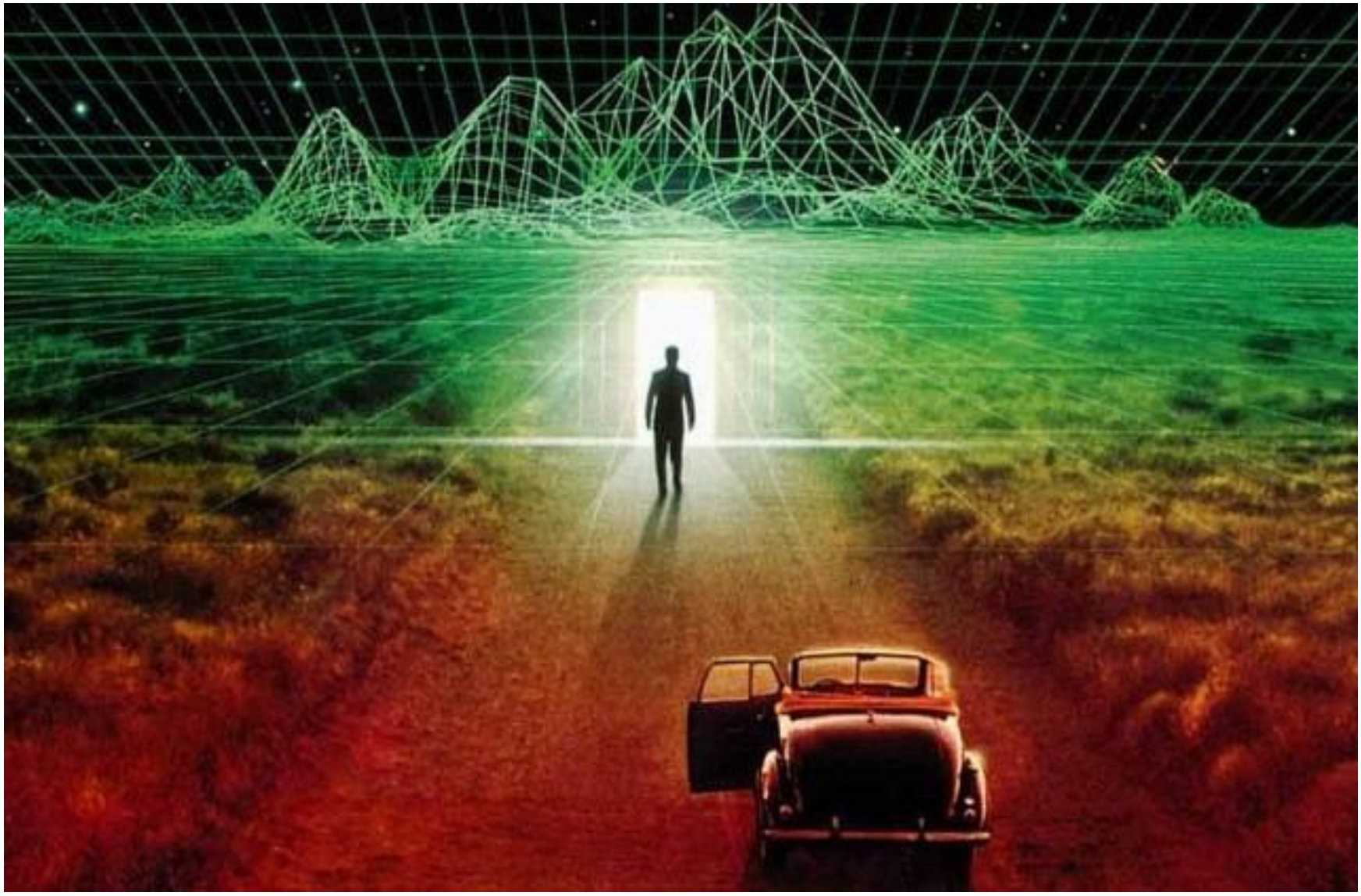
ИвГУ, ф-т МиКН, курс 2

"КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА"

Тема 15.

