Министерство общего и профессионального
образования РФ

Ивановский государственный университет

Кафедра математического анализа

Предельные переходы и топологии

Методические указания
для студентов математического факультета

Иваново 2005

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

§1. Секвенциальный предел и секвенциальная топология

1. Секвенциальный предел
2. Секвенциальная топология
3. Урысоновский предел
4. Порядковый секвенциальный предел
5. Порядковая секвенциальная топология
6. Секвенциально непрерывные отображения

§2. Сходимости и топологии

1. Направленные множества и направленности
2. Предел направленности в топологическом пространстве
3. Поднаправленности
4. Предел на классе направленностей
5. Топология сходимости
6. Порядковый предел и порядковая топология

§3. Равномерные пространства

1. Обратное множество, композиция множеств
2. Аксиомы окрестностей
3. Аксиомы равномерного пространства
4. Фундаментальная система окружений
5. Аддитивная равномерная структура
6. Равномерная топология
7. Равномерно непрерывные отображения
8. Фундаментальные направленности

Литература

ВВЕДЕНИЕ

Основная операция классического математического анализа – операция предельного перехода в различных её вариантах (предел числовой последовательности, предел функции в точке или на бесконечности, предел функции в точке по всей области определения или её части и др.). С предельным переходом связаны основные свойства функций. Идея предельного перехода получила дальнейшее развитие при переходе от функций к отображениям. При работе с отображениями вводятся топологии на области определения и множестве значений отображения, что позволяет говорить о близости точек пространства к <u>фиксированной</u> точке и непрерывности отображения. Однако наличие топологии не позволяет ввести понятие равномерной непрерывности. Здесь нужен переход к равномерным пространствам, что даёт возможность говорить о близости <u>различных</u> точек пространства. Топологии, равномерности не всегда удобно ввести как нечто изначальное. Например, при работе с отображениями, заданными на множествах, несложно ввести предельный переход на классе множеств как нечто изначальное и построить топологию на этой основе. Именно этим путём мы и пойдём, вводя предел сначала секвенциальный, на классе последовательностей, а затем общий, на классе направленностей, и построив соответствующие им топологии. Эти вопросы излагаются в §§1 - 2. В §3 рассматриваются равномерные пространства, и вводится равномерная топология, определяемая исходной равномерностью.

Пособие адресовано студентам старших курсов и может быть использовано при чтении курса «Современный анализ» в магистратуре.

§1. СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ И СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

1. СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Пусть $\boldsymbol{E}$ - некоторое множество, $\boldsymbol{\Phi}$ – класс всех последовательностей элементов множества $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{f}$ – некоторое соответствие между $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{E}$. Если последовательности $(\boldsymbol{x_n})$ сопоставлен элемент $\boldsymbol{a}$ при соответствии $\boldsymbol{f}$, то запишем $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{a}(\boldsymbol{f})$. При этом не предполагается, что каждой последовательности сопоставлен некоторый элемент и не предполагается, что соответствие однозначно. Через $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n})$ обозначим множество всех элементов, соответствующих последовательности $(\boldsymbol{x_n})$ при соответствии $\boldsymbol{f}$. Если последовательности $(\boldsymbol{x_n})$ не сопоставлен ни один элемент, то $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n}) = \varnothing$. Соответствие $\boldsymbol{f}$ понимается как подмножество декартова произведения $\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{E}$, т. е. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n}) \subseteq \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{E}$. Ясно, что записи $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{a}(\boldsymbol{f})$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n})$, $((\boldsymbol{x_n}), \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{f}$ выражают одно и то же. Сопоставив каждой сходящейся числовой последовательности её предел, получим пример такого соответствия.

Соответствия, рассматриваемые в дальнейшем, обычно будем обозначать символом $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$. При этом будем предполагать, что соответствие $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$ удовлетворяет следующим условиям, называемым условиями Фреше.

1. При соответствии $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$ любой стационарной последовательности $(\boldsymbol{x_n})$ (для которой $\exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}$, что $\forall \boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{a}$) $\quad \boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$
2. Если при соответствии $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$ $\quad \boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$, то для любой подпоследовательности $(\boldsymbol{x_{n_k}})$ $\quad \boldsymbol{x_{n_k}} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$.

Соответствие между классом $\boldsymbol{\Phi}$ последовательностей элементов множества $\boldsymbol{E}$ и множеством $\boldsymbol{E}$, удовлетворяющее условиям Фреше, называется <u>секвенциальным пределом,</u> а пара $(\boldsymbol{E}, (\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$ <u>секвенциальным пространством</u>. Если $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$, то говорят, что последовательность $(\boldsymbol{x_n})$ <u>секвенциально</u> <u>сходится</u> к $\boldsymbol{a}$. $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}\, \boldsymbol{x_n}$ - множество всех элементов, к которым последовательность $(\boldsymbol{x_n})$ секвенциально сходится.

Задачи.

1. Пусть $\boldsymbol{E}=\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ – класс всех числовых последовательностей. Каждой сходящейся в обычном смысле последовательности сопоставим число, являющееся её пределом. Доказать, что введённое соответствие – секвенциальный предел.

2. Пусть $E=\mathbb{R}^k$ и Φ класс всех последовательностей точек пространства $\mathbb{R}^k$. Положим $x^{(n)} \to a((s)lim)$, где $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)},\dots,x_k^{(n)}\right)$, $a=(a_1,\dots,a_k)$, если для любого i, $i=1,\dots,k$, $x_i \to a_i(n\to\infty)$. Доказать, что введённое соответствие - секвенциальный предел.

3. Доказать, что предельные переходы в метрическом и нормированном пространствах удовлетворяют условиям Фреше.

4. Пусть E – произвольное множество. Каждой стационарной последовательности элементов множества E сопоставим элемент, её образующий. Является ли это соответствие секвенциальным пределом?

5. Пусть (E,T) - топологическое пространство, $x_n \in E, n \in N$. Положим $x_n \to a((T)lim)$, если для всякой окрестности U_a точки a существует такое $\mathscr{N}$, что для любого n, если $n \ge \mathscr{N}$, то $x_n \in U_a$. Доказать, что соответствие $(T)lim$ удовлетворяет условиям Фреше. Всегда ли топологический предел $(T)lim$ однозначен?

6. Если топология T хаусдорфово отделима, то $(T)lim$ однозначен. Доказать. Верно ли обратное?

7. Пусть $E=[0;1]$ - единичный отрезок, $(x_n)=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$, $(y_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$. Введём соответствие f, положив $x_n \to 0(f)$, $y_n \to 1(f)$. Является ли соответствие f секвенциальным пределом?

8. Пусть $E=\{a,b\}$. Является ли секвенциальным пределом следующее соответствие

a) $a,a,\dots,a,\dots\} \begin{matrix}\to a\\ \to b\end{matrix}$; $\qquad b,b,\dots,b,\dots \to b$;

b) $a,a,\dots,a,\dots\} \begin{matrix}\to a\\ \to b\end{matrix}$; $\qquad b,b,\dots,b,\dots\} \begin{matrix}\to a\\ \to b\end{matrix}$; $\qquad a,b,a,b\dots,a,b,\dots\} \begin{matrix}\to a\\ \to b\end{matrix}$?

9. Пусть $E=\mathbb{R}$ и C конечное или счётное подмножество множества E. Пусть классу T принадлежат все множества вида $\mathbb{R}\setminus C$, где C - произвольное конечное или счётное множество, а также $\varnothing$. Доказать, что T - топология. Какие последовательности сходятся относительно топологии T ?

10. Пусть E – бесконечное множество, T - класс всех множеств вида $E\setminus C$, где C - конечно или счётно, $\varnothing \in T$. Какие последовательности сходятся относительно этой топологии? Может ли эта топология быть хаусдорфово отделимой?

11. Пусть E – некоторое множество и T - класс всех его подмножеств. Какие последовательности сходятся относительно топологии T? Сравнить пределы, определяемые топологиями, рассмотренными в задачах 10) и 11).

12. Пусть E – бесконечное множество, $K \subseteq E$, K - конечно. Доказать, что класс всех множеств вида $E \setminus K$ вместе с $\varnothing$ - топология на E. Какие последовательности сходятся относительно этой топологии?

13. Доказать, что любое соответствие между классом Φ последовательностей элементов множества E и множеством E можно продолжить до соответствия, удовлетворяющего условиям Фреше, причём существует минимальное продолжение.

14. Продолжить соответствие примера 8б) до секвенциального предела.

2. СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Пусть $(E,(s)lim)$ - секвенциальное пространство, $A \subseteq E$, $a \in E$.

Введём следующие определения.

Точка a называется <u>(*s*)точкой прикосновения</u> множества A, если существует такая последовательность (x_n), где $x_n \in A$, $n \in N$, что $x_n \to a((s)lim)$.

Множество $S(A)$ всех (s)точек прикосновения множества A называется <u>(*s*)замыканием</u> множества A.

Заметим, что $A \subseteq S(A)$.

Множество A называется <u>(*s*)замкнутым</u>, если $A = S(A)$.

Множество A называется <u>(*s*)открытым</u>, если $A' = E \setminus A$ - (*s*)замкнуто.

Пусть

S - класс всех (*s*)открытых множеств,

S' - класс всех (*s*)замкнутых множеств.

<u>Теорема 1</u>. Класс S - топология на E.

Доказательство. Докажем, что класс S' удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varnothing, E \in S'$;

2) объединение конечного семейства множеств из S' входит в S';

3) пересечение произвольного семейства множеств из S' входит в S'.

Действительно, из определения (*s*)замкнутого множества следует, что $\varnothing, E \in S'$. Пусть a - (*s*)точка прикосновения $A_1 \cup A_2$. Тогда существует такая последовательность (x_n), где

$x_n \in A_1 \cup A_2$, $n \in N$, что $x_n \to a((s)lim)$. Пусть N_1 множество всех тех значений n, при которых $x_n \in A_1$, а N_2 - множество всех тех значений n, при которых $x_n \in A_2$. Ясно, что $N_1 \cup N_2 = N$, т. е. хотя бы одно из этих множеств счётно. Поэтому существует такая подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), что для любого $k \in N$ $x_{n_k} \in A_1$ или для любого $k \in N$ $x_{n_k} \in A_2$. Тогда точка a будет **(*s*)**точкой прикосновения A_1 или A_2, а значит, $a \in A_1$ или $a \in A_2$, так как A_1 и A_2 **(*s*)**замкнуты. Следовательно, $a \in A_1 \cup A_2$. **(*s*)**замкнутость любого конечного объединения **(*s*)**замкнутых множеств доказывается по индукции.

Пусть $A_i \in S'$, $i \in I$. Докажем, что $\bigcap_{i \in I} A_i \in S'$.

Пусть a -**(*s*)**точка прикосновения $\bigcap_{i \in I} A_i$. Тогда существует такая последовательность (x_n), где $x_n \in \bigcap_{i \in I} A_i$, $n \in N$, что $x_n \to a((s)lim)$. Тогда для любого $n \in N$ и для любого $i \in I$ $x_n \in A_i$. Следовательно, a -**(*s*)**точка прикосновения множества A_i при любом $i \in I$. Так как для любого $i \in I$ A_i - **(*s*)**замкнуто, то $a \in A_i$, $i \in I$, и $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. *

Топология S, введённая на E, называется <u>секвенциальной топологией</u>.

Введём понятие топологии, согласованной с пределом. Пусть $(E,(s)lim)$ - секвенциальное пространство и (E,T) - топологическое пространство.

Говорят, что топология T <u>согласована</u> с $(s)lim$, если для любой последовательности (x_n) её **(*s*)**сходимость к элементу a влечёт её сходимость к a относительно топологии T, т. е.

$$x_n \to a((s)lim) \;\Rightarrow\; x_n \to a((T)lim) \;.$$

Это означает, что

$$(s)lim \subseteq (T)lim \,.$$

(Если $((x_n),a) \in (s)lim$, то $((x_n),a) \in (T)lim$).

<u>**Теорема 2**</u>. Секвенциальная топология S согласована с $(s)lim$.

Доказательство проведём от противного. Пусть некоторая секвенциальная топология не согласована с $(s)lim$. Тогда существует такая последовательность (x_n), что $x_n \to a((s)lim)$, но $x_n \nrightarrow a((S)lim)$, где $(S)lim$ - предел, определяемый топологией (S). Поскольку

$x_n \nrightarrow a((S)lim)$,то существует такая окрестность $U_a \in S$ точки a, что для любого $k \in N$ найдется такое $n \geq k$, что $x_{n_k} \notin U_a$. Тогда существует такая подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), что для любого k $x_{n_k} \notin U_a$. Следовательно, для любого $k \in N$ $x_{n_k} \in U'_a = E \setminus U_a$. Так как $U_a \in S$, т. е. U_a - **(s)**открытое множество, то U'_a - **(s)**замкнуто. Так как по условию $x_n \to a((s)lim)$, то $x_{n_k} \to a((s)lim)$. Следовательно, $a \in U'_a$. Но $a \in U_a$, так как U_a - окрестность точки a, и противоречие получено.*

Согласованность секвенциальной топологии с секвенциальным пределом означает, что $(s)lim \subseteq (S)lim$.

Замечание. Возможно, что $(s)lim \neq (S)lim$. (См. з.2, п.2).

Согласованными с $(s)lim$ могут оказаться различные топологии. Например, с любым секвенциальным пределом согласована минимальная топология $\{\varnothing, E\}$. Сопоставим секвенциальную топологию с такими топологиями.

Теорема 3. Секвенциальная топология S - максимальная топология, согласованная с $(s)lim$.

Доказательство. Пусть T - некоторая топология, согласованная с $(s)lim$. Докажем, что $T \subseteq S$. Для этого докажем, что $T' \subseteq S'$, где T' - класс всех замкнутых множеств относительно топологии T (S' - класс всех **(s)**замкнутых множеств).

Пусть $A \in T'$. Докажем, что $A \in S'$. Для этого нужно установить, что $A = S(A)$. Пусть a - **(s)**точка прикосновения множества A, т. е. существует такая последовательность (x_n), где $x_n \in A$, $n \in N$, что $x_n \to a((s)lim)$. Так как топология T согласована с $(s)lim$, то $x_n \to a((T)lim)$. Так как $A \in T'$ и $x_n \to a((T)lim)$, то $a \in A$. Таким образом, если a - **(s)**точка прикосновения множества A, то $a \in A$, что и означает, что $A = S(A)$ и $A \in S'$.*

Теорема 4. Если $(s)lim$ - однозначный секвенциальный предел и $x_n \to a((S)lim)$, то существует такая подпоследовательность (x_{n_k}), что $x_{n_k} \to a((s)lim)$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a((S)lim)$.

