия. Если держать гибкую цепь за оба конца, то она провиснет под влиянием силы земного тяготения по кривой, которая так и называется – *цепная линия*. В прямоугольных координатах уравнение цепной линии имеет вид: $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. Таким образом, число e (как экспонента) входит в уравнение цепной линии. Тем же уравнением описывается сечение паруса, надутого ветром, если вертикальная составляющая его скорости равна нулю.

Французский энтомолог Жан Анри Фабр, описывая провисшие под тяжестью крохотных капелек росы нити паутины, образующие цепные линии, замечает: «Бессмысленное число e вновь предстает перед нами, начертанное на этот раз на паутине».

Задача о рассеянном профессоре. n студентов сдали профессору зачетки для того, чтобы он проставил в них баллы, которые они заработали на экзамене. Рассеянный профессор, не глядя на фамилии, указанные на зачетках, проставил в них оценки из ведомости. Какова вероятность того, что хотя бы в одной зачетке сделана верная запись, при условии, что в ведомости нет одинаковых оценок*.

Для решения этой задачи нужно знать две величины: число всех перестановок из n предметов (в данном случае – из n зачеток) и число всех перестановок, при которых ни в одной из зачеток не проставлена верная оценка. Легко убедиться, что число всех перестановок из n предметов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Обозначим через $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ - перестановка из чисел $1, 2, \ldots, n-1, n$, *подстановку n-го порядка*. Ясно, что число всех перестановок, при которых ни в одной из зачеток не проставлена верная оценка, равна числу подстановок S_n, для которых выполнено $a_i \neq i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Оказывается, что число таких подстановок равно целому числу, ближайшему** к дроби $\frac{n!}{e}$.

Теперь можно найти вероятность того, что рассеянный профессор во всех зачетках сделает неверную запись: $p = [n!/e]/n! \approx \frac{1}{e}$, причем погрешность этого приближенного равенства пренебрежительно мала. Тогда вероятность того, что хотя бы в одной зачетке сделана верная запись, при условии, что в ведомости нет одинаковых оценок, равна $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$.

Из решения задачи видно, что для достаточно больших n (фактически, начиная с 6) результат не зависит от n. Заметим также, что вероятность того, что хотя бы в одной зачетке сделана верная запись, достаточно велика (почти $2/3$).

---

* Мы предполагаем, что в данном вузе принята 100-бальная система оценок.

** Целое число, не превосходящее число x, обозначается $[x]$.

Имеется ряд других интересных формулировок задачи о рассеянном профессоре. Одна из них – это

Карточная мира «Солитер». Перетасованные карты выкладываются по одной на стол вверх картинкой, при этом игрок одновременно называет вслух все 52 карты в заранее задуманной и объявленной до начала игры последовательности (например, в порядке возрастания карты масти пик, затем – треф, затем – бубны и, наконец – червы). Игрок выигрывает, если хотя бы одна карта будет выложена в тот момент, когда именно она будет названа. С какой вероятностью игрок получает выигрыш (или платит за проигрыш)?

Эта задача принципиально не отличается от задачи о рассеянном профессоре, поэтому выигрыш в «Солитере» наступает с вероятностью $1-\frac{1}{e}\approx\frac{2}{3}$. Это означает, что в достаточно продолжительной серии игр, игрок может рассчитывать на выигрыш в двух из каждых трех партий.

Эротическая игра. Несколько супружеских пар играют в эротическую игру, которая состоит в том, что женщины располагаются в темной комнате, а их мужья случайным образом выбирают себе партнершу. Какова вероятность того, что при этом образуется хотя бы одна супружеская пара?

Если пар более шести, то вероятность того, что все пары будут составлены не из супругов, равна $\frac{1}{e}$, а вероятность того, что будет хотя бы одна супружеская пара, равна $1-\frac{1}{e}$.

Задача о пьяных матросах. Матросы, имея привычку во время увольнения крепко выпить, вернувшись на корабль, замертво падают на первые попавшиеся койки. Какова вероятность того, что хотя бы один матрос спит на своей койке?

Задача о нерадивой секретарше. Секретарша положила как попало деловые письма в заранее надписанные конверты. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо дойдет по назначению?

Вот еще несколько неожиданных появлений числа *e* в решении различных математических задач.

Задача о максимальном значении корня. Обобщим понятие корня *n*-ой степени на случай любого положительного числа *x* (в определении корня *n*-ой степени *n* - натуральное число): $\sqrt[x]{a}=a^{1/x}$. При каком *x* значение корня $\sqrt[x]{x}=x^{1/x}$ будет наибольшим?

Решение. Введем функцию $y=\sqrt[x]{x}=x^{1/x}$ и найдем ее производную. Сначала прологарифмируем: $\ln y=\frac{\ln x}{x}$, далее дифференцируем $\frac{y'}{y}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ и находим $y'=\frac{1-\ln x}{x^{2-1/x}}$. Критической точкой при $y'=0$ является значение $x=e$. Так как для $0<x<e$ производная $y'>0$ и для $x>e$ производная $y'<0$, то $x=e$ - точка максимума. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{1/x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}=1$, следовательно, $\max y=\max\sqrt[x]{x}=y(e)=e^{1/e}\approx 1{,}4447$.

Задача о математическом ожидании. Рассмотрим случайную величину *X*, значение которой равно числу наугад выбранных действительные числа из интервала $(0;1)$, образующих сумму больше 1, причем отбрасывание любого слагаемого делает сумму меньше 1. Оказывается, что математическое ожидание этой случайной величины $MX=e$.

О числах π и e. Оказывается, что значения e^{π} и π^{e} примерно равны: $e^{\pi}\approx 23{,}14069262$ и $\pi^{e}\approx 22{,}45915771$. Доказать (без вычислений), что $\pi^{e}<e^{\pi}$, можно многими способами.

solon@isuct.ru Солон Борис Яковлевич