Целочисленные матрицы. Нормальная форма Смита

Лектор: Н. И. Яцкин, 2014

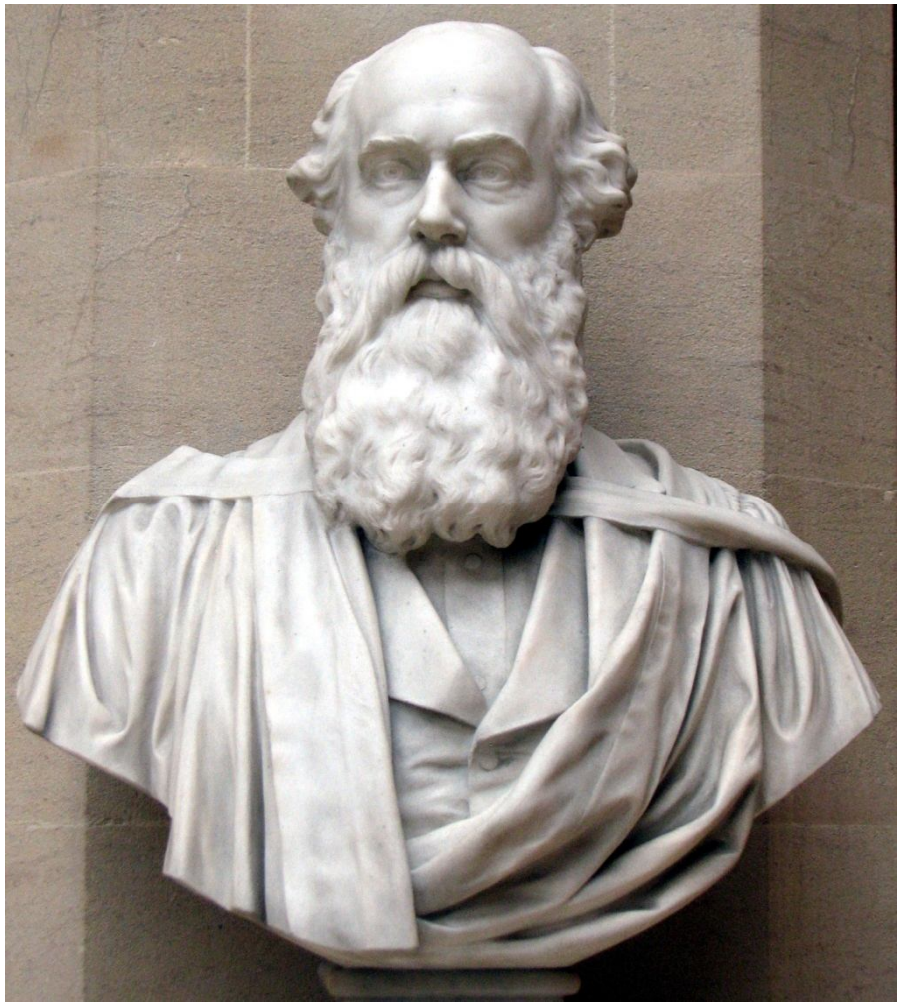


Henry John Stephen Smith

(**1826** – **1883**) английский математик, специалист в области теории чисел и теории матриц, изобретатель так называемой ***нормальной*** (или ***канонической***) ***формы Смита*** для матриц **над кольцом целых чисел**.

Henry John Stephen Smith,
British mathematician.

Statue on permanent display
in the **Oxford University**
Museum of Natural History.



The Cantor set

- *was* **discovered** *in* **1874** *by* **Henry John Stephen Smith**

and **introduced** *by* **Georg Cantor** *in* **1883**.

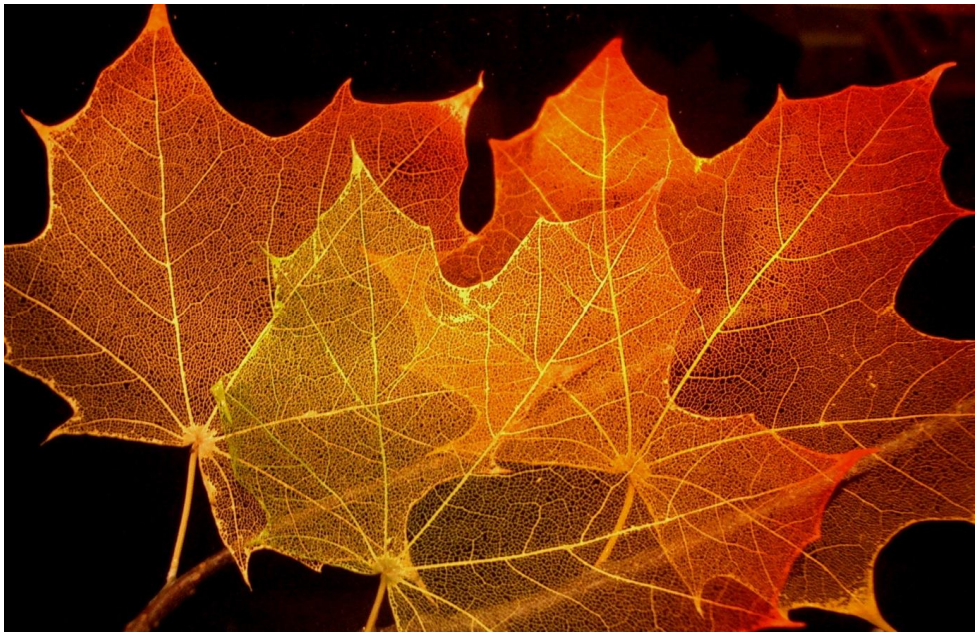
ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ
и элементарные преобразования над ними

$A \in \mathbf{Mat}(m, n, \mathbb{Z})$; $A \dashrightarrow A'$

Тип	Над строками	Над столбцами	*Примечание*
I	$i^{\text{стр}} \leftrightarrow j^{\text{стр}}$	$i^{\text{стб}} \leftrightarrow j^{\text{стб}}$	$i \neq j$
II	$i^{\text{стр}} + j^{\text{стр}} \cdot c$	$i^{\text{стб}} + j^{\text{стб}} \cdot c$	$1 \leq i, j \leq m$; $i \neq j$; $c \in \mathbb{Z}$
III	$i^{\text{стр}} \cdot c$	$i^{\text{стб}} \cdot c$	$c \in \mathbb{Z}^*$

На Maple-языке (пакет LinearAlgebra)

```
RowOperation(A,[i,j])        ColumnOperation(A,[i,j])

RowOperation(A,[i,j],c)      ColumnOperation(A,[i,j],c)

RowOperation(A,i,c)          ColumnOperation(A,i,c)
```



Теорема 1 (Г. Смит, 1861). ***Произвольную целочисленную матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками и столбцами можно привести к следующему (однозначно определенному) виду:***

$$S = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

где $r = \mathrm{rank}(A)$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r \in \mathbb{N}$; $\mu_i \mid \mu_{i+1} (i = 1, \ldots, r-1)$.