Если при бесконечно многих значениях n $x_n = a$, то рассматриваемая последовательность имеет стационарную подпоследовательность, **(s)**сходящуюся к a.

Если для конечного множества значений n $x_n = a$, то отсекая начало последовательности, можно получить подпоследовательность, все члены которой отличны от a. Предположим, что такая операция произведена, $x_n \to a((S)lim)$ и для любого n $x_n \neq a$.

Пусть $A = \{x_n / n \in N\}$. Так как $x_n \to a((S)lim)$ и для любого n $x_n \neq a$, то A не является замкнутым в топологии S, а следовательно, не является (s)замкнутым. Пусть b - (s)точка прикосновения множества A, причём $b \notin A$. Тогда существует такая подпоследовательность (x_{n_k}), что $x_{n_k} \to b((s)lim)$. Пусть $B = \{x_{n_k} / k \in N\} \cup \{b\}$. Множество B (s)замкнуто, так как $(s)lim$ однозначен. Так как $x_n \to a((S)lim)$, то $x_{n_k} \to a((S)lim)$ и, следовательно, $a \in B$. Так как для любого k $x_{n_k} \neq a$, то $b = a$. Таким образом, $x_{n_k} \to a((s)lim)$.*

Задачи.

1. Пусть $(E,(s)lim)$ - секвенциальное пространство, определённое в з.4, п.1, S - секвенциальная топология. Какие множества входят в S?

2. Пусть $(S)lim$ - секвенциальный предел, определяемый топологией S, рассмотренной в предыдущей задаче. Доказать, что $(s)lim \neq (S)lim$.

3. Пусть $(s)lim$ - обычный предел на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. Какова соответствующая ему секвенциальная топология? Сравните её с обычной топологией на $\mathbb{R}$.

4. Пусть T - некоторая топология на E. Можно ли утверждать, что множество F замкнуто тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_n), где $x_n \in F$, $n \in N$, если $x_n \to a(T)$, то $a \in F$?

5. Пусть $(s)lim_1$ и $(s)lim_2$ - секвенциальные пределы на множестве E и S_1 и S_2 - соответствующие им секвенциальные топологии. Если $(s)lim_1 \subseteq (s)lim_2$, то $S_2 \subseteq S_1$. Доказать.

6. Пусть T_1 и T_2 - некоторые топологии на множестве E и lim_1 и lim_2 - соответствующие им пределы. Если $T_1 \subseteq T_2$, то $lim_2 \subseteq lim_1$. Доказать.

3. УРЫСОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ

Пусть $(\boldsymbol{E},(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$ - секвенциальное пространство.

Секвенциальный предел $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$ называется урысоновским, если он обладает следующим свойством. Для всякой последовательности $(\boldsymbol{x}_n)$, где $\boldsymbol{x}_n \in \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, если существует такой элемент $\boldsymbol{a}$, что для любой подпоследовательности $(\boldsymbol{x}_{n_k})$ существует её подпоследовательность $(\boldsymbol{x}_{n_{k_l}})$, ($\boldsymbol{s}$)сходящаяся к $\boldsymbol{a}$, т. е. $\boldsymbol{x}_{n_{k_l}} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$, то $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$.

Несложно показать, что обычный предел на $\mathbb{R}$ является урысоновским. Действительно, пусть числовая последовательность $(\boldsymbol{x}_n)$ удовлетворяет условию Урысона, т. е. существует такое $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$,что для любой подпоследовательности$(\boldsymbol{x}_{n_k})$ существует её подпоследовательность $(\boldsymbol{x}_{n_{k_l}})$ такая, что $\boldsymbol{x}_{n_{k_l}} \to \boldsymbol{a}(\boldsymbol{l} \to \infty)$, однако $\boldsymbol{x}_n \nrightarrow \boldsymbol{a}(\boldsymbol{n} \to \infty)$. Последнее означает, что существует такое $\boldsymbol{\varepsilon} \rangle 0$, что для всякого $\boldsymbol{k}$ найдётся $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{k}$ такое, что $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда существует подпоследовательность $(\boldsymbol{x}_{n_k})$, для которой при любом $\boldsymbol{k}$ $|\boldsymbol{x}_{n_k} - \boldsymbol{a}| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$. Такая последовательность не может содержать подпоследовательность, сходящуюся к $\boldsymbol{a}$.

<u>Теорема 1</u>. Если $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$ - однозначный урысоновский секвенциальный предел, то справедливо равенство $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim} = (\boldsymbol{S})\boldsymbol{lim}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{S})\boldsymbol{lim})$. Пусть $(\boldsymbol{x}_{n_k})$ - произвольная подпоследовательность последовательности $(\boldsymbol{x}_n)$. Тогда $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{S})\boldsymbol{lim})$. По теореме 4, п.2 существует такая последовательность $(\boldsymbol{x}_{n_{k_l}})$, что $\boldsymbol{x}_{n_{k_l}} \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$. Таким образом, по отношению к последовательности $(\boldsymbol{x}_n)$ выполнено условие Урысона, а значит, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim})$ и $(\boldsymbol{S})\boldsymbol{lim} \subseteq (\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$. Отсюда и из теоремы 2, п.2 следует доказываемое равенство.*

Задачи.

1. Доказать, что предел, определяемый произвольной топологией, урысоновский.
2. Показать, что секвенциальный предел, рассмотренный в з.4, п.1, урысоновским не является.
3. Если $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim}$ урысоновский, но не однозначный, то равенство $(\boldsymbol{s})\boldsymbol{lim} = (\boldsymbol{S})\boldsymbol{lim}$ может не выполняться. Привести пример.

4. ПОРЯДКОВЫЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ НА АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ

Пусть $\boldsymbol{E}$ - произвольное множество и $\mathcal{P}$ - класс всех подмножеств множества $\boldsymbol{E}$. Класс $\mathcal{P}$ вместе с теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и дополнения и отношением включения является алгеброй множеств и обозначается символом $\mathcal{P}(\cup,\cap,',\subseteq)$. Здесь символ $'$ означает переход к дополнению, так $A' = E \setminus A$ - дополнение множества $A \in \mathcal{P}$.

Пусть (X_n) - некоторая последовательность множеств из класса $\mathcal{P}$. Введём определения верхнего и нижнего пределов последовательности (X_n), положив

$$\overline{lim} X_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} X_n, \qquad \underline{lim} X_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} X_n.$$

Замечание. Отметим, что $a \in \overline{lim} X_n$ тогда и только тогда, когда $a \in X_n$ для бесконечно многих значений n; $a \in \underline{lim}\, X_n$ тогда и только тогда, когда $a \in X_n$ для всех достаточно больших значений n.

<u>Лемма 1</u>. Для любой последовательности (X_n)

$$\underline{lim}\, X_n \subseteq \overline{lim} X_n.$$

Доказательство. Следует из предыдущего замечания.*

<u>Лемма 2</u>. Для любой последовательности (X_n) и для любой её подпоследовательности (X_{n_k}) $\underline{lim}\, X_n \subseteq \underline{lim} X_{n_k} \subseteq \overline{lim} X_{n_k} \subseteq \overline{lim} X_n$.

Доказательство. Действительно, если $a \in \underline{lim}\, X_n$, то $a \in X_n$ для всех достаточно больших значений n. Тогда $a \in X_{n_k}$ для всех достаточно больших значений k. Следовательно, $a \in \underline{lim} X_{n_k}$ и первое включение доказано. Второе включение следует из Леммы 1. Последнее включение доказывается аналогично первому.*

Введём соответствие $(os)lim$ между классом последовательностей (X_n), где $X_n \in \mathcal{P}$, $n \in N$, и множеством $\mathcal{P}$, положив $X_n \to A(os)lim$, если $\underline{lim}\, X_n = \overline{lim} X_n = A$. (Здесь «о» от английского слова order – порядок).

<u>Теорема 1</u>. Соответствие $(os)lim$ является секвенциальным пределом.

Доказательство. Первое условие Фреше следует из определения верхнего и нижнего пределов, второе из леммы 2.*

Введённый предел называется порядковым секвенциальным пределом. Таким образом, последовательность (X_n) порядково секвенциально сходится к A, т. е. $X_n \to A(os)lim$, если $\overline{lim} X_n = \underline{lim}\, X_n = A$.

Докажем, что поряковый секвенциальный предел согласован с теоретико множественными операциями и отношением включения.

Лемма 3. Для любых последовательностей (X_n) и (Y_n), если для любого $n \in N$

$$X_n \subseteq Y_n \text{, то } \underline{lim}\, X_n \subseteq \underline{lim}\, Y_n .$$

Доказательство. Следует из определений верхнего и нижнего пределов и замечания о них.*

Лемма 4. Для любых последовательностей (X_n) и (Y_n), где $X_n, Y_n \in \mathcal{P}$, $n \in N$,

$$\underline{lim}\, X_n \cup \underline{lim}\, Y_n \subseteq \underline{lim}\, X_n \cup Y_n \subseteq \overline{lim}\, X_n \cup Y_n = \overline{lim}\, X_n \cup \overline{lim}\, Y_n .$$

Доказательство. Так как $X_n \subseteq X_n \cup Y_n$ и $Y_n \subseteq X_n \cup Y_n$, то по лемме 3 $\underline{lim}\, X_n \subseteq \underline{lim}\, X_n \cup Y_n$ и $\underline{lim}\, Y_n \subseteq \underline{lim}\, X_n \cup Y_n$, и первое включение доказано. Второе включение следует из Леммы 1.

Включение $\overline{lim}\, X_n \cup \overline{lim}\, Y_n \subseteq \overline{lim}\, X_n \cup Y_n$ также следует из леммы 3. Обратно, пусть $a \in \overline{lim}\, X_n \cup Y_n$. Тогда $a \in X_n \cup Y_n$ при бесконечно многих значениях n, а, следовательно, $a \in X_n$ при бесконечно многих значениях n или $a \in Y_n$ при бесконечно многих значениях n. Тогда $a \in \overline{lim}\, X_n$ или $a \in \overline{lim}\, Y_n$. В целом $a \in \overline{lim}\, X_n \cup \overline{lim}\, Y_n$ и

$\overline{lim}\, X_n \cup Y_n \subseteq \overline{lim}\, X_n \cup \overline{lim}\, Y_n$, отсюда следует последнее равенство.*

Теорема 2. Если для любого натурального n $X_n \subseteq Y_n$ и $X_n \to A(os)lim$ и $Y_n \to B(os)lim$, то $A \subseteq B$.

Доказательство. Следует из леммы 3 и определения $((os)lim)$.*

Теорема 2 говорит о согласованности $(os)lim$ с отношением включения.

<u>Теорема 3</u>. Если $X_n \to A(os)lim$ и $Y_n \to B(os)lim$, то

а) $X_n \cup Y_n \to A \cup B((os)lim)$;

б) $X_n \cap Y_n \to A \cap B((os)lim)$;

в) $X_n' \to A'((os)lim)$.

Доказательство.

а) Из леммы 4 и равенств $\overline{lim}\ X_n = \underline{lim}\ X_n = A$ и $\overline{lim}\ Y_n = \underline{lim}\ Y_n = B$ получаем

$A \cup B = \underline{lim}\ X_n \cup \underline{lim}\ Y_n \subseteq \underline{lim}\ X_n \cup Y_n \subseteq \overline{lim}\ X_n \cup Y_n = \overline{lim}\ X_n \cup \overline{lim}\ Y_n = A \cup B$.

Следовательно, $\overline{lim}\ X_n \cup Y_n = \underline{lim}\ X_n \cup Y_n = A \cup B$ и $X_n \cup Y_n \to A \cup B((os)lim)$.

в) Так как $X_n \to A((os)lim)$, то $\overline{lim}\ X_n = \underline{lim}\ X_n = A$, т. е. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n \ge m} X_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n \ge m} X_n = A$.

Тогда $\left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n \ge m} X_n\right)' = \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n \ge m} X_n\right)' = A'$.

Следовательно, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n \ge m} X_n' = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n \ge m} X_n' = A'$ и $X_n' \to A'(os)lim$.

б) Так как $X_n \to A((os)lim)$ и $Y_n \to B((os)lim)$, то $X_n' \to A'((os)lim)$ и $Y_n' \to B'((os)lim)$. Следовательно, $X_n' \cup Y_n' \to A' \cup B'((os)lim)$,

$\left(X_n' \cup Y_n'\right)' \to \left(A' \cup B'\right)'((os)lim)$ и $X_n \cap Y_n \to A \cap B((os)lim)$.*

Задачи.

1. Найти $(os)lim\, X_n$, если

   а) $X_n = \left[\frac{1}{n};\ 2 - \frac{1}{n}\right]$; $n \in N$;

   б) $X_n = \left[-\frac{1}{n};\ 2 + \frac{1}{n}\right]$; $n \in N$;

   в) $X_n = \left[\frac{1}{n};\ 2 + \frac{1}{n}\right]$; $n \in N$.

2. Найти $(os)lim\, X_n$, если

   а) $X_n = \left\{(x, y) \in R^2 / x + y < \frac{1}{n}\right\}$, $n \in N$;

б) $X_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \,/\, x + y \geq \dfrac{1}{n} \right\},\ n \in N$;

в) $X_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \,/ (x - n)^2 + y^2 \leq 1 \right\},\ n \in N$.

3. Найти $\overline{lim}\, X_n$ и $\underline{lim}\, X_n$, если $X_n = \left[(-1)^n \cdot n; +\infty \right)$.

4. Доказать, что монотонные последовательности порядково секвенциально сходятся, и найти их пределы.

5. Доказать, что для любых последовательностей (X_n) и (Y_n)

$$\underline{lim}\, X_n \cap \underline{lim}\, Y_n = \underline{lim}\, X_n \cap Y_n \subseteq \overline{lim}\, X_n \cap Y_n \subseteq \overline{lim}\, X_n \cap \overline{lim}\, Y_n .$$

6. Пусть $X_n \to A\,(os)lim$ и $Y_n \to B\,(os)lim$. Доказать, что

а) $X_n \setminus Y_n \to A \setminus B\big((os)lim \big)$;

б) X_nд$Y_n \to A$д$B\big((os)lim \big)$.

7. Доказать, что порядковый секвенциальный предел на алгебре множеств является урысоновским.

