Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

С. В. Пухов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Часть 2

ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие
для студентов магистратуры
направлений «Математика»
и «Математика и компьютерные науки»

Иваново
Издательство «Ивановский государственный университет»
2016

УДК 51
ББК 22.1+32.81
П 907

Пухов, С. В.

Дополнительные главы теории экстремальных задач. Ч. 2 : Задачи векторной оптимизации [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов магистратуры направлений «Математика» и «Математика и компьютерные науки» / С. В. Пухов. — Электрон. дан. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2016. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM) ; 12 см. — Систем. требования: программа чтения файлов в формате PDF 1.4. — ISBN 978-5-7807-1170-4.

Цель настоящего издания, как и первой части пособия – продемонстрировать возможности метода Дубовицкого–Милютина в выпуклых и нелинейных (гладких) задачах многокритериальной оптимизации. Главная особенность излагаемого во второй части пособия материала – отказ от конечной размерности в функционале, ограничениях и допустимых элементах.

Предназначено студентам магистратуры направлений «Математика» и «Математика и компьютерные науки».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного университета

Рецензенты:

кафедра высшей и прикладной математики, статистики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный политехнический университет» (зам. зав. кафедрой кандидат технических наук, доцент **М. Л. Кашникова**)

доктор физико-математических наук, профессор **Г. А. Зуева** (ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»)

ISBN 978-5-7807-1170-4

Настоящее издание является второй частью пособия «Дополнительные главы экстремальных задач». Первая часть этого пособия под названием «Дополнительные главы экстремальных задач. Часть 1. Задачи многокритериальной оптимизации» вышла в издательстве Ивановского университета в 2014 году. Как и первая часть пособия, вторая часть его также предназначается, в первую очередь, студентам магистратуры направления «Математика» и близких образовательных программ, а также всем любителям (= любящим) математику.

Сама тематика векторной оптимизации, точнее, многокритериальной оптимизации, составляет содержание курса лекций “Дополнительные главы теории экстремальных задач: задачи многокритериальной оптимизации”, который автор данного пособия читает в течение ряда лет в магистратуре математического факультета (в настоящее время факультета математики и компьютерных наук) ИвГУ. Цель этого курса – продемонстрировать возможности метода Дубовицкого–Милютина (см. [19]) в выпуклых и нелинейных (гладких) задачах многокритериальной оптимизации. Изложение материала во второй части пособия следует в основном статьям [20, 21, 22]. Приведенные в данных статьях результаты дали научно-методические возможности для внесения дополнений в упомянутый выше курс и создания второй части пособия.

Главная особенность излагаемого во второй части пособия материала – отказ от конечной размерности в функционале, ограничениях и допустимых элементах. В этом случае не только удается сохранить значительную часть конечномерных результатов, но и, как обычно, «отделить зёрна от плевел», выбрать такой путь доказательства, который игнорирует случайные обстоятельства, использованные в конечномерном случае, так сказать «позволяет взглянуть на ситуацию сверху». В первую очередь это касается выпуклых задач, где теория принимает наиболее красивый и совершенный вид, а также, конечно, линейных задач.

Преследуя цель единства и замкнутости изложения материала этой части пособия, мы приведем некоторые положения теории многокритериальной оптимизации из первой части пособия, а также для удобства будем использовать как общепринятые, так и вновь вводимые (так сказать, автономные) сокращения, список которых будет постоянно пополняться и в окончательном виде приводится в конце издания.

В этой части пособия, как впрочем и в первой части, векторные (линейные) пространства рассматриваются только над полем вещественных (действительных) чисел, хотя, конечно, некоторые результаты верны как для поля комплексных чисел, так и других алгебраических структур.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи многокритериальной оптимизации (ЗМО) весьма значимы в приложениях, особенно в экономических и технических науках, где требуется оценка качества принимаемых решений не по одному критерию эффективности, а одновременно по нескольким взаимосвязанным и, как правило, противоречивым критериям. Почти всякая сложная практическая задача принятия решения является многокритериальной задачей (multiple objectives problem). Используется также другая терминология для указанной тематики, например, *Multiple Criteria Decision Making – MCDM, т. е. многоцелевая оптимизация.*

В развитие многокритериальной оптимизации внесли вклад такие ученые, как Г. Кун, А. Таккер, Л. Гурвиц, О. Мангасарян, Э. Полак, С. Смейл, Т. Купманс, С. Карлин, а также Х. Удзава, Х. Никайдо и другие.

Из отечественных ученых в этом отношении следует отметить, в первую очередь, В.В. Подиновского, В.Д. Ногина, Б.А. Березовского...