Дополнительная информация. Инвариантные множители

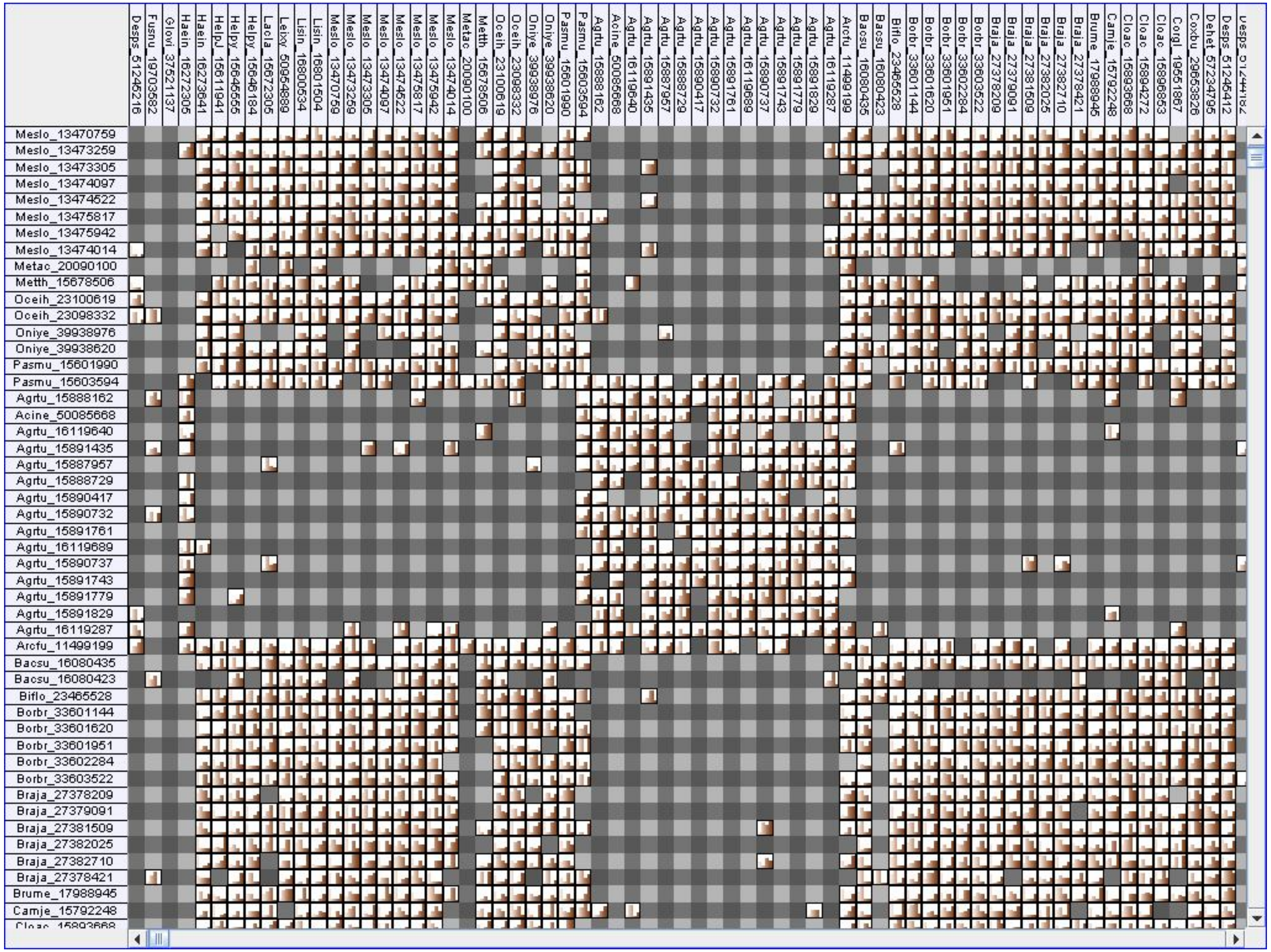
$\boldsymbol{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$ могут быть выражены через **НОДМ**'ы, т. е. **наибольшие общие делители миноров**:

$$\boldsymbol{d_k} = \text{НОД}\left\{\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i_1 i_2 \cdots i_k}\\ \boldsymbol{j_1 j_2 \cdots j_k}\end{pmatrix} - \text{все миноры порядка } \boldsymbol{k}\right\};$$

$\boldsymbol{k = 1, \ldots, r}$; полагается также: $\boldsymbol{d_0 = 1}$.