5. ПОРЯДКОВАЯ СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Поскольку любой секвенциальный предел определяет секвенциальную топологию, то можно рассматривать топологию, определяемую порядковым секвенциальным пределом $(os)lim$. Эта топология называется порядковой секвенциальной топологией и обозначается $\mathcal{O}s$.

Теорема 1. Порядковая секвенциальная топология на алгебре множеств хаусдорфово отделима.

Доказательство. Пусть E - произвольное множество, $(os)lim$ и $\mathcal{O}s$ - порядковый секвенциальный предел и порядковая секвенциальная топология на алгебре множеств $\mathcal{P}(\cup, \cap, ', \subseteq)$. Пусть $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$. Покажем, что A и B можно отделить непересекающимися открытыми множествами.

Так как $A \neq B$, то существует точка, входящая в одно из них и не входящая в другое. Пусть $a \in A$ и $a \notin B$. Рассмотрим множества $\mathcal{A} = \left\{ X \in \mathcal{P} \,/\, a \in X \right\}$ и $\mathcal{B} = \left\{ Y \in \mathcal{P} \,/\, a \notin X \right\}$. Отметим, что $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{P}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Докажем, что множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (os)замкнуты. Пусть C - точка прикосновения множества $\mathcal{A}$, т. е. существует такая последовательность (X_n), что $X_n \in \mathcal{A}$, $n \in N$, $X_n \to C\,\big((os)lim \big)$. Тогда $a \in X_n$ для любого $n \in N$ и $a \in C$. Следовательно, $C \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ -

*(os)*замкнуто. Пусть D точка прикосновения множества $\mathcal{B}$, т. е. существует такая последовательность (Y_n), что $Y_n \in \mathcal{B}$, $n \in N$, $Y_n \to D((os)lim)$. Тогда $a \notin Y_n$ при любом $n \in N$ и $a \notin D$. Следовательно, $D \in \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ - *(os)*замкнуто.

Так как $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ взаимно дополнительные множества, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *(os)*открыты. Таким образом, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - непересекающиеся окрестности точек A и B.*

Задачи.

1. Пусть $\mathcal{A} = \{ X \in \mathcal{P} / X_0 \subseteq X \}$, где X_0 - конечно. Доказать, что $\mathcal{A}$ - *(os)*замкнуто и *(os)*открыто.
2. Пусть $\mathcal{B} = \{ Y \in \mathcal{P} / X_0 \cap X = \varnothing \}$, где X_0 - конечно. Доказать, что $\mathcal{B}$ - *(os)*замкнуто и *(os)*открыто.
3. Пусть $\mathcal{A} = \{ X \in \mathcal{P} / X_0 \subseteq X \}$, где $X_0 \in \mathcal{P}$. Доказать, что $\mathcal{A}$ - *(os)*замкнуто. Можно ли утверждать, что $\mathcal{A}$ - *(os)*открыто?
4. Пусть $\mathcal{B} = \{ Y \in \mathcal{P} / X_0 \cap X = \varnothing \}$, где $X_0 \in \mathcal{P}$. Доказать, что $\mathcal{B}$ - *(os)*замкнуто. Можно ли утверждать, что $\mathcal{B}$ - *(os)*открыто?
5. Является ли класс измеримых по Жордану множеств, содержащихся в $E = [0;1]$, *(os)*замкнутым?
6. Является ли класс измеримых по Лебегу множеств, содержащихся в $E = [0;1]$, *(os)*замкнутым?
7. Является ли класс измеримых по Лебегу множеств, содержащихся в $E = [0;1]$, *(os)*замыканием класса измеримых по Жордану множеств, содержащихся в E?
8. Доказать, что $\mathcal{O}s$-топология на алгебре множеств является вполне несвязной.

6. СЕКВЕНЦИАЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Имея секвенциальные предельные переходы, естественно ввести соответствующее определение непрерывности отображения.

Пусть $(D(s)lim_D)$, $(E(s)lim_E)$ - секвенциальные пространства, $f : D \to E$ отображение множества D в E, $x_0 \in D$.

Отображение f называется <u>секвенциально непрерывным в точке x_0</u>, если для любой последовательности (x_n), где $x_n \in D$ $n \in N$, если $x_n \to x_0((s)lim_D)$, то $f(x_n) \to f(x_0)((s)lim_E)$.

Отображение f называется секвенциально непрерывным на некотором множестве, если оно секвенциально непрерывно в каждой точке этого множества. Отображение f секвенциально непрерывно, если оно секвенциально непрерывно всюду на области определения.

Отображение f называется топологически непрерывным в точке x_0 относительно топологий T_D и T_E, если для любой окрестности $U_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что для любого x, если $x \in V_{x_0}$, то $f(x) \in U_{f(x_0)}$.

Хорошо известно, что для функций действительной переменной секвенциальная непрерывность равносильна топологической.

Отметим некоторые свойства секвенциально непрерывных отображений.

Теорема 1. Если отображение секвенциально непрерывно, то прообраз любого секвенциально замкнутого множества секвенциально замкнут.

Доказательство. Пусть $f : D \to E$ - секвенциально непрерывное отображение, A - *(s)*замкнутое множество, $A \subseteq E$, $f^{-1}(A)$ - прообраз множества A. Докажем, что множество $f^{-1}(A)$ - *(s)*замкнуто. Пусть x_0 - *(s)*точка прикосновения множества $f^{-1}(A)$. Тогда найдётся такая последовательность (x_n), где $x_n \in f^{-1}(A)$, $n \in N$, что $x_n \to x_0((s)lim_D)$. Так как f - секвенциально непрерывно на D, то $f(x_n) \to f(x_0)((s)lim_E)$. Здесь $f(x_n) \in A$, $n \in N$. Следовательно, $f(x_0)$ - *(s)*точка прикосновения множества A, а значит, $f(x_0) \in A$, так как A - *(s)*замкнуто. Тогда $x_0 \in f^{-1}(A)$ и множество $f^{-1}(A)$ - *(s)*замкнуто.*

Теорема 2. Если отображение секвенциально непрерывно, то прообраз любого секвенциально открытого множества секвенциально открыт.

Доказательство. Следует из теоремы 1 переходом к дополнениям.*

Теорема 3. Если отображение секвенциально непрерывно, то оно непрерывно относительно секвенциальных топологий.

Доказательство. Пусть $(D(s)lim_D)$, $(E(s)lim_E)$ - секвенциальные пространства, и отображение $f : D \to E$ секвенциально непрерывно. Докажем, что отображение f непрерывно относительно секвенциальных топологий S_D и S_E. Как известно, отображение f топологического пространства в топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут. Пусть множество A замкнуто в топологии

S_E. Тогда A (s)замкнуто (относительно $(s)lim_E$). Тогда прообраз $f^{-1}(A)$ множества A (s)замкнут (относительно $(s)lim_D$), так как по условию отображение f секвенциально непрерывно. Тогда множество $f^{-1}(A)$ замкнуто в топологии S_D. Следовательно, по критерию непрерывности отображение f непрерывно.*

Обратное предложение неверно. Приведём пример. Пусть $E = D$ некоторые множества. Определим предел $(s)lim_D$, полагая, что сходятся все стационарные и почти стационарные последовательности к элементу, образующему такую последовательность, и только они. Положим, что в смысле предела $(s)lim_E$ сходятся только стационарные последовательности. Тогда секвенциальные топологии, соответствующие этим пределам, совпадают, $S_D = S_E$. Пусть $\varphi : D \to E$ - тождественное отображение. Как несложно проверить, отображение φ непрерывно относительно топологий S_D и S_E, но не является секвенциально непрерывным.

Выше изначальные предельные переходы были секвенциальными, топологии вводились на их основе. Можно изначально заданными считать топологии на области определения и множестве значений отображения, а предельные переходы определить на этой основе. Далее можно говорить о топологической непрерывности отображения или секвенциальной его непрерывности.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $f : D \to E$ - отображение множества D в множество E, T_D и T_E - топологии на D и E соответственно, $(T_D)lim$ и $(T_E)lim$ - соответствующие им пределы. Если отображение f непрерывно относительно топологий T_D и T_E, то оно секвенциально непрерывно относительно предельных переходов $(T_D)lim$ и $(T_E)lim$.

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0((T_D)lim)$, где $x_n \in D$, $n \in N$. Докажем, что $f(x_n) \to f(x_0)((T_E)lim)$. Пусть $U_{f(x_0)}$ - некоторая окрестность точки $f(x_0)$. Тогда в силу непрерывности отображения f относительно топологий T_D и T_E найдётся такая окрестность V_{x_0}, что для любого $x \in V_{x_0}$ $f(x) \in U_{f(x_0)}$. Так как $x_n \to x_0((T_D)lim)$, то по окрестности V_{x_0} найдётся такое $\mathscr{N}$, что для любого $n \geq \mathscr{N}$ $f(x_n) \in U_{f(x_0)}$, что и означает секвенциальную непрерывность отображения f.*

Обратное неверно. Приведём пример. Пусть $\mathscr{D}(x)$ - функция Дирихле, т. е.

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ - рациональное,} \\ 0, \text{ если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

Введём топологию $\mathcal{T}$ на области определения ℝ, полагая открытым любое множество ℝ\C, где C - где конечно или счётно. Значения этого отображения также принадлежат ℝ. Здесь ℝ будем рассматривать с обычной топологией. Отображение $\mathcal{D}$ секвенциально непрерывно, так как относительно топологии $\mathcal{T}$ сходятся только стационарные и почти стационарные последовательности. Однако оно не будет непрерывным, если x иррационально.

Задачи.

1. Показать, что предложения, обратные теоремам 1 и 2, неверны.
2. Пусть $(E,(s)lim)$ - секвенциальное пространство и $A \subseteq E$. Назовём множество A секвенциально компактным, если для любой последовательности (x_n), где $x_n \in A$, $n \in N$, существует её подпоследовательность (x_{n_k}) такая, что $x_{n_k} \to a((s)lim)$ и $a \in A$.

Доказать, что секвенциально непрерывный образ секвенциально компактного множества секвенциально компактен.

3. Пусть $(E,(s)lim)$ - секвенциальное пространство, S - секвенциальная топология и $A \subseteq E$. Если A - компактно относительно топологии S и $(s)lim$ однозначен, то A - секвенциально компактно (относительно $(s)lim$). Доказать.
4. Следует ли из секвенциальной компактности компактность относительно секвенциальной топологии?

§2. СХОДИМОСТИ И ТОПОЛОГИИ

1. НАПРАВЛЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И НАПРАВЛЕННОСТИ

Пусть $\mathcal{I}$ - некоторое множество, на котором определено бинарное отношение $\geq$. Отношение $\geq$ называется <u>направлением</u> на $\mathcal{I}$, если оно обладает следующими свойствами:

1) для любого $i \in \mathcal{I}$ $\quad i \geq i$ (рефлексивность);
2) для любых $i,j,k \in \mathcal{I}$, если $i \geq j$ и $j \geq k$, то $i \geq k$ (транзитивность);
3) для любых $i,j \in \mathcal{I}$ существует такой элемент $k \in \mathcal{I}$, что $k \geq i$ и $k \geq j$.

Множество вместе с направлением на нём, т. е. пара $(\mathscr{I},\geq)$, называется направленным множеством. Если элементы $i, j \in \mathscr{I}$ связаны отношением $i \geq j$, то говорят, что i следует за j.

Можно ввести двойственное отношение $\leq$, полагая $j \leq i$ тогда и только тогда, когда $i \leq j$. Если $j \leq i$, то говорят, что j предшествует i.

Примеры.

1. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с обычным отношением $\geq$, т. е. пара $(\mathbb{N}, \geq)$ - направленное множество.
2. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с обычными отношениями $\geq$ и $\leq$, т. е. пары $(\mathbb{R},\geqslant)$, $(\mathbb{R},\leqslant)$ – направленные множества.
3. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Положим $x \leq y$, если $\rho(x,a) \leq \rho(y,a)$, где $\rho(x,a), \rho(y,a)$ - расстояния от точек x и y до a. Тогда $(\mathbb{R},\leqslant)$ – направленное множество.
4. Пусть (E,T) - топологическое пространство, $x_0 \in E$, U - класс всех окрестностей точки x_0, $\subseteq$ - отношение включения. Тогда $(U,\subseteq)$ - направленное множество.

Направленностью называется любое отображение, определённое на направленном множестве.

Итак, пусть $(\mathscr{I},\geq)$ - направленное множество, E - некоторое множество и $x: \mathscr{I} \to E$ отображение $\mathscr{I}$ в E. Тогда это отображение является направленностью. Направленности обычно будем обозначать символом $(x_i)_{i\in\mathscr{I}}$, где $(\mathscr{I},\geq)$ - направленное множество.

Примером направленности является последовательность $(x_n)_{n\in N}$. При выборе направления на $\mathbb{R}$ любая функция, определённая на $\mathbb{R}$, становится направленностью. Можно рассматривать и часть $D \subseteq \mathbb{R}$ с указанием направления на D. Тогда произвольная функция, определённая на D, - направленность.

2. ПРЕДЕЛ НАПРАВЛЕННОСТИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть (E,T) - топологическое пространство, $(\mathscr{I},\geq)$ - направленное множество, $(x_i)_{i\in\mathscr{I}}$, где $x_i \in E$, $i \in \mathscr{I}$, - направленность.

Направленность $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ называется сходящейся к элементу $a\in E$, если для любой окрестности $\mathcal{U}_a$ элемента a найдётся такое $i_0\in\mathcal{I}$, что для любого $i\geq i_0$ $x_i\in\mathcal{U}_a$. Соответствующая запись следующая $x_i\to a((T)lim)$.

Предел $(T)lim\,x_i$ - класс всех элементов, к которым направленность $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ сходится. Таким образом, если $x_i\to a((T)lim)$, то $a\in((T)lim\,x_i)$. Верно и обратное.

Примеры.

1. Пусть $(x_n)_{n\in N}=\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in N}$ - данная последовательность, определённая на направленном множестве ($\mathbb{N},\geqslant$), и ($\mathbb{R}$, T) – множество действительных чисел с обычной топологией на нём. Тогда $x_n\to 0((T)lim)$.