Ниже привожу мнение С. Кутателадзе (так подписан текст), видимо, Семёна Самсоновича Кутателадзе, (сейчас уже) академика РАН РФ, математика, сына Самсона Семёновича Кутателадзе, также академика, физика, но той еще АН СССР по СО. Сам я ранее тоже придерживался похожего мнения при поверхностном взгляде на сию науку, пока не получил в ней некоторые вполне содержательные математические результаты. А сказать голословно о том, что содержание монографий элементарно и общеизвестно можно про множество, если не большинство, современных исследований. К тому же в нижеприведенном мнении чувствуется откровенный политес, хотя, надо признать, много и справедливого в этом мнении. Жаль, что оно высказывалось поздновато, нет бы сказать эти слова, когда выходили в советские времена монографии Березовского и С^{o}, когда проходили выборы в академию самого С.С., или высказать свое принципиальное мнение во времена олигархата БАБа в начале 90-х. А так сейчас можно еще и про Карла Маркса вспомнить с его математическими, да и экономическими работами, или по Владимиру Ильичу пройтись с его материализмом и эмпириокритицизмом. Или, как в старом анекдоте, выйти на Красную площадь и кричать, что Рейган (Буш или Обама) дурак... Читайте мнение С.Кутателадзе и наслаждайтесь. Математики редко такое пишут..

http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/berezovsky.html

СПРАВКА

О НАУЧНОЙ РАБОТЕ Б. А. БЕРЕЗОВСКОГО

Бориса Абрамовича Березовского (1946–2013) часто называют математиком, апеллируя к его званию члена-корреспондента РАН. Это обстоятельство нуждается в разъяснении.Березовский был избран 7 декабря 1991 г. не в АН СССР, а во вновь организованную с нуля в декабре 1991 г. по Указу Б. Н. Ельцина Российскую академию наук в Секцию математики, механики, информатики по специальности «исследование операций и принятие решений». Президентом новой академии избран Ю. С. Осипов, который до того был назначен президентом-организатором АН РСФСР. Вот точная формула:Членами Российской академии наук считать с их согласия всех членов Академии наук СССР с сохранением званий действительных членов и членов-корреспондентов, а также членов Российской академии наук, избираемых на основе Указа Президиума Верховного Совета РСФСР от 24 января 1990 г. «Об учреждении Академии наук Российской Федерации» и Постановления Верховного Совета РСФСР от 15 февраля 1991 г. «О дальнейшей работе по *организации Российской академии наук». Российская академия наук объединяет членов Российской академии наук — действительных членов и членов-корреспондентов Академии и других научных сотрудников учреждений Академии.Тем самым была ликвидирована основополагающая академическая традиция, по которой новые члены Академии наук выбирались предыдущими. Академия наук СССР никогда не нарушала изначального принципа об избрания новых членов предыдущими. Однако Общее собрание АН СССР никогда не выбирало членов новой АН РСФСР, поглотившей свою древнюю предшественницу. Кооптация старых членов в новую РАН создало иллюзию, что нынешняя РАН ведет свою историю с петровских времен.В РАН Березовский состоял в Отделении нанотехнологий и информационных технологий (секция информационных технологий и автоматизации), а не в Отделении математических наук.Занимался Березовский в бытность в науке так называемой многоцелевой оптимизацией –MCDM, т. е. Multiple Criteria Decision Making. Принятие решения в условиях конфликта интересов — универсальная проблема, с которой люди сталкиваются повсеместно. MCDM привлекает много денег, а потому и много людей, но с математическими результатами в MCDM дело обстоит неважно. Фактически это довольно экспериментальное искусство из сферы исследования операций. Ситуация очень похожа на экономику. Многие экономисты являются просто платными или бескорыстными консультантами начальства, а не исследователями. Ещё одно важное обстоятельство, выводящее многих специалистов по MCDM за пределы математики, – бедность инструментария. Люди, занимавшиеся геометрией в стиле Евклида, становились университетскими профессорами даже в XIX веке. Сейчас античный запас математических знаний — удел учителей и методистов средней школы. Геометры наших дней должны владеть гораздо более разнообразным и сложным математическим аппаратом, чем тот, что был в* *распоряжении Евклида (хотя ни один из них никогда не станет вровень с Евклидом).В MCDM по преимуществу работают люди, знания которых в сфере современных математических технологий чересчур бедны. Для большинства профессиональных математиков по этой причине специалисты по MCDM вроде Березовского в лучшем случае прикладники, а в типичном — имитаторы. Их работы не печатают в основных математических журналах, но у них своя большая полиграфия. Скажем, у Березовского нет вообще ни одной работы в базе данных Math-**Net**.Ru. Есть монографии с участием Березовского по многоцелевой оптимизации, доступные в сети. Их содержание, на мой взгляд, никакого вклада в математику не вносит (ибо довольно элементарно и общеизвестно).Кандидатская диссертация Березовского посвящена многокритериальной оптимизации. Доктором технических наук он стал по специальности техническая кибернетика и теория информации. Березовский получил математическое образование (это был его второй диплом) и владел известными математическими навыками, но относить его к профессиональным математикам можно только со значительной натяжкой. С. Кутателадзе 3 марта 2013 г.*