Формулы, выражающие $\boldsymbol{\mu_k}$ через $\boldsymbol{d_k}$:

$$\boldsymbol{\mu_k = \frac{d_k}{d_{k-1}}}.$$


Desps_51245216
Fusnu_19703582
Glovi_37521137
Haein_16272305
Haein_16273641
HelpJ_15611941
Helpy_15645555
Helpy_15646184
Lacla_15672305
Leixy_50954889
Lisin_16800534
Lisin_16801504
Meslo_13470759
Meslo_13473259
Meslo_13473305
Meslo_13474097
Meslo_13474522
Meslo_13475817
Meslo_13475942
Meslo_13474014
Metac_20090100
Metth_15678506
Oceih_23100619
Oceih_23098332
Oniye_39938976
Oniye_39938620
Pasmu_15601990
Pasmu_15603594
Agrtu_15888162
Acine_50085668
Agrtu_16119640
Agrtu_15891435
Agrtu_15887957
Agrtu_15888729
Agrtu_15890417
Agrtu_15890732
Agrtu_15891761
Agrtu_16119689
Agrtu_15890737
Agrtu_15891743
Agrtu_15891779
Agrtu_15891829
Agrtu_16119287
Arcfu_11499199
Bacsu_16080435
Bacsu_16080423
Biflo_23465528
Borbr_33601144
Borbr_33601620
Borbr_33601951
Borbr_33602284
Borbr_33603522
Braja_27378209
Braja_27379091
Braja_27381509
Braja_27382025
Braja_27382710
Braja_27378421
Brume_17988945
Camje_15792248
Cloac_15893668
Cloac_15894272
Cloac_15896853
Corgl_19551867
Coxbu_29653826
Dehet_57234795
Desps_51245412
Meslo_13470759
Meslo_13473259
Meslo_13473305
Meslo_13474097
Meslo_13474522
Meslo_13475817
Meslo_13475942
Meslo_13474014
Metac_20090100
Metth_15678506
Oceih_23100619
Oceih_23098332
Oniye_39938976
Oniye_39938620
Pasmu_15601990
Pasmu_15603594
Agrtu_15888162
Acine_50085668
Agrtu_16119640
Agrtu_15891435
Agrtu_15887957
Agrtu_15888729
Agrtu_15890417
Agrtu_15890732
Agrtu_15891761
Agrtu_16119689
Agrtu_15890737
Agrtu_15891743
Agrtu_15891779
Agrtu_15891829
Agrtu_16119287
Arcfu_11499199
Bacsu_16080435
Bacsu_16080423
Biflo_23465528
Borbr_33601144
Borbr_33601620
Borbr_33601951
Borbr_33602284
Borbr_33603522
Braja_27378209
Braja_27379091
Braja_27381509
Braja_27382025
Braja_27382710
Braja_27378421
Brume_17988945
Camje_15792248

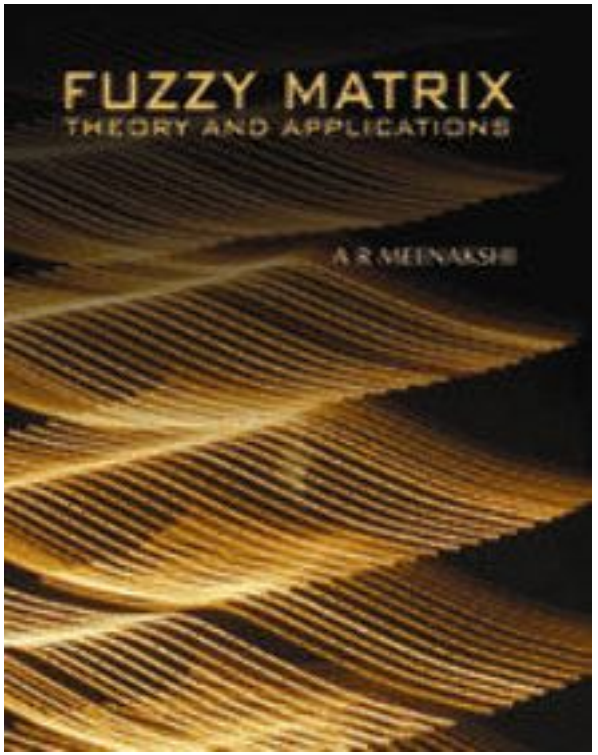
Процедура приведения к форме Смита.

```
> restart;with(LinearAlgebra):

> SMITHform:=proc(A::Matrix(integer))
  local m,n,B,U,V,q,ver,hor,i,j,pos,num,s;

m,n:=Dimension(A);
B:=Matrix(A);
U:=IdentityMatrix(m,compact=false);
V:=IdentityMatrix(n,compact=false);
if Equal(B,ZeroMatrix(m,n)) then
  RETURN(B,U,V,0);
end if;

s:=1; # Счетчик включен.
```