2. Пусть $f(x)=arctg\,x$ - данная функция со значениями в топологическом пространстве ($\mathbb{R}$, T), где T - обычная топология на $\mathbb{R}$. Вводя различные направления на области определения $\mathbb{R}$ этой функции, получим следующее:

а) Относительно направления $\geq$ на $\mathbb{R}$

$$f(x)\to\frac{\pi}{2}((T)lim).$$

б) Относительно направления $\leq$ на $\mathbb{R}$

$$f(x)\to-\frac{\pi}{2}((T)lim).$$

в) Относительно направления на $\mathbb{R}$, определённого в примере 3, п. 1, где $a=0$,

$$f(x)\to 0((T)lim).$$

3. Пусть (E,T) - топологическое пространство, $a\in E$, $\mathcal{U}_a$ - некоторая окрестность точки a, $U=\{\mathcal{U}_a\}$ - класс всех окрестностей точки a. Множество U вместе с отношением включения $\subseteq$, т. е. $(U,\subseteq)$, - направленное множество. Введём отображение $\varphi:U\to E$, поставив в соответствие каждой окрестности $\mathcal{U}_a$ некоторую точку $x\in\mathcal{U}_a$. Поскольку $(U,\subseteq)$ - направленное множество, то отображение $(\varphi(\mathcal{U}_a))_{\mathcal{U}_a\in U}$ - направленность. Установим, что $\varphi(\mathcal{U}_a)\to a((T)lim)$. Действительно, для любой окрестности $\mathcal{U}_a$ найдётся такой индекс из множества U, можно взять $\mathcal{U}_a\in U$, что для любого индекса $\mathcal{V}_a\in U$, для которого $\mathcal{V}_a\subseteq\mathcal{U}_a$, $\varphi(\mathcal{V}_a)\in\mathcal{U}_a$. Последнее следует из определения φ, поскольку $\varphi(\mathcal{V}_a)=x\in\mathcal{V}_a\subseteq\mathcal{U}_a$.

Рассмотрим определение точки прикосновения множества. Пусть (E,T) - топологическое пространство, $A \subseteq E$. Как известно, точка $a \in E$ называется <u>точкой прикосновения</u> множества A, если для любой окрестности $\mathscr{U}_a$ точки a найдётся точка $x \in A \cap \mathscr{U}_a$.

<u>Теорема 1</u>. Точка a является точкой прикосновения множества A тогда и только тогда, когда существует такая направленность $(x_i)_{i \in \mathscr{I}}$, где $x_i \in A$, $i \in \mathscr{I}$, что $x_i \to a((T)lim)$.

Доказательство. Если a - точка прикосновения множества A, то, сопоставляя каждой окрестности $\mathscr{U}_a$ точку $x \in A \cap \mathscr{U}_a$, получим направленность, сходящуюся к a (см. пример 4 п.1). Обратное очевидно.*

Рассмотрим определение непрерывного отображения.
Пусть (D,T_D) и (E,T_E) - топологические пространства, $f: D \to E$ отображение D в E, $x_0 \in D$. Как известно, отображение f называется непрерывным в точке x_0, если для любой окрестности $\mathscr{U}_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ найдётся такая окрестность $\mathscr{V}_{x_0}$, что любой точки $x \in \mathscr{V}_{x_0}$ $f(x_0) \in \mathscr{U}_{f(x_0)}$.

<u>Теорема 2</u>. Отображение $f: D \to E$ непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой направленности $(x_i)_{i \in \mathscr{I}}$, где $x_i \in D$, $i \in \mathscr{I}$, если $x_i \to x_0((T_D)lim)$, то $f(x_i) \to f(x_0)((T_E)lim)$.

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно в точке x_0 и пусть $(x_i)_{i \in \mathscr{I}}$ некоторая направленность, сходящаяся к точке x_0, т. е. $x_i \to x_0((T_D)lim)$. Докажем, что $f(x_i) \to f(x_0)((T_E)lim)$. Действительно, пусть $\mathscr{U}_{f(x_0)}$ - некоторая окрестность точки $f(x_0)$. Тогда в силу непрерывности отображения f в точке x_0 найдётся такая окрестность $\mathscr{V}_{x_0}$ точки x_0, что для любой точки $x \in \mathscr{V}_{x_0}$ $f(x_0) \in \mathscr{U}_{f(x_0)}$. Поскольку $x_i \to x_0((T_D)lim)$, то по окрестности $\mathscr{V}_{x_0}$ найдётся такой индекс $i_0 \in \mathscr{I}$, что для любого $i \geq i_0$ $x_i \in \mathscr{V}_{x_0}$. В целом для произвольной окрестности $\mathscr{U}_{f(x_0)}$ найдётся такой индекс $i_0 \in \mathscr{I}$, что для любого $i \geq i_0$ $f(x_0) \in \mathscr{U}_{f(x_0)}$, что и означает, что $f(x_i) \to f(x_0)((T_E)lim)$.

Обратное докажем от противного. Пусть отображение f не является непрерывным в точке x_0. Тогда существует такая окрестность $\mathscr{U}_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$, что для любой окрестности $\mathscr{V}_{x_0}$ точки x_0 найдётся такое $x \in \mathscr{V}_{x_0}$, что $f(x_0) \notin \mathscr{U}_{f(x_0)}$. Пусть U - класс всех окрестностей точки x_0. Рассмотрим отображение $\varphi : U \to E$, сопоставив окрестности $\mathscr{V}_{x_0} \in U$ ту точку $x \in \mathscr{V}_{x_0}$, для которой $f(x) \notin \mathscr{U}_{f(x_0)}$. Тогда $\varphi(\mathscr{V}_{x_0}) \to x_0((T_D)\,lim)$ (см. пример 4, п. 1). Однако соответствующая направленность $\left(f\left(\varphi(\mathscr{V}_{x_0})\right)\right)_{\mathscr{V}_{x_0} \in U}$ не сходится к $f(x_0)$, поскольку все значения этой направленности находятся вне окрестности $\mathscr{U}_{f(x_0)}$.*

Задачи.

1. Пусть E - некоторое множество и $\mathscr{P}$ - класс всех его подмножеств. Является ли отношение включения $\subseteq$ на $\mathscr{P}$ - направлением?

2. Пусть $\geq$ - отношение порядка на множестве $\mathscr{I}$. Можно ли утверждать, что оно является направлением?

3. Пусть $(\mathscr{I}, \geq)$ - направленное множество и $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$. Можно ли утверждать, что $(\mathscr{J}, \geq)$ - направленное множество?

4. Найти $(T)\,lim\, f(x)$ по каждому из направленных множеств (ℝ, $\geq$) и (ℝ, $\leq$), если

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}; \qquad \text{б) } f(x) = e^x,$$

а топология на ℝ обычная.

5. Пусть $f:$ ℝ→ℝ, где $f(x) = x$. Существуют ли топологии на ℝ, относительно которых отображение f разрывно?

6. Пусть $\mathscr{D}:$ ℝ→ℝ, где $\mathscr{D}(x)$ - функция Дирихле. Существуют ли топологии на ℝ, относительно которых отображение $\mathscr{D}$ непрерывно?

3. ПОДНАПРАВЛЕННОСТИ

Пусть $(\mathscr{I}, \geq)$ и $(\mathscr{J}, \geq)$ - некоторые направленные множества, и $(x_i)_{i \in \mathscr{I}}$ направленность, определённая на $\mathscr{I}$.

Пусть $i : \mathscr{J} \to \mathscr{I}$ - такая направленность, что для любого $i_0 \in \mathscr{I}$ найдётся такое $j_0 \in \mathscr{J}$, что для любого $j \geq j_0$ $\ i(j) \geq i_0$. Направленности, обладающие этим свойством, назовём допустимыми. Множество значений направленности как бы пронизывает множество $\mathscr{I}$ в направлении $\geq$. Для числовой последовательности $(n_k)_{k \in N}$, где $n_k \in$ ℕ, $k \in$ ℕ, допустимость означает, что для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ найдётся такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $k \geq k_0$ $\quad n_k \geq n_0$, т. е. $n_k \to \infty \ (k \to \infty)$.

Приведём пример и контрпример.

Возьмём направленные множества $(\mathbb{R}, \geq)$ и $(\mathbb{N}, \geq)$ и направленность $m: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $m(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что эта направленность является допустимой. Если же рассмотреть направленность $p: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $p(n) = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то такая направленность допустимой не будет.

Введём определение поднаправленности.

Пусть $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ - некоторая направленность, определённая на $(\mathcal{I}, \geq)$, и $(\mathcal{J}, \geq)$ некоторое направленное множество. Направленность $(y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ называется <u>поднаправленностью</u> направленности $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$, если существует такая направленность $i: \mathcal{J} \to \mathcal{I}$, что

1. для любого $j \in \mathcal{J}$ $\quad y_j = x_{i(j)}$, т. е. $y = x \circ i$;
2. направленность $i: \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ допустима.

Заметим, что для произвольной последовательности $(x_n)_{n \in N}$ любая её подпоследовательность (x_{n_k}) является поднаправленностью, поскольку $n_k \to +\infty \ (k \to +\infty)$. Однако для последовательности определения подпоследовательности и поднаправленности не эквивалентны. Приведём примеры.

Рассмотрим обычную последовательность натуральных чисел $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ и последовательности $(1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \ldots)$ и $(2, 1, 4, 3, \ldots, 2n, 2n-1 \ldots)$, которые не являются её подпоследовательностями при обычном определении подпоследовательности, поскольку обычно предполагается, что последовательность номеров (n_k) возрастает. Заметим, что направленности

$p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $p(k) = \left[\frac{k-1}{2}\right] + 1$, $k \in \mathbb{N}$, и $q: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $q(k) = k + (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, допустимы, поскольку и $p(k) \to +\infty \ (k \to +\infty)$ и $q(k) \to +\infty \ (k \to +\infty)$. Поэтому для направленности $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $m(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, каждая из композиций $m \circ p$ и $m \circ q$ - поднаправленности, т. е. рассмотренные выше последовательности $(1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \ldots)$ и $(2, 1, 4, 3, \ldots, 2n, 2n-1 \ldots)$ - поднаправленности исходной направленности $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$.

Более того, пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$, где $\varphi(x) = [\, x \,] + 1$, $x \in \mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \}$, и $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $m(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда их композиция $p = m \circ \varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ - поднаправленность направленности $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, поскольку направленность φ - допустима. Взяв допустимую направленность $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$, где $\psi(x) = 2[\, x \,] + 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, получим поднаправленность $q = m \circ \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$.

Как показывают эти примеры, области определения основной направленности и её поднаправленности могут быть существенно разными.

Основной способ выделения поднаправленностей – переход к конфинальной части области определения основной направленности. Пусть $(\mathcal{I}, \geq)$ - направленное множество, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Говорят, что множество $\mathcal{J}$ конфинально $\mathcal{I}$, если для любого $i \in \mathcal{I}$ найдётся $j \in \mathcal{J}$, что $j \geq i$. Здесь сохраняется идея пронизывания множества, как угодно далеко во множестве $\mathcal{I}$ найдётся элемент, принадлежащий $\mathcal{J}$.

Приведём пример конфинального множества и контрпример.

Рассмотрим направленные множества $(\mathbb{R}, \geqslant)$, $(\mathbb{N}, \geqslant)$ и $(E, \geq)$, где $E = [0;1]$. Тогда $\mathbb{N}$ конфинально $\mathbb{R}$, а E не конфинально $\mathbb{R}$.

Если $\mathcal{J}$ конфинально $\mathcal{I}$, тождественное отображение $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$, где $\varphi(j) = j$, $j \in \mathcal{J}$, является допустимым, а, следовательно, для произвольной направленности $x : \mathcal{I} \to E$ композиция $x \circ \varphi$ будет её поднаправленностью. Таким образом, любое сужение основной направленности $x : \mathcal{I} \to E$ на произвольную конфинальную часть $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ можно рассматривать как поднаправленность исходной направленности. Такое сужение на правильную часть множества $\mathbb{N}$ не является подпоследовательностью в обычном понимании, поскольку по определению последовательность определена на множестве всех натуральных чисел.

Можно ввести определение частичного предела направленности как элемента, к которому сходится некоторая направленность.

Возникает вопрос, как связано множество всех частичных пределов и множество элементов, к которым сходятся поднаправленности, являющиеся сужениями на конфинальные множества? Равны ли эти множества?

Задачи.

1. Доказать, что любая поднаправленность сходящейся направленности сходится к тому же элементу.

2. Для направленных множеств ($\mathbb{R},\geq$), ($\mathbb{R}, \leq$) указать счётные конфинальные им подмножества.

3. Пусть $(\mathcal{I},\geq)$ - направленное множество и $\mathcal{J}$ конфинально $\mathcal{I}$. Доказать, что $(\mathcal{J},\geq)$ - направленное множество.

4. Для направленности $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\sin x}$, определённой на ($\mathbb{R}, \geq$), указать сходящиеся поднаправленности.

5. Можно ли утверждать, что произвольное направленное множество имеет счётное конфинальное ему подмножество?

6. Можно ли утверждать, что произвольная направленность имеет счётную поднаправленность?

7. Если направленное множество $(\mathcal{I},\geq)$ разбивается на такие части $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, что $\mathcal{I}=\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2$, то хотя бы одно из множеств $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ конфинально $\mathcal{I}$. Доказать.

8. Пусть $(\mathcal{I},\geq)$ - направленное множество, $\mathcal{J}$ конфинально $\mathcal{I}$ и $\mathcal{K}$ конфинально $\mathcal{J}$. Доказать, что $\mathcal{K}$ конфинально $\mathcal{I}$.

4. ПРЕДЕЛ НА КЛАССЕ НАПРАВЛЕННОСТЕЙ

Предел на классе направленностей можно ввести подобно тому, как был введён секвенциальный предел – предел на классе последовательностей.

Пусть $\boldsymbol{E}$ - некоторое множество, $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ - направленность со значениями в множестве $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\Phi}$ - класс всех направленностей со значениями в $\boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$ соответствие между классом направленностей $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{E}$. То, что направленности $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ соответствует элемент $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{E}$ при соответствии $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$, обозначим так: $\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{a}((\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim})$. (здесь «n» от английского термина net, которому соответствует русский термин направленность.)

Говорят, что соответствие $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$ удовлетворяет условиям Фреше, если

1) для любой стационарной направленности $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$, т. е. такой, что для некоторого $a\in E$ и для любого $i\in\mathcal{I}$ $x_i=a$, $x_i\to a((n)lim)$;

2) для любой направленности $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ и для любой её поднаправленности $(y_j)_{j\in\mathcal{J}}$, если $x_i\to a((n)lim)$, то $y_j\to a((n)lim)$.