См. также :
http://en.wikipedia.org/wiki/Multi-criteria_decision_analysis

В общем виде ЗМО может быть сформулирована следующим образом: найти (все такие) элементы x из множества G допустимых в ЗМО элементов (множества решений), на которых достигает оптимума векторный критерий оценки эффективности $F(x)$, компонентами которого являются зависимые от x вещественные функции $f_k(x), k=\overline{1,K}$, называемые локальными критериями: $F(x)=(f_1(x),\ldots,f_K(x))$.

Таким образом, здесь G – некоторое множество, обычно, это подмножество арифметического пространства $X = \mathrm{R}^N$ и F – отображение G в $Y = \mathrm{R}^K$, $F: G \to Y$.

ЗМО о нахождении минимума условно записывают так:

$$F(x) \to \min, \ x \in G.$$

Эта экстремальная задача называется ***задачей многокритериальной оптимизации*** (ЗМО). В ней множество G называется ***множеством допустимых элементов*** (*вариантов-решений-планов* или коротко – *ограничением*), векторное отображение F – ***функционалом*** (*вектор-функционалом* или *векторным критерием качества оценок вариантов-решений-планов*), а его составляющие $f_1, \ldots, f_K$ – ***локальными критериями***.

В ЗМО считается, что каждое решение $x \in G$ полностью характеризуется своей оценкой $y = F(x)$, и выбор оптимального решения сводится к выбору оптимальной оценки из множества всех достижимых оценок $Y_0 = F(G)$.

Подходящее определение оптимума для задачи многокритериальной оптимизации было предложено Вильфредо Парето (1848 - 1923), итальянским экономистом, который использовал его при исследовании процесса рыночного обмена товаров. Понятие оптимального по Парето, или эффективного, решения представляет собой обобщение понятия точки экстремума вещественной функции на случай векторного критерия оптимальности.

Основная проблема в изучении как задач многокритериальной оптимизации, так и задач векторной оптимизации, заключается в том, что оптимизируемый функционал принимает значения не из множества вещественных чисел, а из некоторого векторного пространства, которое не является совершенно (линейно) упорядоченным. Это основное отличие задачи векторной оптимизации от задачи классической (скалярной) оптимизации, которое и вызывает трудности при изучении задач векторной оптимизации.

Некоторые понятия теории задач многокритериальной оптимизации и основные теоремы

Достаточно общим и хорошо разработанным является способ описания предпочтений с помощью бинарных отношений, в первую очередь отношений порядка (см., например, [1, 4]).

Для элементов $u_1 = (u_{11},\ldots,u_{1K})$, $u_2 = (u_{21},\ldots,u_{2K})$ арифметического K – мерного пространства $U = \mathrm{R}^K$ рассмотрим отношения $\succapprox, \succsim, \succ$, определенные следующим образом:

1) $u_1 \succapprox u_2 \;\Leftrightarrow\; u_{1k} \geq u_{2k}$, $k = \overline{1,K}$;

2) $u_1 \succsim u_2 \;\Leftrightarrow\; u_1 \succapprox u_2 \wedge u_1 \neq u_2$;

3) $u_1 \succ u_2 \Leftrightarrow u_{1k} > u_{2k}$, $k = \overline{1,K}$.

В случае 1) будем говорить, что u_1 не меньше u_2 (или u_2 не больше u_1, $u_2 \precapprox u_1$), в случае 2) – что u_1 больше u_2 (или u_2 меньше u_1, $u_2 \precsim u_1$), в случае 3) – что u_1 сторого больше u_2 (или u_2 сторого меньше u_1, $u_2 \prec u_1$).

Напомним, что бинарное отношение (сокращенно б.о., или БО) на некотором множестве U – это некоторое подмножество $R \subseteq U \times U$. Пара $(u_1, u_2) \in U \times U$ находится в отношении R, если $(u_1, u_2) \in R$. Пишут $u_1 R u_2$, или что-то подобное, например $u_1 \rho u_2$ и т.п. В зависимости от свойств множества R говорят о свойствах БО. Например,

1) в случае, когда диагональ прямого произведения $U \times U$ принадлежит R, то это свойство БО называется *рефлексивностью*, а само отношение *рефлексивным*;

2) в случае, когда R обладает свойством

$$[(u_1,u_2)\in R,(u_2,u_3)\in R\Rightarrow(u_1,u_3)\in R\ ],$$

то говорят, что БО *транзитивно* (свойство *транзитивности*);

3) в случае, когда R обладает свойством

$$[(u_1,u_2)\in R\Rightarrow(u_2,u_1)\in R\ ],$$

то говорят, что отношение *симметрично* (свойство *симметричности* или *симметрии*);

4) в случае, когда R обладает свойством

$$[(u_1,u_2)\in R,(u_2,u_1)\in R\Rightarrow u_1=u_2],$$

то говорят, что БО *антисимметрично* (свойство *антисимметрии*).