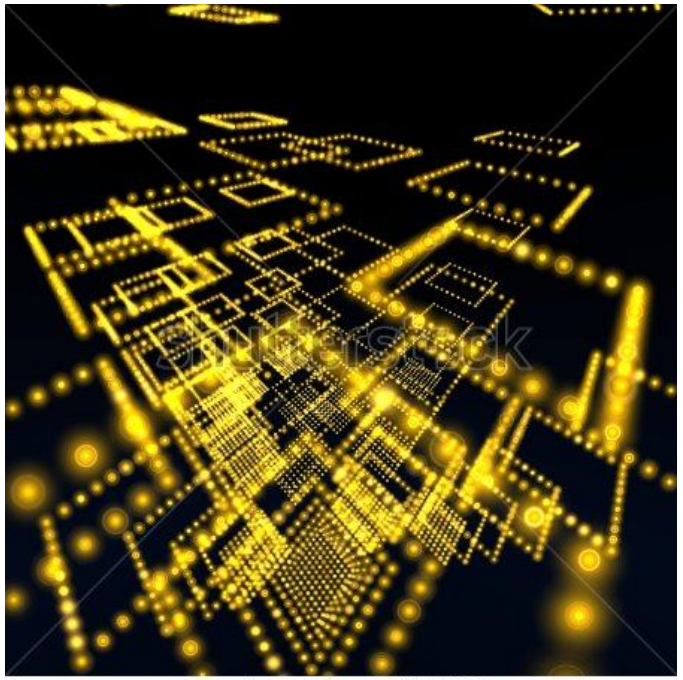
```
LB_nw:
# Перемещение наименьшего
# (по абсолютной величине) элемента
# юго-восточного блока B[s..m,s..n].
# в позицию [s,s] (северо-западный угол блока).

pos:=[s,s];
num:=abs(B[s,s]);
for i from s to m do
  for j from s to n do
    if B[i,j]<>0 and (num=0 or abs(B[i,j])<num) then
      pos:=[i,j];
      num:=abs(B[i,j]);
    end if;
  end do;
end do;
```

```
if pos[1]<>s then
  B:=RowOperation(B,[s,pos[1]]);
  U:=RowOperation(U,[s,pos[1]]);
end if;
if pos[2]<>s then
  B:=ColumnOperation(B,[s,pos[2]]);
  V:=ColumnOperation(V,[s,pos[2]]);
end if;

if B[s,s]<0 then
  B:=RowOperation(B,s,-1);
  U:=RowOperation(U,s,-1);
end if;
```

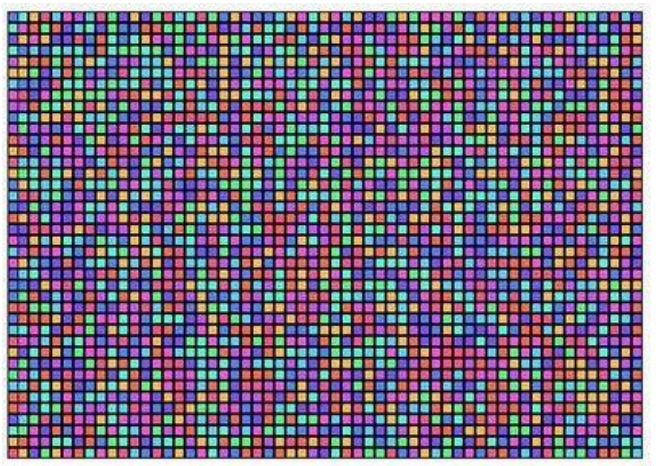
```
LB_mododg:
# Приведение по модулю ключевого элемента
# (в позиции [s,s]) окаймления (edging)
# вниз и вправо от ключевого элемента.

for i from s+1 to m do
  if B[i,s]<>0 then
    q:=iquo(B[i,s],B[s,s]);
    B:=RowOperation(B,[i,s],-q);
    U:=RowOperation(U,[i,s],-q);
  end if;
end do;
```



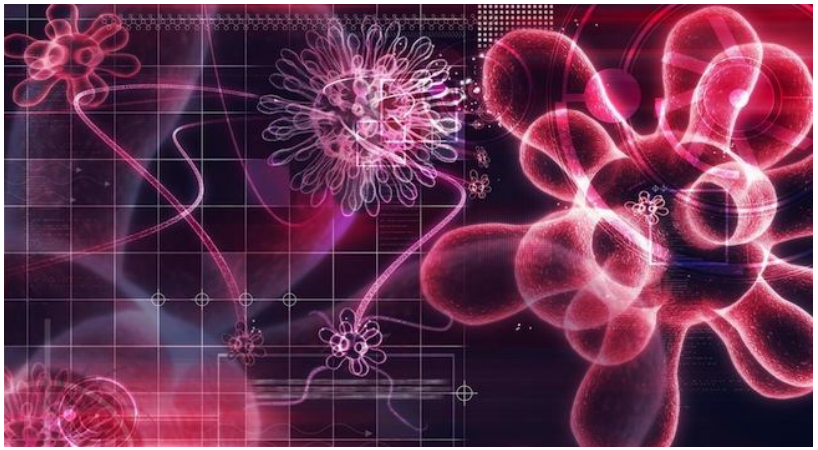
```
for j from s+1 to n do
  if B[s,j]<>0 then
    q:=iquo(B[s,j],B[s,s]);
    B:=ColumnOperation(B,[j,s],-q);
    V:=ColumnOperation(V,[j,s],-q);
  end if;
end do;
```



```
LB_nulledg:
# Обнуление окаймления.

pos:=[s,s];
num:=abs(B[s,s]);
while not (Equal(B[s+1..m,s],ZeroVector[column](m-s))
           and
           Equal(B[s,s+1..n],ZeroVector[row](n-s))) do
# Перемещение наименьшего
# (по абсолютной величине) элемента окаймления
# в ключевую позицию [s,s].
```