Соответствие, удовлетворяющее условиям Фреше, называется <u>пределом</u> на классе направленностей или <u>сходимостью</u> на этом классе.

Если соответствие $((n)lim)$ удовлетворяет условиям Фреше, то запись $x_i\to a((n)lim)$ читается так: направленность $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ сходится к a относительно сходимости $(n)lim$.

$(n)lim\, x_i$ - это класс всех элементов, к которым направленность $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ сходится. Этот класс может состоять из одного элемента или более, а может оказаться пустым. Для любой направленности $(n)lim\, x_i$ имеет вполне определенный смысл, это некоторое множество, возможно, пустое. Ясно, что записи $x_i\to a((n)lim)$, $((x_i)_{i\in\mathcal{I}},a)\in(n)lim$, $a\in(n)lim\, x_i$ равнозначны.

Примеры сходимостей.

1. Пусть E - произвольное множество. Сопоставив каждой стационарной направленности образующей её элемент из множества E, получим сходимость.

2. Пусть (E,T) - топологическое пространство. Предел $(T)lim$, определяемый топологией T, сходимость.

3. Секвенциальный предел, определённый для E и продолженный на класс всех стационарных направленностей со значениями в E, и поднаправленностей секвенциально сходящихся последовательностей, является сходимостью.

5. ТОПОЛОГИЯ СХОДИМОСТИ

Топология, определяемая пределом на классе направленностей, вводится аналогично секвенциальной топологии.

Пусть $(E,(n)lim)$ - пространство со сходимостью $(n)lim$ на классе направленностей со значениями в множестве E, $A\subseteq E$ и $a\in E$.

Точка a называется <u>(n)точкой прикосновения</u> множества A, если существует такая направленность $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$, где $x_i\in A$, $i\in\mathcal{I}$, что $x_i\to a\,((n)lim)$.

Множество $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$ всех ($\boldsymbol{n}$)точек прикосновения множества $\boldsymbol{A}$ называется ($\boldsymbol{n}$)замыканием множества $\boldsymbol{A}$. Отметим, что всегда $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$.

Множество $\boldsymbol{A}$ называется ($\boldsymbol{n}$)замкнутым, если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$.

Множество $\boldsymbol{A}$ называется ($\boldsymbol{n}$)открытым, если $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{A}$ - ($\boldsymbol{n}$)замкнуто.

Пусть $\mathscr{U}$ - класс всех ($\boldsymbol{n}$)открытых множеств.

Теорема 1. Класс $\mathscr{U}$ - топология на $\boldsymbol{E}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{U}'$ - класс всех ($\boldsymbol{n}$)замкнутых множеств. Тогда очевидно, что $\varnothing, \boldsymbol{E} \in \mathscr{U}'$.

Пусть множества $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ ($\boldsymbol{n}$)замкнуты. Докажем, что $\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2$ ($\boldsymbol{n}$)замкнуто. Пусть $\boldsymbol{a}$ - ($\boldsymbol{n}$)точка прикосновения множества $\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2$. Тогда существует такая направленность $(\boldsymbol{x}_i)_{i \in \mathscr{I}}$, где $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{i} \in \mathscr{I}$, что $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim})$. Пусть $\mathscr{I}_1$ - множество всех тех значений $\boldsymbol{i}$, для которых $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{A}_1$, $\mathscr{I}_2$ - множество всех тех значений $\boldsymbol{i}$, для которых $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{A}_2$. Тогда $\mathscr{I}_1 \cup \mathscr{I}_2 = \mathscr{I}$, а значит, $\mathscr{I}_1$ или $\mathscr{I}_2$ конфинально $\mathscr{I}$. Действительно, если $\mathscr{I}_1$ не конфинально $\mathscr{I}$, то существует такое $\boldsymbol{i}_1 \in \mathscr{I}$, что для любого $\boldsymbol{i} \in \mathscr{I}_1$ $\boldsymbol{i} \not\geq \boldsymbol{i}_1$, и аналогично, если $\mathscr{I}_2$ не конфинально $\mathscr{I}$, то существует такое $\boldsymbol{i}_2 \in \mathscr{I}$, что для любого $\boldsymbol{i} \in \mathscr{I}_2$ $\boldsymbol{i} \not\geq \boldsymbol{i}_2$. Так как $\mathscr{I}$ - направленное множество и $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2 \in \mathscr{I}$, то существует такое $\boldsymbol{i}_0 \in \mathscr{I}$, что $\boldsymbol{i}_0 \geq \boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_0 \geq \boldsymbol{i}_2$. Так как $\mathscr{I}_1 \cup \mathscr{I}_2 = \mathscr{I}$, то $\boldsymbol{i}_0 \in \mathscr{I}_1$ или $\boldsymbol{i}_0 \in \mathscr{I}_2$, а это противоречит предыдущему. Тогда сужение направленности $(\boldsymbol{x}_i)_{i \in \mathscr{I}}$ на конфинальную часть множества $\mathscr{I}$ будет поднаправленностью этой направленности. В силу второго условия Фреше эта поднаправленность ($\boldsymbol{n}$)сходится к $\boldsymbol{a}$. Следовательно, точка $\boldsymbol{a}$ - ($\boldsymbol{n}$)точка прикосновения множества $\boldsymbol{A}_1$ или $\boldsymbol{A}_2$. Значит, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}_1$ или $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}_2$, так как каждое из этих множеств ($\boldsymbol{n}$)замкнуто. Следовательно, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2$. Отсюда следует ($\boldsymbol{n}$)замкнутость любого конечного объединения ($\boldsymbol{n}$)замкнутых множеств.

Пусть $(\boldsymbol{A}_k)_{k \in \mathscr{K}}$ - семейство ($\boldsymbol{n}$)замкнутых множеств. Докажем, что $\bigcap\limits_{k \in \mathscr{K}} \boldsymbol{A}_k$ ($\boldsymbol{n}$)замкнуто. Пусть точка $\boldsymbol{a}$ - ($\boldsymbol{n}$)точка прикосновения множества $\bigcap\limits_{k \in \mathscr{K}} \boldsymbol{A}_k$. Тогда существует такая направленность $(\boldsymbol{x}_i)_{i \in \mathscr{I}}$, что для любого $\boldsymbol{i} \in \mathscr{I}$ $\boldsymbol{x}_i \in \bigcap\limits_{k \in \mathscr{K}} \boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim})$. Отсюда следует, что для любого $\boldsymbol{k} \in \mathscr{K}$ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}_k$, так как $\boldsymbol{A}_k$ ($\boldsymbol{n}$)замкнуто, и, следовательно, $\boldsymbol{a} \in \bigcap\limits_{k \in \mathscr{K}} \boldsymbol{A}_k$.*

Введённая топология $\mathscr{N}$ называется <u>топологией сходимости</u>.

Некоторая топология $\boldsymbol{T}$ называется <u>согласованной</u> с пределом $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$, если для всякой направленности $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathscr{I}}$ из предположения, что $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim})$ следует, что $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{T})\boldsymbol{lim})$.

<u>Теорема 2</u>. Топология сходимости $\mathscr{N}$ согласована с исходным пределом $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$.

Доказательство. От противного. Пусть $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim})$, но $\boldsymbol{x}_i \nrightarrow \boldsymbol{a}((\mathscr{N})\boldsymbol{lim})$. Тогда существует такая $(\boldsymbol{n})$открытая окрестность $\mathscr{U}_a$ точки $\boldsymbol{a}$, что для любого $\boldsymbol{i}\in\mathscr{I}$ существует такое $\boldsymbol{j}\geq\boldsymbol{i}$, что $\boldsymbol{x}_j \notin \mathscr{U}_a$. Пусть $\mathscr{J}$ - множество всех значений $\boldsymbol{j}\in\mathscr{I}$, при которых $\boldsymbol{x}_j \notin \mathscr{U}_a$. Тогда по определению конфинального множества $\mathscr{J}$ конфинально $\mathscr{I}$. Следовательно, сужение направленности $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathscr{I}}$ на множество $\mathscr{J}$ - поднаправленность исходной направленности. По второму условию Фреше поднаправленность $(\boldsymbol{x}_j)_{j\in\mathscr{J}}$ $(\boldsymbol{n})$сходится к $\boldsymbol{a}$. При этом для любого $\boldsymbol{i}\in\mathscr{J}$ $\boldsymbol{x}_i \in \mathscr{U}_a' = \boldsymbol{E}\setminus\mathscr{U}_a$. Множество $\mathscr{U}_a'$ $(\boldsymbol{n})$замкнуто как дополнение $(\boldsymbol{n})$открытого множества $\mathscr{U}_a$. Следовательно, $\boldsymbol{a}\in\mathscr{U}_a'$. Но $\boldsymbol{a}\in\mathscr{U}_a$, поскольку $\mathscr{U}_a$- окрестность точки $\boldsymbol{a}$. Так как $\mathscr{U}_a' \cap \mathscr{U}_a = \varnothing$, то противоречие получено.*

<u>Теорема 3</u>. Топология сходимости $\mathscr{N}$ - максимальная топология, согласованная с $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{T}$ - некоторая топология, согласованная с $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$. Докажем, что $\boldsymbol{T}\subseteq\mathscr{N}$. Для этого достаточно доказать, что любое $(\boldsymbol{T})$замкнутое множество $(\boldsymbol{n})$замкнуто. Пусть множество $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{T})$замкнуто. Пусть $\boldsymbol{a}$ - $(\boldsymbol{n})$точка прикосновения множества $\boldsymbol{A}$. Тогда существует такая направленность $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathscr{I}}$, что $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}\in\mathscr{I}$ и $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim})$. Тогда $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}((\boldsymbol{T})\boldsymbol{lim})$, так как топология $\boldsymbol{T}$ согласована с $(\boldsymbol{n})\boldsymbol{lim}$. Следовательно, $\boldsymbol{a}$ - $(\boldsymbol{T})$точка прикосновения множества $\boldsymbol{A}$, а значит, $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$, так как по условию $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{T})$замкнуто. Таким образом, любая $(\boldsymbol{n})$точка прикосновения множества $\boldsymbol{A}$ входит в $\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{n})$замкнуто.*

6. ПОРЯДКОВЫЙ ПРЕДЕЛ И ПОРЯДКОВАЯ ТОПОЛОГИЯ

Определения порядкового предела и порядковой топологии на алгебре множеств аналогичны определениям порядкового секвенциального предела и порядковой секвенциальной топологии.

Пусть $\boldsymbol{E}$ - некоторое множество, $\mathcal{P}$ - класс всех его подмножеств, $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ - некоторая направленность со значениями в $\mathcal{P}$, $(\mathcal{I},\geq)$ - направленное множество.

Введём определения верхнего и нижнего пределов направленности, полагая

$$\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i = \bigcap_{j\in\mathcal{I}}\bigcup_{i\geq j}\boldsymbol{X}_i\,, \qquad \underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i = \bigcup_{j\in\mathcal{I}}\bigcap_{i\geq j}\boldsymbol{X}_i\,.$$

Очевидно, что

а) элемент $\boldsymbol{a}\in\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i$ тогда и только тогда, когда для любого $\boldsymbol{j}\in\mathcal{I}$ существует такое $\boldsymbol{i}\geq\boldsymbol{j}$, что $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X}_i$;

б) элемент $\boldsymbol{a}\in\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i$ тогда и только тогда, когда существует такое $\boldsymbol{j}\in\mathcal{I}$, что для любого $\boldsymbol{i}\geq\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X}_i$.

Заметим, что для любой направленности $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathcal{I}}\quad\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i\subseteq\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i$.

Введём соответствие $(\boldsymbol{o})\boldsymbol{lim}$ на классе направленностей, полагая $\boldsymbol{X}_i\to\boldsymbol{A}((\boldsymbol{o})\boldsymbol{lim})$, если

$$\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i = \underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{A}\,.$$

Несложно показать, что соответствие $(\boldsymbol{o})\boldsymbol{lim}$ удовлетворяет первому условию Фреше. Второе условие Фреше доказывается на основании следующей леммы.

<u>Лемма 1</u>. Для любой направленности $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ и для любой её поднаправленности $(\boldsymbol{Y}_j)_{j\in\mathcal{J}}$

$\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i\subseteq\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j\subseteq\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j\subseteq\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}\in\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i$. Тогда найдётся такое $\boldsymbol{i}_0\in\mathcal{I}$, что для любого $\boldsymbol{i}\geq\boldsymbol{i}_0$ $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X}_i$. Так как $(\boldsymbol{Y}_j)_{j\in\mathcal{J}}$ - поднаправленность направленности $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathcal{I}}$, то по определению поднаправленности существует такое отображение $\boldsymbol{i}:\mathcal{J}\to\mathcal{I}$, что для любого $\boldsymbol{j}\in\mathcal{J}\quad\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{X}_{i(j)}$, а для выделенного значения $\boldsymbol{i}_0\in\mathcal{I}$ найдётся такое $\boldsymbol{j}_0\in\mathcal{J}$, что для любого $\boldsymbol{j}\geq\boldsymbol{j}_0\quad\boldsymbol{i}(\boldsymbol{j})\geq\boldsymbol{i}_0$. Тогда для любого $\boldsymbol{j}\geq\boldsymbol{j}_0\quad\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X}_{i(j)}=\boldsymbol{Y}_j$. Следовательно, $\boldsymbol{a}\in\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j$ и $\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{X}_i\subseteq\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j$.

Включение $\underline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j\subseteq\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j$ верно для любой направленности, что отмечалось.

Пусть $\boldsymbol{a}\in\overline{\boldsymbol{lim}}\,\boldsymbol{Y}_j$. Докажем, что для любого $\boldsymbol{i}_0\in\mathcal{I}$ найдётся такое $\boldsymbol{i}\geq\boldsymbol{i}_0$, что $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X}_i$. Действительно, так как $(\boldsymbol{Y}_j)_{j\in\mathcal{J}}$ - поднаправленность направленности $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathcal{I}}$, то существует такое отображение $\boldsymbol{i}:\mathcal{J}\to\mathcal{I}$, что для любого $\boldsymbol{j}\in\mathcal{J}\quad\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{X}_{i(j)}$, а для произвольного $\boldsymbol{i}_0\in\mathcal{I}$ найдётся такое $j_0 \in \mathcal{J}$, что для любого $j \geq j_0$ $\quad i(j) \geq i_0$. Поскольку $a \in \overline{lim}\, Y_j$, то для любого $j_0 \in \mathcal{J}$ найдётся $j \geq j_0$, что $a \in Y_j$. А так как $Y_j = X_{i(j)}$ и $i = i(j) \geq i_0$, то и получаем, что $a \in X_i$, где $i \geq i_0$. Следовательно, $a \in \overline{lim}\, X_i$ и последнее включение установлено.*

Как следует из леммы, если $\overline{lim}\, X_i = \underline{lim}\, X_i = A$, то для любой поднаправленности $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ $\quad \overline{lim}\, Y_j = \underline{lim}\, Y_j = A$, т. е. $Y_j \to A((os)lim)$. Следовательно, соответствие $(o)lim$ удовлетворяет и второму условию Фреше, а значит, является пределом на алгебре множеств.

Введённый предел $(o)lim$ называется <u>порядковым пределом</u>, а определяемая им топология $\mathcal{V}$ <u>порядковой топологией</u>.

Приведём пример порядково сходящейся направленности.

Пусть $(A_x)_{x \in R^+}$ - данная направленность, где $A_x = \left[a - \frac{1}{x},\ a + \frac{1}{x} \right] \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \}$ и на $\mathbb{R}^+$ выбрано направление $\geq$. Тогда

$$\overline{lim}\, A_x = \bigcap_{t \in R^+} \bigcup_{x \geq t} \left[a - \frac{1}{x},\ a + \frac{1}{x} \right] = \bigcap_{t \in R^+} \left[a - \frac{1}{t},\ a + \frac{1}{t} \right] = \{ a \},$$

$$\underline{lim}\, A_x = \bigcup_{t \in R^+} \bigcap_{x \geq t} \left[a - \frac{1}{x},\ a + \frac{1}{x} \right] = \bigcap_{t \in R^+} \{ a \} = \{ a \}.$$

Следовательно, $A_x \to \{ a \}((o)lim)$.

(Если на $\mathbb{R}^+$ выбрать противоположное направление $\leq$, то получится, что $\overline{lim}\, A_x = \underline{lim}\, A_x = \mathbb{R}$.)

<u>**Теорема1**</u>. Если $X_i \to A\,((o)lim)$, $Y_i \to B\,((o)lim)$ и для любого $i \in \mathcal{I}$ $\quad X_i \subseteq Y_i$, то $A \subseteq B$.

Доказательство. Из определения верхнего и нижнего пределов следует, что для любых направленностей $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ и $(Y_i)_{i \in \mathcal{I}}$, если для любого $i \in \mathcal{I}$ $\quad X_i \subseteq Y_i$, то $\overline{lim}\, X_i \subseteq \overline{lim}\, Y_i$ и $\underline{lim}\, X_i \subseteq \underline{lim}\, Y_i$. А тогда включение $A \subseteq B$ становится очевидным.*

Теорема 2. Если $X_i \to A\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$, $Y_i \to B\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$, то

а) $X_i \cup Y_i \to A \cup B\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$;

б) $X_i \cap Y_i \to A \cap B\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$;

в) $X_i' \to A'\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$.

Лемма 2. Для любых двух направленностей $(X_i)_{i\in\wp}$ и $(Y_i)_{i\in\wp}$

$\underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \underline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i \subseteq \underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i \subseteq \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i = \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \overline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i$.

Доказательство. Включение $\underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \underline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i \subseteq \underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i$ верно, так как для любого $i \in \wp$ $X_i \subseteq X_i \cup Y_i$ и $Y_i \subseteq X_i \cup Y_i$. Включение $\underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i \subseteq \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i$ справедливо из общих соображений. Включение $\overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \overline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i \subseteq \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i$ верно, так как для любого $i \in \wp$ $X_i \subseteq X_i \cup Y_i$ и $Y_i \subseteq X_i \cup Y_i$.

Докажем противоположное включение $\overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i \subseteq \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \overline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i$. Пусть

$a \in \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i = \bigcap\limits_{j\in\wp} \bigcup\limits_{i\ge j} (X_i \cup Y_i)$. Тогда для любого $j \in \wp$ найдётся такое $i \ge j$, что $a \in X_i \cup Y_i$. Пусть $\mathcal{J}$ - множество всех тех значений $i \in \wp$, для которых $a \in X_i \cup Y_i$. Из определения конфинального множества следует, что $\mathcal{J}$ конфинально $\wp$. Пусть $\mathcal{J}_1$ - множество всех $i \in \mathcal{J}$, для которых $a \in X_i$, а $\mathcal{J}_2$ - множество всех $i \in \mathcal{J}$, для которых $a \in Y_i$. Тогда $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$. Следовательно, $\mathcal{J}_1$ или $\mathcal{J}_2$ конфинально $\mathcal{J}$. Тогда $\mathcal{J}_1$ или $\mathcal{J}_2$ конфинально $\wp$, так как $\mathcal{J}$ конфинально $\wp$. Если $\mathcal{J}_1$ конфинально $\wp$, то $(X_i)_{i\in\mathcal{J}_1}$ - поднаправленность направленности $(X_i)_{i\in\wp}$, причём для любого $i \in \mathcal{J}_1$ $a \in X_i$. Следовательно, $a \in \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i$. Если $\mathcal{J}_2$ конфинально $\wp$, то аналогично $a \in \overline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i$. Таким образом, доказываемое включение установлено.*

Перейдём к доказательству теоремы 2. Если $X_i \to A\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$ и $Y_i \to B\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$, то применяя лемму, получаем

$A \cup B = \underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \underline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i \subseteq \underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i \subseteq \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i = \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup \overline{\boldsymbol{lim}}\, Y_i = A \cup B$.

Следовательно, $\underline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i = \overline{\boldsymbol{lim}}\, X_i \cup Y_i = A \cup B$ и $X_i \cup Y_i \to A \cup B\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$.

Из определения (o)сходимости направленности, переходя к дополнениям, легко получаем, что $X_i' \to A'\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$, если $X_i \to A\left((o)\boldsymbol{lim}\right)$.

Если $X_i \to A((o)lim)$ и $Y_i \to B((o)lim)$, то $X_i^{'} \to A^{'}\,((o)lim)$ и $Y_i^{'} \to B^{'}\,((o)lim)$. Тогда $X_i^{'} \cup Y_i^{'} \to A^{'} \cup B^{'}\,((o)lim)$. Переходя к дополнениям, получаем, что $X_i \cap\ Y_i \to A \cap B\,((o)lim)$.*

<u>Теорема 3</u>. Порядковая топология на алгебре множеств хаусдорфово отделима.

Доказательство. Пусть $A,B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$. Пусть точка $a \in A$ и $a \notin B$. Введём классы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ множеств, содержащих точку a и не содержащих точки a соответственно. Заметим, что A и B (o)замкнуты, а следовательно, (o)открыты, так как $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{P}$. Поскольку $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ и $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, то A и B отделимы непересекающимися окрестностями.*

Задачи.

1. Пусть $X_a = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ / y \geq ax^2 \}$, где $a \in \mathbb{R}^+ = \{ a \in \mathbb{R} / a \geq 0 \}$ и $(\mathbb{R}^+, \geq)$.

Найти $(o)lim\, X_a$.

2. Пусть $X_a = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ / xy \geq a \}$, где $a \in \mathbb{R}^+ = \{ a \in \mathbb{R} / a \geq 0 \}$ и $(\mathbb{R}^+, \leq)$.

Найти $(o)lim\, X_a$.

3. Пусть $X_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ / y \geq |x|^\alpha \}$, где $\alpha \in \mathbb{R}^+ = \{ \alpha \in \mathbb{R} / \alpha > 0 \}$ и $(\mathbb{R}^+, \geq)$.

Найти $(o)lim\, X_\alpha$.

4. Доказать согласованность порядкового предела с теоретико-множественными операциями \ и Д.

5. Доказать, что $X_i \to A((o)lim)$ тогда и только тогда, когда $X_i \text{Д} A \to \varnothing\,((o)lim)$.

6. Пусть $X_i \to A((o)lim)$. Доказать, что $Y_i \to A((o)lim)$ тогда и только тогда, когда $X_i \text{Д} Y_i \to \varnothing\,((o)lim)$.

7. Пусть E - некоторое множество, $(\mathcal{I}, \geq)$, $(\mathcal{J}, \geq)$ - направленные множества, $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ и $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ - направленности, образованные подмножествами множества E. Пусть направленность $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ <u>мажорирует</u> направленность $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$, т. е. для любого $j \in \mathcal{J}$ найдётся такое $i_0 \in \mathcal{I}$, что для любого $i \geq i_0$ $Y_j \subseteq X_i$. Доказать, что $\overline{lim}\, Y_j \subseteq \underline{lim}\, X_i$.

8. Пусть E - некоторое множество, $(\mathcal{I}, \geq)$, $(\mathcal{J}, \geq)$ - направленные множества, $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ и $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ - направленности, образованные подмножествами множества E. Пусть направлен-

ность $\left(X_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ минорирует направленность $\left(Y_j\right)_{j\in\mathcal{J}}$, т. е. для любого $j\in\mathcal{J}$ существует такое $i_0\in\mathcal{I}$, что для любого $i\geq i_0$ $X_i\subseteq Y_j$. Доказать, что $\overline{lim}\, X_i\subseteq \underline{lim}\, Y_j$.

9. Приведите пример (os)замкнутого множества, не являющегося (o)замкнутым.

§3. РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. ОБРАТНОЕ МНОЖЕСТВО, КОМПОЗИЦИЯ МНОЖЕСТВ

Пусть E - некоторое множество. В дальнейшем будем рассматривать декартово произведение $E\times E$ и его подмножества.

Пусть $\mathcal{U}\subseteq E\times E$. Каждое такое множество можно рассматривать как соответствие между E и E. Если $(x,y)\in\mathcal{U}$, то это означает, что x переходит в y при соответствии U, что можно записать так: $x\xrightarrow{\mathcal{U}} y$.

Введём понятие множества, обратного данному. Множество $\overset{-1}{\mathcal{U}}$ называется множеством, обратным множеству $\mathcal{U}$, если оно содержит все те и только те точки $(x,y)\in E\times E$, для которых $(y,x)\in\mathcal{U}$. Таким образом,

$$\overset{-1}{\mathcal{U}}=\{(x,y)\in E\times E\,/\,(y,x)\in\mathcal{U}\}.$$

Например, для множества $P=[\,a,b\,]\times[\,c,d\,]$, где $[\,a,b\,]$, $[\,c,d\,]$ - числовые отрезки, обратным будет множество $\overset{-1}{P}=[\,c,d\,]\times[\,a,b\,]$.

Заметим, что для любого множества $\mathcal{U}$ $\overset{-1}{\overset{-1}{\mathcal{U}}}=\mathcal{U}$, а следовательно, множества $\mathcal{U}$ и $\overset{-1}{\mathcal{U}}$ взаимно обратны.

Диагональю декартова произведения $E\times E$ называется множество $\Delta=\{(x,x)\,/\,x\in E\}$.

Множество $\mathcal{U}$ называется симметричным (относительно диагонали), если $\mathcal{U}=\overset{-1}{\mathcal{U}}$.

Заметим, что можно рассматривать операцию $^{-1}$ перехода к обратному множеству, поскольку каждому множеству $\mathcal{U}\subseteq E\times E$ сопоставляется обратное ему множество $\overset{-1}{\mathcal{U}}$. Это унарная операция на классе всех подмножеств множества $E\times E$. Операция $^{-1}$ инволютивна.

Пусть $\mathscr{U},\mathscr{V} \subseteq \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$. Определим композицию $\mathscr{U}\circ\mathscr{V}$ множеств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, полагая $\mathscr{U}\circ\mathscr{V} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E} \;/\; \exists\, \boldsymbol{t}\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\mathscr{V}\;,\; (\boldsymbol{t}\,,\boldsymbol{y})\in\mathscr{U} \right\}$. Здесь $\boldsymbol{x}\xrightarrow{\mathscr{V}}\boldsymbol{t}\xrightarrow{\mathscr{U}}\boldsymbol{y}$.

Пример. Пусть $\mathscr{U} = [\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]\times[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]$, $\mathscr{V} = [\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]\times[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$, где $[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$ и $[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]$ - числовые отрезки. Тогда $\mathscr{U}\circ\mathscr{V} = [\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]\times[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]$, поскольку любому $\boldsymbol{x}\in[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]$ соответствует произвольное $\boldsymbol{t}\in[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$, а значению $\boldsymbol{t}\in[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$ соответствует произвольное $\boldsymbol{y}\in[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,]$. Аналогично, $\mathscr{V}\circ\mathscr{U} = [\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]\times[\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$.

Введём квадрат $\mathscr{U}$, полагая $\overset{2}{\mathscr{U}} = \mathscr{U}\circ\mathscr{U}$. Далее $\overset{3}{\mathscr{U}} = \overset{2}{\mathscr{U}}\circ\mathscr{U}$, …, $\overset{\boldsymbol{n}}{\mathscr{U}} = \overset{\boldsymbol{n}-1}{\mathscr{U}}\circ\mathscr{U}$, …

Пример. Пусть $\mathscr{U} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2 \;/\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\le 1 \right\}$. Тогда $\overset{2}{\mathscr{U}} = [\,-1,1\,]\times[\,-1,1\,]$, поскольку произвольному допустимому $\boldsymbol{x}$ соответствует 0 при соответствии $\mathscr{U}$, а 0 переходит в произвольное $\boldsymbol{y}\in[\,-1,1\,]$.

Заметим, что можно рассматривать операцию взятия композиции. Это бинарная операция на классе всех подмножеств множества $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$. Несложно показать, что эта операция ассоциативна. Коммутативной она не является.

Задачи.

1. Найти $\overset{-1}{\mathscr{U}}$, если а) $\mathscr{U} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2 \;/\; |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|\le 1 \right\}$;

   б) $\mathscr{U} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2 / \;\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{y}^2 \right\}$.