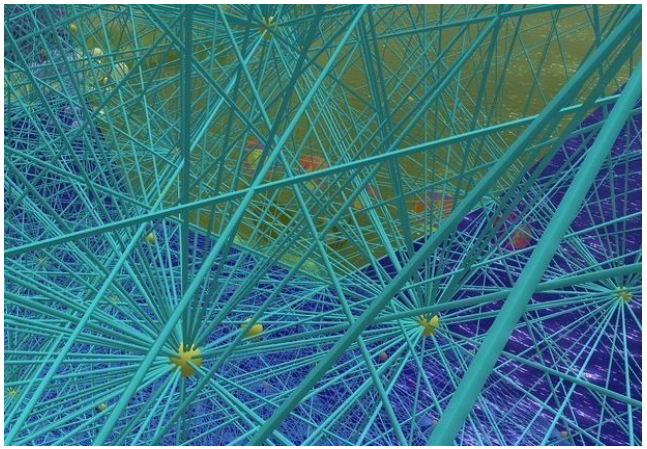


```
for i from s+1 to m do
  if B[i,s]<>0 and abs(B[i,s])<num then
    pos:=[i,s];
    num:=abs(B[i,s]);
  end if;
end do;

for j from s+1 to n do
  if B[s,j]<>0 and abs(B[s,j])<num then
    pos:=[s,j];
    num:=abs(B[s,j]);
  end if;
end do;
```

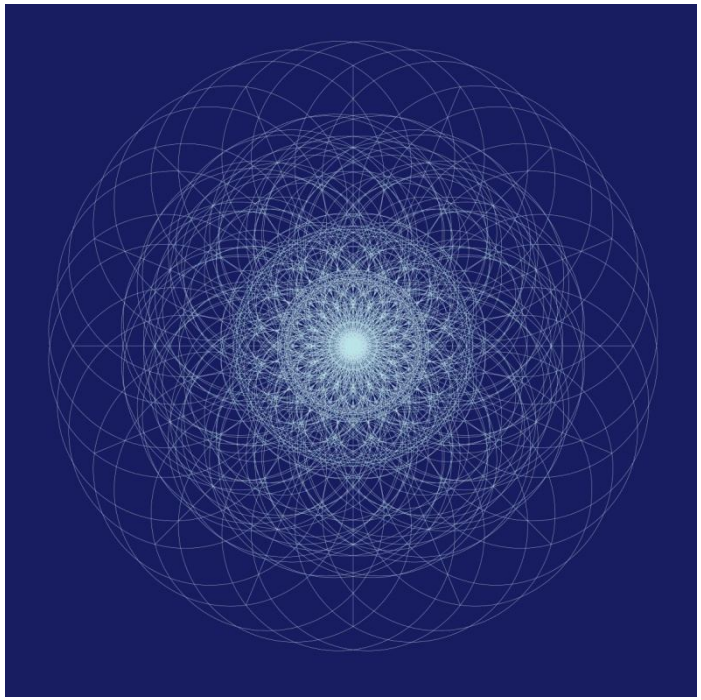


```
  if pos[2]=s and pos[1]>s then
    B:=RowOperation(B,[s,pos[1]]);
    U:=RowOperation(U,[s,pos[1]]);
  elif pos[1]=s and pos[2]>s then
    B:=ColumnOperation(B,[s,pos[2]]);
    V:=ColumnOperation(V,[s,pos[2]]);
  end if;

  goto(LB_modedg);
  # Возврат к приведению по модулю
  # с новым (меньшим по абсолютной величине)
  # ключевым элементом.
end do;
if B[s,s]<0 then
  B:=RowOperation(B,s,-1);
  U:=RowOperation(U,s,-1);
end if;
```