2. Пусть $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{V}$. Доказать, что $\overset{-1}{\mathscr{U}}\subseteq\overset{-1}{\mathscr{V}}$.
3. Пусть $\mathscr{U} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2 \;/\; |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|\le 1 \right\}$. Найти $\overset{2}{\mathscr{U}}$.
4. Пусть $\mathscr{U} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2 / \;\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{y}^2 \right\}$. Найти $\overset{2}{\mathscr{U}}$.
5. Найти композицию множества $\mathscr{U} = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2 / \;\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{y}^2 \right\}$ и ему обратного.
6. Пусть $\mathscr{U} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ и $\mathscr{V} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$. Найти $\mathscr{U}\circ\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}\circ\mathscr{U}$.
7. Доказать, что для любых $\mathscr{U},\mathscr{V},\mathscr{W}\subseteq\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$ $\;(\mathscr{U}\circ\mathscr{V})\circ\mathscr{W} = \mathscr{U}\circ(\mathscr{V}\circ\mathscr{W})$.
8. Доказать, что для любых $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ $\;\overset{-1}{\overline{\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2}} = \overset{-1}{\mathscr{V}_1}\cap\overset{-1}{\mathscr{V}_2}$.
9. Пусть $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{V}$. Доказать, что $\overset{2}{\mathscr{U}}\subseteq\overset{2}{\mathscr{V}}$.

10. Доказать, что для любого $\mathcal{U}$ $\overset{\frac{-1}{2}}{\mathcal{U}} = \overset{\frac{2}{-1}}{\mathcal{U}}$.

11. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$ и $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Доказать, что для любого $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ $\overset{n}{\mathcal{U}} \subseteq \overset{n}{\mathcal{V}}$.

12. Пусть $\mathcal{S}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$ и $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Доказать, что $\mathcal{S} \circ \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \circ \mathcal{W}$.

13. Доказать, что для любого множества $\mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$, если $\mathcal{A} \subseteq \overset{-1}{\mathcal{A}}$, то $\mathcal{A} = \overset{-1}{\mathcal{A}}$.

14. Привести примеры множеств, удовлетворяющих условию $\overset{2}{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, $\Delta \subseteq \mathcal{U}$.

15. Пусть $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ - семейство множеств, где $\mathcal{A}_i \subseteq \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{i} \in \mathcal{I}$, $\mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_j = \varnothing$, если $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$, $\mathcal{U} = \left(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} (\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i) \right) \bigcup \Delta$. Доказать, что $\overset{2}{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

2. АКСИОМЫ ОКРЕСТНОСТЕЙ

Пусть $\boldsymbol{E}$ - некоторое множество и пусть каждой точке $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ сопоставлен некоторый класс $\mathcal{B}_x$ подмножеств множества $\boldsymbol{E}$, называемых окрестностями точки $\boldsymbol{x}$, так что выполнены следующие условия.

(V_1) Для любой окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_x$ и для любого множества $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$, где $\mathcal{V} \subseteq \boldsymbol{E}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$.

(V_2) Для любых двух окрестностей $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$ $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$.

(V_3) Для любой окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_x$ $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$.

(V_4) Для любой окрестности $\mathcal{W} \in \mathcal{B}_x$ существует такая окрестность $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_x$, что для любой точки $\boldsymbol{y} \in \mathcal{U}$ $\mathcal{W} \in \mathcal{B}_y$.

Выделенные условия (V_1) - (V_4) называются <u>аксиомами окрестностей</u>. Ясно, что класс всех окрестностей, определяемых произвольной топологией, удовлетворяет этим условиям. Верно и обратное.

<u>Теорема 1</u>. Для любой системы окрестностей, удовлетворяющей условиям (V_1) - (V_4), существует единственная топология, система окрестностей в смысле которой совпадает с исходной.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ и $\mathcal{W} \in \mathcal{B}_x$. Докажем, что существует такое множество $\mathcal{V}$, что $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, причём $\mathcal{V}$ является окрестностью каждой свое точки. Пусть $\mathcal{V}$ - множество всех тех точек $\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$, для которых $\mathscr{W} \in \mathscr{B}_y$. Отметим, что $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$, и следовательно, $\mathscr{V} \neq \varnothing$. Докажем, что $\mathscr{V}$ является окрестностью каждой своей точки. Пусть $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$. По условию $\mathscr{W} \in \mathscr{B}_y$. По аксиоме (V_4) существует такая окрестность $\mathscr{U} \in \mathscr{B}_y$, что для любой точки $z \in \mathscr{U}$ $\mathscr{W} \in \mathscr{B}_z$. Тогда $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$. Поскольку $\mathscr{U} \in \mathscr{B}_y$ и $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$, то $\mathscr{V} \in \mathscr{B}_y$.

Итак, для любой точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ и для любой её окрестности $\mathscr{W}$ существует такое множество $\mathscr{U}$, что $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}$, причём $\mathscr{U}$ является окрестностью каждой своей точки. Пусть $\boldsymbol{T}$ - класс всех множеств, каждое из которых является окрестностью любой своей точки. Докажем, что $\boldsymbol{T}$ - топология.

Действительно, пустое множество не имеет точки, для которой оно не было бы её окрестностью. Значит, $\varnothing \in \boldsymbol{T}$. По аксиоме (V_1) $\boldsymbol{E}$ - окрестность каждой своей точки. Следовательно, $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{T}$.

Пусть $(\mathscr{U}_i)_{i\in\mathscr{I}}$ - семейство множеств класса $\boldsymbol{T}$. Пусть $\mathscr{U} = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathscr{U}_i$. Тогда для любой точки $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U}$ найдётся такое $\mathscr{U}_i$, что $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U}_i$. При этом $\mathscr{U}_i \in \mathscr{B}_x$. Тогда по аксиоме (V_1) $\mathscr{U} \in \mathscr{B}_x$. Таким образом, для любого семейства $(\mathscr{U}_i)_{i\in\mathscr{I}}$, где $\mathscr{U}_i \in \boldsymbol{T}$, верно, что $\bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathscr{U}_i \in \boldsymbol{T}$.

Пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \boldsymbol{T}$. Так как $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ - окрестности каждой своей точки, то по аксиоме (V_2) $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}$ - окрестность каждой своей точки. Следовательно, $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} \in \boldsymbol{T}$. Отсюда следует, что для любого конечного семейства множеств из класса $\boldsymbol{T}$ их пересечение входит в класс $\boldsymbol{T}$.

Итак, введённый класс множеств $\boldsymbol{T}$ - топология на $\boldsymbol{E}$.

Проверим совпадение классов окрестностей в исходном смысле и относительно топологии $\boldsymbol{T}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \in \mathscr{B}_x$. Тогда по построению существует такое множество $\mathscr{U}$, что $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$, причём $\mathscr{U} \in \boldsymbol{T}$. Тогда $\mathscr{V}$ - окрестность точки $\boldsymbol{x}$ относительно топологии $\boldsymbol{T}$. Обратно, пусть $\mathscr{V}$ - окрестность точки $\boldsymbol{x}$ относительно топологии $\boldsymbol{T}$. Тогда существует такое множество $\mathscr{U} \in \boldsymbol{T}$, что $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$. По построению $\mathscr{U}$ - окрестность каждой своей точки, в частности $\mathscr{U} \in \mathscr{B}_x$. Тогда по аксиоме (V_1) $\mathscr{V} \in \mathscr{B}_x$.

Единственность топологии очевидна, поскольку другая топология имела бы другую совокупность открытых множеств, а следовательно, и классов окрестностей.*

3. АКСИОМЫ РАВНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\boldsymbol{E}$ - некоторое множество. Непустой класс $\mathscr{H}$ подмножеств декартова произведения $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$ называется <u>равномерностью</u> на $\boldsymbol{E}$, если выполнены следующие условия, называемые аксиомами равномерной структуры.

(A_1) Для любого $\mathscr{U} \in \mathscr{A}$ и для любого $\mathscr{V} \supseteq \mathscr{U}$, где $\mathscr{V} \subseteq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$, $\mathscr{V} \in \mathscr{A}$.

(A_2) Для любых $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \mathscr{A}$ $\mathscr{U} \bigcap \mathscr{V} \in \mathscr{A}$.

(A_3) Для любого $\mathscr{V} \in \mathscr{A}$ $\Delta \subseteq \mathscr{V}$, где $\Delta = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \ / \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}\}$.

(A_4) Для любого $\mathscr{V} \in \mathscr{A}$ $\overset{-1}{\mathscr{V}} \in \mathscr{A}$.

(A_5) Для любого $\mathscr{V} \in \mathscr{A}$ найдётся такое $\mathscr{W} \in \mathscr{A}$, что $\overset{2}{\mathscr{W}} \subseteq \mathscr{V}$.

Множество $\boldsymbol{E}$ вместе с равномерностью $\mathscr{A}$ для него (равномерной структурой $\mathscr{A}$), т. е. пара $(\boldsymbol{E}, \mathscr{A})$, называется равномерным пространством. Множества $\mathscr{U}, \mathscr{V}, \mathscr{W} \in \mathscr{A}$ называются окружениями равномерности $\mathscr{A}$ (окружениями равномерной структуры).

Задачи.

1. Пусть $\mathscr{V}$ - окружение некоторой равномерности $\mathscr{A}$. Доказать, что $\mathscr{V} \subseteq \overset{2}{\mathscr{V}} \subseteq \overset{3}{\mathscr{V}} \subseteq \ldots \subseteq \overset{n}{\mathscr{V}} \subseteq \ldots$.

2. Пусть $\mathscr{W}$ - окружение некоторой равномерности $\mathscr{A}$. Доказать, что для любого $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ найдется такое окружение $\mathscr{V} \in \mathscr{A}$, что $\overset{n}{\mathscr{V}} \subseteq \mathscr{W}$.

3. Пусть $\Delta \subseteq \mathscr{V}$ и $\overset{2}{\mathscr{V}} = \mathscr{V}$. Можно ли утверждать, что $\overset{-1}{\mathscr{V}} = \mathscr{V}$?

4. Пусть $\Delta \subseteq \mathscr{V}$ и $\overset{2}{\mathscr{V}} = \mathscr{V}$. Построить минимальную равномерность, содержащую $\mathscr{V}$.

5. Пусть $(\mathscr{U}_i)_{i \in \mathscr{I}}$ - некоторое семейство множеств таких, что для любого $\boldsymbol{i} \in \mathscr{I}$ $\Delta \subseteq \mathscr{U}_i \subseteq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$. При каких условиях существует минимальная равномерность, содержащая все множества данного семейства?

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОКРУЖЕНИЙ

Пусть $(\boldsymbol{E}, \mathcal{H})$ - некоторое равномерное пространство. Введём понятие фундаментальной системы окружений – основы равномерности $\mathcal{H}$.

Подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$ называется <u>фундаментальной системой окружений</u> равномерности $\mathcal{H}$, если для любого окружения $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ найдётся такое окружение $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, что $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Отметим, что фундаментальная система окружений $\mathcal{B}$ обладает следующими свойствами.

$(\boldsymbol{B}_1)$ Для любых окружений $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in \mathcal{B}$ найдётся такое окружение $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, что $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \bigcap \mathcal{W}$.

$(\boldsymbol{B}_2)$ Для любого $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ $\Delta \subseteq \mathcal{V}$.

$(\boldsymbol{B}_3)$ Для любого $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ найдётся такое $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$, что $\mathcal{V} \subseteq \overset{-1}{\mathcal{W}}$.

$(\boldsymbol{B}_4)$ Для любого $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ найдётся такое $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, что $\overset{2}{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$.

Свойства $(\boldsymbol{B}_1)$-$(\boldsymbol{B}_3)$ очевидны. Докажем $(\boldsymbol{B}_4)$. Пусть $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$. Тогда найдётся такое окружение $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$, что $\overset{2}{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{W}$. Далее для окружения $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ найдётся окружение $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ такое, что $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Тогда $\overset{2}{\mathcal{U}} \subseteq \overset{2}{\mathcal{V}}$ и $\overset{2}{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$, где $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Верно и обратное.

<u>**Теорема**</u>. Всякая система множеств, содержащихся в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$, удовлетворяющая условиям $(\boldsymbol{B}_1)$ - $(\boldsymbol{B}_4)$, является фундаментальной системой окружений некоторой равномерной структуры.

Доказательство. Пусть совокупность множеств $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{B}_1)$ - $(\boldsymbol{B}_4)$. Пусть $\mathcal{H}$ - класс всех множеств, содержащихся в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$, каждое из которых содержит некоторое множество класса $\mathcal{B}$. Докажем, что $\mathcal{H}$ - равномерность.

Очевидно, что класс $\mathcal{H}$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{A}_1)$ - $(\boldsymbol{A}_3)$.

Покажем, что класс $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{A}_4)$. Пусть $\mathcal{W} \in \mathcal{H}$. Тогда найдётся такое окружение $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$, что $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. По аксиоме $(\boldsymbol{B}_3)$ для окружения $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ найдётся такое окружение $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, что $\mathcal{U} \subseteq \overset{-1}{\mathcal{V}}$. Поскольку $\overset{-1}{\mathcal{V}} \subseteq \overset{-1}{\mathcal{W}}$ (так как $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$), то $\mathcal{U} \subseteq \overset{-1}{\mathcal{W}}$, где $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Следовательно, $\overset{-1}{\mathcal{W}} \in \mathcal{H}$ и условие $(\boldsymbol{A}_4)$ выполняется.

Покажем, что класс $\mathscr{H}$ удовлетворяет условию (A_5). Пусть $\mathscr{W} \in \mathscr{H}$. Тогда найдётся такое окружение $\mathscr{V} \in \mathscr{B}$, что $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}$. По аксиоме $(\boldsymbol{B}_4)$ найдётся такое $\mathscr{U} \in \mathscr{B}$, что $\overset{2}{\mathscr{U}} \subseteq \mathscr{V}$. Тогда $\overset{2}{\mathscr{U}} \subseteq \mathscr{W}$, где $\mathscr{U} \in \mathscr{H}$, (поскольку $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{H}$) и условие (A_5) выполнено. Следовательно, $\mathscr{H}$ - равномерность, причём $\mathscr{B}$ - её фундаментальная система окружений.*

Задачи.

1. Доказать, что совокупность всех симметричных окружений произвольной равномерности образует фундаментальную систему окружений этой равномерности.
2. Могут ли различные равномерности определять одну и ту же топологию?
3. Для аддитивной равномерной структуры найти
   а) слабейшую равномерность, определяющую обычную топологию на действительной прямой;
   б) сильнейшую равномерность, определяющую обычную топологию на действительной прямой.
4. Пусть $\mathscr{B}$ - фундаментальная система окружений равномерности $\mathscr{H}$ на $\boldsymbol{E}$. Доказать, что для любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{E}$ класс сечений $\mathscr{V}_{\boldsymbol{x}_0}$ окружений $\mathscr{V} \in \mathscr{B}$ является фундаментальной системой окрестностей точки $\boldsymbol{x}_0$.

5. АДДИТИВНАЯ РАВНОМЕРНАЯ СТРУКТУРА

Приведём пример равномерной структуры на $\mathbb{R}$. Рассмотрим класс $\mathscr{B}$ всех множеств плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, определяемых равенствами $\mathscr{U} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ / \ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < \boldsymbol{r}\}$, где $\boldsymbol{r}$ - произвольное положительное число, а также класс $\mathscr{H}$ всех множеств плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, каждое из которых содержит некоторое множество из класса $\mathscr{B}$. Несложно показать, что класс $\mathscr{B}$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{B}_1)$ - $(\boldsymbol{B}_4)$, т. е. является фундаментальной системой окружений, а класс $\mathscr{H}$ - равномерность, определяемая этой фундаментальной системой. Эта равномерность на $\mathbb{R}$ называется <u>аддитивной равномерной структурой.</u>

Задача. Привести пример счётной фундаментальной системы окружений аддитивной равномерной структуры.

6. РАВНОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Любая равномерность на $\boldsymbol{E}$ определяет на этом множестве топологию.

Пусть $(\boldsymbol{E}, \mathscr{U})$ - равномерное пространство, $\mathcal{U} \in \mathscr{U}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. <u>Сечением</u> окружения $\mathcal{U}$ элементом $\boldsymbol{x}$ называется множество $\mathcal{V}_x = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E} / (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{V}\}$. Отметим, что $\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_x$ тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{V}$.

Пусть $\mathscr{B}_x$ - класс сечений всевозможных окружений $\mathcal{V} \in \mathscr{U}$ элементом $\boldsymbol{x}$. Сечение $\mathcal{V}_x$ назовём окрестностью элемента $\boldsymbol{x}$. Таким образом, каждому элементу $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ сопоставляется класс окрестностей $\mathscr{B}_x$.

<u>Теорема 1</u>. Существует единственная топология, система окрестностей относительно которой совпадает с введённой системой окрестностей, определяемых как сечения окружений равномерной структуры.

Доказательство. Покажем, что классы множеств $\mathscr{B}_x$ удовлетворяют аксиомам окрестностей.

Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, $\mathcal{V} \in \mathscr{B}_x$ и $\mathcal{W}_x \supseteq \mathcal{V}_x$, где $\mathcal{W}_x \subseteq \boldsymbol{E}$, $\mathcal{V} \in \mathscr{U}$. (Предположения, что $\mathcal{W}_x$ - сечение некоторого окружения не делается.)

Введём окружение $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cup \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} / \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_x\}$. Тогда его сечение $\mathcal{U}_x = \mathcal{V}_x \cup \mathcal{W}_x = \mathcal{W}_x$, так как $\mathcal{W}_x \supseteq \mathcal{V}_x$. (Здесь используется равенство $(\mathcal{V} \cup \mathcal{W})_x = \mathcal{V}_x \cup \mathcal{W}_x$, где $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$.) Так как $\mathcal{U} \in \mathscr{U}$, то $\mathcal{W}_x = \mathcal{U}_x \in \mathscr{B}_x$. Таким образом, для любой окрестности $\mathcal{V}_x$ и для любого содержащего эту окрестность множества $\mathcal{W}_x$ множество $\mathcal{W}_x$ входит в класс $\mathscr{B}_x$.

Пусть $\mathcal{V}_x, \mathcal{W}_x \in \mathscr{B}_x$, где $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathscr{U}$. Тогда $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{W}_x = (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})_x \in \mathscr{B}_x$. Таким образом, пересечение любых двух окрестностей точки является окрестностью этой точки.

Несложно заметить, что для любой окрестности $\mathcal{V}_x \in \mathscr{B}_x$ $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_x$. Действительно, для любой окрестности $\mathcal{V}$ диагональ $\Delta \subseteq \mathcal{V}$, а значит, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{V}$ и $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_x$. Таким образом, любая окрестность из класса $\mathscr{B}_x$ содержит точку $\boldsymbol{x}$.

Докажем, что для любой окрестности $\mathcal{W}_x \in \mathscr{B}_x$, где $\mathcal{W} \in \mathscr{U}$, существует такая окрестность $\mathcal{V}_x \in \mathscr{B}_x$, что для любой точки $\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_x$ $\mathcal{W}_x \in \mathscr{B}_y$. Итак, пусть $\mathcal{W} \in \mathscr{U}$. По аксиоме $(\boldsymbol{A}_5)$ существует такое окружение $\mathcal{V} \in \mathscr{U}$, что $\overset{2}{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{W}$. Докажем, что для любой точки $\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_x$ $\mathcal{W}_x \in \mathscr{B}_y$, для чего установим, что $\mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{W}_x$. Действительно, пусть $\boldsymbol{z} \in \mathcal{V}_y$. Тогда

$(y,z)\in\mathscr{V}$. Так как $y\in\mathscr{V}_x$, то $(x,y)\in\mathscr{V}$. Поскольку $(x,y)\in\mathscr{V}$ и $(y,z)\in\mathscr{V}$, то $(x,z)\in\overset{2}{\mathscr{V}}\subseteq\mathscr{W}$. Следовательно, $z\in\mathscr{W}_x$ и $\mathscr{V}_y\subseteq\mathscr{W}_x$. Так как, $\mathscr{V}_y\in\mathscr{B}_y$ и $\mathscr{V}_y\subseteq\mathscr{W}_x$, то по аксиоме (A_1) $\mathscr{W}_x\in\mathscr{B}_y$.

Таким образом, совокупность всех окрестностей классов $\mathscr{B}_x$ удовлетворяет аксиомам окрестностей. Следовательно, существует единственная топология, определяющая ту же самую систему окрестностей (теорема 1, п.2). Эта топология называется <u>равномерной топологией</u>.

Вопрос. Всякая ли топология равномерная?

Задачи.

1. Доказать, что хаусдорфово отделимая равномерная топология регулярна.
2. Привести пример несравнимых равномерностей на E.

7. РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $(D,\mathscr{H}_D)$ и $(E,\mathscr{H}_E)$ - равномерные пространства, и $f:D\to E$ - отображение множества D в E.

Отображение $f:D\to E$ называется <u>равномерно непрерывным</u> на множестве D, если для любого окружения $\mathscr{W}\in\mathscr{H}_E$ найдётся такое окружение $\mathscr{V}\in\mathscr{H}_D$, что для любой точки $(x',x'')\in\mathscr{V}$ точка $(f(x'),f(x''))\in\mathscr{W}$.

<u>Теорема 1</u>. Если отображение $f:D\to E$ равномерно непрерывно на D, то f непрерывно в каждой точке множества D относительно равномерных топологий на множествах D и E.

Доказательство. Пусть отображение $f:D\to E$ равномерно непрерывно на D и $x_0\in D$. Докажем, что отображение f непрерывно в точке x_0. Воспользуемся определением непрерывности отображения в точке. Пусть $\mathscr{W}_{f(x_0)}$ - некоторая окрестность точки $f(x_0)$, где $\mathscr{W}\in\mathscr{H}_E$. Здесь $\mathscr{W}_{f(x_0)}$ - сечение окружения $\mathscr{W}$ элементом $f(x_0)$. Так как отображение f равномерно непрерывно, то для окружения $\mathscr{W}$ найдётся такое окружение $\mathscr{V}$, что для любой точки $(x',x'')\in\mathscr{V}$ будет $(f(x'),f(x''))\in\mathscr{W}$. Рассмотрим окрестность $\mathscr{V}_{x_0}$ точки x_0, взяв сечение окружения $\mathscr{V}$ элементом x_0. Пусть $x\in\mathscr{V}_{x_0}$. Тогда $(x_0,x)\in\mathscr{V}$, а, следовательно,

$\left(f\left(x_0\right), f\left(x\right)\right) \in \mathscr{W}$ и $f\left(x_0\right) \in \mathscr{W}_{f\left(x_0\right)}$, что и означает непрерывность отображения f в точке x_0.*

Задача. Доказать, что композиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.

8. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

Пусть $\left(E , \mathscr{H}\right)$ - равномерное пространство и $\left(x_i\right)_{i \in \mathscr{I}}$ - направленность со значениями в множестве E, $\left(\mathscr{I} , \geq\right)$ - направленное множество.

Направленность $\left(x_i\right)_{i \in \mathscr{I}}$ называется <u>фундаментальной</u>, если для любого окружения $\mathscr{W} \in \mathscr{H}$ найдется такое $i_0 \in \mathscr{I}$, что для любых $i , j \in \mathscr{I}$, как только $i \geq i_0$ и $j \geq i_0$, так $\left(x_i , x_j\right) \in \mathscr{W}$.

Ясно, что это определение обобщает определение фундаментальной последовательности.

<u>Теорема</u> 1. Любая сходящаяся направленность фундаментальна.

Доказательство. Пусть $\left(x_i\right)_{i \in \mathscr{I}}$ - сходящаяся направленность, $x_i \to a\left(\left(T\right) lim\right)$, где T - равномерная топология, определяемая равномерностью $\mathscr{H}$. Пусть $\mathscr{W} \in \mathscr{H}$. По аксиоме $\left(A_5\right)$ найдется такое окружение $\mathscr{V} \in \mathscr{H}$, что $\overset{2}{\mathscr{V}} \subseteq \mathscr{W}$. При этом можно предполагать, что окружение $\mathscr{V}$ симметрично, иначе рассмотрим симметричное окружение $\mathscr{V} \cap \overset{-1}{\mathscr{V}}$. Так как направленность $\left(x_i\right)_{i \in \mathscr{I}}$ сходится к точке a, то найдется такое i_0, что для любого $i \geq i_0$ $x_i \in \mathscr{V}_a$, где $\mathscr{V}_a$ - сечение окружения $\mathscr{V}$ элементом a. Тогда, если $i \geq i_0$ и $j \geq i_0$, то $x_i \in \mathscr{V}_a$ и $x_j \in \mathscr{V}_a$. Следовательно, $\left(a , x_i\right) \in \mathscr{V}$ и $\left(a , x_j\right) \in \mathscr{V}$. Так как по предположению окружение $\mathscr{V}$ симметрично, то $\left(x_i , a\right) \in \mathscr{V}$, а тогда $\left(x_i , x_j\right) \in \overset{2}{\mathscr{V}} \subseteq \mathscr{W}$.*

<u>Теорема</u> 2. Если фундаментальная направленность имеет поднаправленность, сходящуюся к некоторому элементу, то и исходная направленность сходится к этому элементу.

Доказательство. Пусть направленность $\left(x_i\right)_{i \in \mathscr{I}}$ фундаментальна и $\left(y_j\right)_{j \in \mathscr{J}}$ ее сходящаяся поднаправленность, $y_j \to a\left(\left(T\right) lim\right)$. Пусть $\mathscr{W} \in \mathscr{H}$. По аксиоме $\left(A_5\right)$ найдется такое окружение $\mathscr{V}$, что $\overset{2}{\mathscr{V}} \subseteq \mathscr{W}$. Так как направленность $\left(x_i\right)_{i \in \mathscr{I}}$ фундаментальна, то по окружению

$\mathscr{V}$ найдется такое i_0, что для любых $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i} \ge \boldsymbol{i}_0$ $(\boldsymbol{x}_{i'}, \boldsymbol{x}_i) \in \mathscr{V}$. Так как $(\boldsymbol{y}_j)_{j\in\mathscr{J}}$ - поднаправленность направленности $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathscr{I}}$, то существует такое допустимое отображение $(\boldsymbol{i}_j)_{j\in\mathscr{J}}$ множества $\mathscr{J}$ в $\mathscr{I}$, что для любого $\boldsymbol{j} \in \mathscr{J}$ $\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{x}_{i_j}$. Так как отображение $(\boldsymbol{i}_j)_{j\in\mathscr{J}}$ допустимо, то для найденного ранее $\boldsymbol{i}_0$ найдется такое $\boldsymbol{j}_1$, что для любого $\boldsymbol{j} \ge \boldsymbol{j}_1$ $\boldsymbol{i}_j \ge \boldsymbol{i}_0$. Так как направленность $(\boldsymbol{y}_j)_{j\in\mathscr{J}}$ сходится к $\boldsymbol{a}$, то для окрестности $\mathscr{V}_a$ элемента $\boldsymbol{a}$, где $\mathscr{V}_a$ - сечение окружения $\mathscr{V}$ элементом $\boldsymbol{a}$, найдется такое $\boldsymbol{j}_2$, что для любого $\boldsymbol{j} \ge \boldsymbol{j}_2$ $\boldsymbol{y}_j \in \mathscr{V}_a$. Так как $(\mathscr{J}, \ge)$ - направленное множество, то для найденных $\boldsymbol{j}_1$ и $\boldsymbol{j}_2$ существует такое $\boldsymbol{j}_0$, что $\boldsymbol{j}_0 \ge \boldsymbol{j}_1$ и $\boldsymbol{j}_0 \ge \boldsymbol{j}_2$. Пусть $\boldsymbol{j}' \ge \boldsymbol{j}_0$ и $\boldsymbol{i}_{j'} = \boldsymbol{i}'$. Тогда $\boldsymbol{i}' \ge \boldsymbol{i}_0$, а следовательно, для любого $\boldsymbol{i} \ge \boldsymbol{i}_0$ $(\boldsymbol{x}_{i'}, \boldsymbol{x}_i) \in \mathscr{V}$. Поскольку $\boldsymbol{x}_{i'} = \boldsymbol{x}_{i_{j'}} = \boldsymbol{y}_{j'}$, причем $\boldsymbol{j}' \ge \boldsymbol{j}_2$, то $\boldsymbol{y}_{j'} \in \mathscr{V}_a$, а значит, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}_{j'}) \in \mathscr{V}$. Тогда из соотношений $(\boldsymbol{x}_{i'}, \boldsymbol{x}_i) \in \mathscr{V}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}_{j'}) \in \mathscr{V}$ и $\boldsymbol{x}_{i'} = \boldsymbol{y}_{j'}$, следует, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_i) \in \mathscr{W}$, где $\boldsymbol{i} \ge \boldsymbol{i}_0$. Таким образом, для любого $\boldsymbol{i} \ge \boldsymbol{i}_0$ $\boldsymbol{x}_i \in \mathscr{W}_a$, что и означает сходимость направленности $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in\mathscr{I}}$ к $\boldsymbol{a}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1969.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.
3. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
5. Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
6. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
7. Савельев Л.Я. Лекции по математическому анализу. Приложение «Непрерывные меры». Новосибирск, 1975.
8. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Топология операторов и некорректные задачи. Новосибирск, 1999.