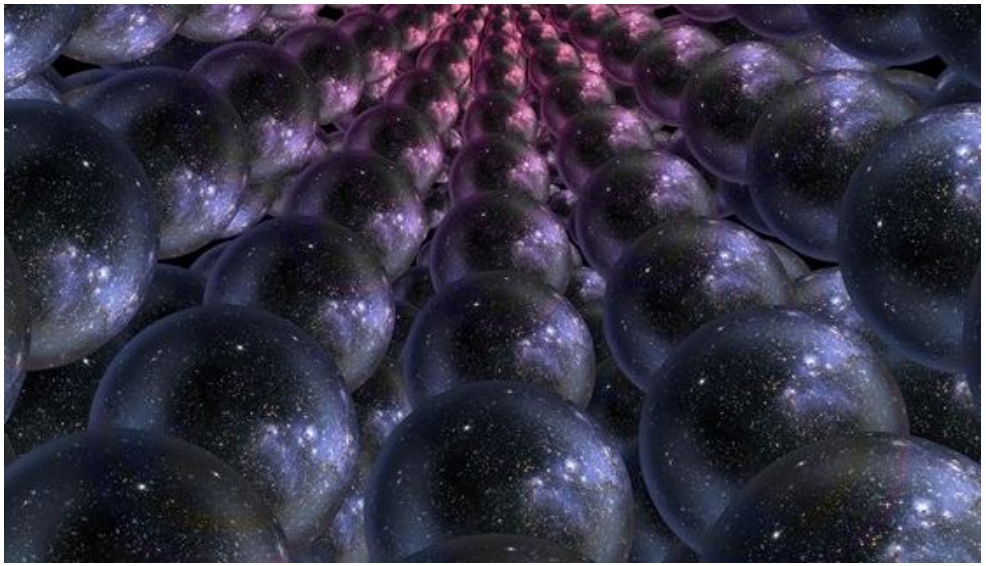
```
# Проверка юго-восточного блока
# (справа снизу от ключевого элемента):
# все элементы должны делиться на ключевой.
pos:=[s,s];
num:=B[s,s];
for i from s+1 to m do
  for j from s+1 to n do
    if B[i,j] mod B[s,s]<>0 and
       B[i,j] mod B[s,s]<num then
      pos:=[i,j];
      num:=B[i,j] mod B[s,s];
    end if;
  end do;
end do;
```



```
if pos<>[s,s] then
   # В случае невыполнения условия делимости
   # "портим" окаймление, прибавляя к текущей
   # (ключевой) строке строку, содержащую наименьший
   # остаток при делении на ключевой элемент.
   B:=RowOperation(B,[s,pos[1]],1);
   U:=RowOperation(U,[s,pos[1]],1);
```



```
# Ключевая строка приводится по модулю
# ключевого элемента; столбец в котором
# располагался элемент с наименьшим остатком,
# меняется местами с ключевым столбцом.
q:=iquo(B[s,pos[2]],B[s,s]);
B:=ColumnOperation(B,[pos[2],s],-q);
V:=ColumnOperation(V,[pos[2],s],-q);
B:=ColumnOperation(B,[pos[2],s]);
V:=ColumnOperation(V,[pos[2],s]);
```



```
    goto(LB_nulledg);
    # Возврат к этапу обнуления окаймления
    # с новым (меньшим по абсолютной величине)
    # ключевым элементом.
end if;

if Equal(B[s+1..m,s+1..n],ZeroMatrix(m-s,n-s)) then
    # Если очередной юго-восточный блок
    # (справа снизу от ключевого элемента)
    # оказывается нулевым (или пустым),
    # то происходит останов.
    # Возвращаются: форма Смита, матрицы перехода и ранг.
    RETURN(B,U,V,s);
else
```

```
   # Если останов не достигнут,
   # то получает приращение счетчик.
   s:=s+1;

   goto(LB_nw);
   # Работа возобновляется с новой ключевой позиции.

end if;

end proc;
```

```
> A:=Matrix([[50, -88, 50, -62], [-156, 264, -150, 186],
                                        [18, -42, 24, -30]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 50 & -88 & 50 & -62 \\ -156 & 264 & -150 & 186 \\ 18 & -42 & 24 & -30 \end{bmatrix}$$

```
> B,U,V,r:=SMITHform(A);U.A.V-B;
```

$$B, U, V, r := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \\ -150 & -43 & 44 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -21 & 65 & -3 & 0 \\ -11 & 34 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A:=Matrix([[500,-828,150,-621,122],
  [-156,264,-150,186,231],[188,-428,274,-307,177],
  [198,-438,574,-507,777]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 500 & -828 & 150 & -621 & 122 \\ -156 & 264 & -150 & 186 & 231 \\ 188 & -428 & 274 & -307 & 177 \\ 198 & -438 & 574 & -507 & 777 \end{bmatrix}$$

```
> B:=SMITHform(A)[1];U:=SMITHform(A)[2];V:=SMITHform(A)[3];
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

$U :=$

[307 , 0 , 0 , 1]

[7673120958 , 0 , -5868864 , 25990685]

[88519095260458781 5 , 992583 , -677047229914751 , 299835221320608 0]

[95985441940607832134486 25 , 10763046960365 , -7341543357036665435028 ,

3251255126720028478257 3]

$$V :=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 344165200255 & 2127302931360097459 & -2942825108782 & -185304363 \\ 0 & 0 & -3362194 & -8994803 & -20067583 \\ 0 & -22636834 & -139919445317013 & 173526336 & -44680878 \\ 1 & 2155625602277 & 133240335142641625 70 & -18431472095632 & -137294956 \\ 5 & 9394470687364 & 580677099747542518 94 & -80326270939118 & -20670600 \end{bmatrix}$$

Замечания. *(1) Команда* `goto` *является в* **Maple** *"нелегальной", она противоречит идеологии* **Maple***-программирования. В качестве упражнения вам предлагается переделать процедуру* `SMITHform`*, без использования* `goto`**.**

(2) В пакете `LinearAlgebra` *предусмотрена стандартная версия процедуры приведения к форме Смита – функция* `SmithForm(A)`.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОЛЬЦОМ $\mathbb{Z}$

(с помощью формы Смита)

Рассмотрим с.л.у.

$$\boldsymbol{A \cdot x = b;} \qquad \textbf{(1)}$$

где

$\boldsymbol{A}$ - целочисленная $(\boldsymbol{m \times n})$-матрица;

$\boldsymbol{b}$ - целочисленный $(\boldsymbol{m \times 1})$-вектор,

$\mathbf{x}$ - неизвестный целочисленный $(\boldsymbol{n \times 1})$-вектор.

[1.] Приведем матрицу A к **нормальной форме Смита**:

$$U \cdot A \cdot V = S = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r);$$

$$U \in GL(n, \mathbb{Z});\ V \in GL(n, \mathbb{Z});\ r = \mathrm{rank}(A).$$

[2.] Произведем **замену неизвестного** вектора

$$x = V \cdot y \qquad (2)$$

и домножим обе части уравнения (1) на матрицу U; получим:

$(U \cdot A \cdot V) \cdot y = c$, где $c = U \cdot b$, или

$$S \cdot y = c. \qquad (3)$$

[3.] Перейдем к подробной записи системы (3):

$$\begin{cases} \mu_i \cdot y_i = c_i; & i = 1, \dots, r; \\ 0 = c_i; & i = r+1, \dots, m. \end{cases}$$

Система (3) будет **несовместной** (над $\mathbb{Z}$), если хотя бы одно из чисел c_i $(i = r+1, \dots, m)$ **отлично от нуля** или хотя бы одно из чисел c_i $(i = 1, \dots, r)$ **не делится** на соответствующее число μ_i.

[4.] В противном случае система **(3)** будет **совместной**. При $r = n$ она будет **определенной**; ее единственное решение определится по формулам:

$$y_i = c_i/\mu_i\,; \quad i = 1, \dots, n.$$

[5.] Если же $r < n$, то **(3)** окажется **неопределенной**, неизвестные с номерами, большими r, будут **свободными**; общее решение запишется в виде:

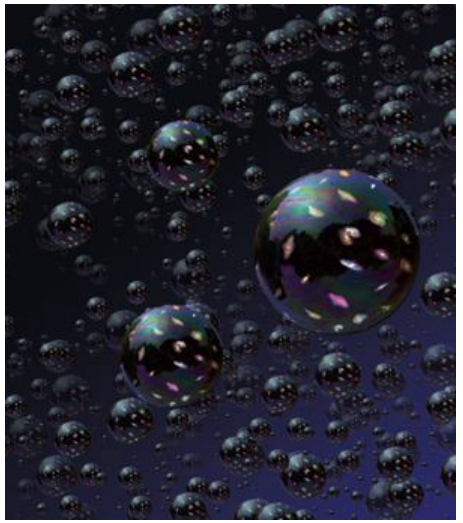
$$y_i = c_i/\mu_i\,; \quad i = 1, \dots, r;$$
$$y_i = y_i; \quad i = r+1, \dots, n.$$

[6.] Возвращаемся **к исходным неизвестным** по формуле **(2)**.

ПРОЦЕДУРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

```
> iLinSolve:=proc(A::Matrix(integer),
                  b::Vector(integer))
  local m,n,U,V,S,r,c,i,y,x;
m,n:=Dimension(A);
if m<>Dimension(b) then
  ERROR();
end if;
S,U,V,r:=SMITHform(A);
print(evaln(S)=S);
```

```
if r=0 and not Equal(b,ZeroVector(m)) then
  RETURN(NULL);
elif r=0 and Equal(b,ZeroVector(m)) then
  RETURN(Vector(n,symbol=x));
else
  c:=U.b;
  print(evaln(c)=c);
  y:=Vector(n,symbol=y);
  print(evaln(y)=y);
  if not Equal(c[r+1..m],ZeroVector(m-r)) then
    print(evaln(y)=NULL);
    RETURN(NULL);
```



```
  else
    for i from 1 to r do
      if c[i] mod S[i,i]<>0 then
        print(evaln(y)=NULL);
        RETURN(NULL);
      else
        y[i]:=c[i]/S[i,i];
      end if;
    end do;
    print(evaln(y)=y);
    x:=V.y;
    print(evaln(x)=x);
    RETURN(x);
  end if;
end if;
end proc;
```

Примеры.

```
> A,b:=Matrix([[0,-14,-2,16],[4,-34,-4,40],
              [4,2,0,0]]),Vector([8,8,64]);
```

$$A, b := \begin{bmatrix} 0 & -14 & -2 & 16 \\ 4 & -34 & -4 & 40 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 64 \end{bmatrix}$$

```
> iLinSolve(A,b);
```

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -8 \\ 64 \\ 184 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -4 \\ 32 \\ 23 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} y_4 \\ 32 - 2\,y_4 \\ -44 - 2\,y_4 \\ 23 - 2\,y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_4 \\ 32 - 2\,y_4 \\ -44 - 2\,y_4 \\ 23 - 2\,y_4 \end{bmatrix}$$

```
> A,b:=Matrix([[-18,32,40,10,50],[-6,20,10,10,20],
                [-4,10,8,4,12],[-28,62,58,24,62]]),
                 Vector([64,34,18,116]);
```

$$A, b := \begin{bmatrix} -18 & 32 & 40 & 10 & 50 \\ -6 & 20 & 10 & 10 & 20 \\ -4 & 10 & 8 & 4 & 12 \\ -28 & 62 & 58 & 24 & 62 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 64 \\ 34 \\ 18 \\ 116 \end{bmatrix}$$

```
> iLinSolve(A,b);
```

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -16 \\ -10 \\ 6 \\ 60 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -8 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -4 + 5\,y_5 \\ 1 \\ -1 + 2\,y_5 \\ y_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 + 5\,y_5 \\ 1 \\ -1 + 2\,y_5 \\ y_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maribel Martínez y Ginés Ciudad-Real

Matriz de halloween