Если БО обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, то это БО называется отношением *эквивалентности*. Если БО обладает свойствами рефлексивности, антисиммтричности и транзитивности, то это БО называется отношением *порядка*.

Отношение $\underset{\approx}{\succ}$ (частичного) порядка обладает следующими свойствами:

а) *рефлексивность:* $u\underset{\approx}{\succ}u\ ,u\in U$;

б) *антисимметричность*: $u_1\underset{\approx}{\succ}u_2,u_2\underset{\approx}{\succ}u_1\Rightarrow u_1=u_2,\ \ u_1,u_2\in U$;

в) *транзитивность:* $u_1\underset{\approx}{\succ}u_2,u_2\underset{\approx}{\succ}u_3\Rightarrow u_1\underset{\approx}{\succ}u_3,\ \ u_1,u_2,u_3\in U$.

Отношения $\underset{\approx}{\succ}$ и $\underset{\sim}{\succ}$ обладают свойством транзитивности, но не рефлексивны и не антисимметричны.

Оценка $\overline{y}\in Y_0$ называется *наилучшей* (*наименьшей*) по отношению $\underset{\approx}{\prec}$, если для любой оценки $y\in Y_0$ справедливо $\overline{y}\underset{\approx}{\prec}y$.

Если в практической многокритериальной задаче существует наименьшая по отношению $\precapprox$ достижимая оценка $\overline{y}$, то именно её и следует считать оптимальной. К сожалению, такой случай реализуется очень редко: как правило, оценка $\overline{y}$ не существует (в первую очередь, так как порядок $\precapprox$ не является линейным, а также и по другим причинам).

Оценка $\overline{y} \in Y_0$ называется *минимальной* по отношению $\precapprox$, если не существует оценки $y \in Y_0$ такой, что $y \precapprox \overline{y}$. Оценка минимальная по отношению $\precapprox$ называется ***оптимальной по Парето, или эффективной***.

Оценка $\overline{y} \in Y_0$ называется ***минимальной*** по отношению $\prec$ (***слабо оптимальной по Парето, слабо эффективной***), если не существует оценки $y \in Y_0$ такой, что $y \prec \overline{y}$.

Отношения $\succapprox$, $\succsim$ и $\succ$, определенные на множестве оценок, порождают аналогичные по смыслу отношения $\succapprox$, $\succsim$ и $\succ$ во множестве решений.

Решение $\overline{x} \in G$ ***наилучшее***, если для всех $x \in G$ выполнено неравенство $F(\overline{x}) \precapprox F(x)$.

Решение $\overline{x} \in G$ ***оптимально по Парето*** (***эффективно***), если не существует решения $x \in G$ такого, что $F(x) \precsim F(\overline{x})$.

Решение $\overline{x} \in G$ ***слабо оптимально по Парето*** (***слабо эффективно***), если не существует решения $x \in G$ такого, что $F(x) \prec F(\overline{x})$.

Приведем формулировки основных теорем из первой части данного пособия для ЗМО вида

$$F(x) \to \min, \quad x \in G. \qquad (1.1)$$

Рассмотрим сначала ***выпуклые задачи многокритериальной оптимизации*** (ВЗМО). В ЗМО этого типа множество допустимых элементов G предполагается выпуклым, функции f_k также считаются выпуклыми.

Теорема 1. Пусть в ВЗМО $X = \mathrm{R}^N$, G – выпуклое множество, имеет непустую внутренность и является замкнутым.

Если $\overline{x}$ – точка МП в ВЗМО, то существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_k \geq 0$, $k = \overline{1, K}$ (называемые множителями Лагранжа) такие, что для функции Лагранжа, определяемой равенством

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k f_k(x),$$

выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\overline{x}).$$

Замечания

1. Смысл теоремы 1 – в скаляризации критерия, т.е. в сведении задачи многокритериальной задачи к задаче с одним скалярным критерием.

2. Утверждение теоремы 1 справеливо и в более общей ситуации, например, когда X – отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство.

3. Теорема 1 достаточно хорошо известна. В частности, она приведена в монографиях С. Карлина [9] и И. Экланда [18] по математической экономике.

Рассмотрим теперь ВЗМО с ограничениями, задаваемыми не только включениями, но и неравенствами. Здесь ограничение задается в виде

$$G = \{ x \in \mathrm{R}^N : g_l(x) \le 0, l = \overline{1,L};\ x \in A \}, \tag{1.2}$$

где g_l – выпуклые функции, действующие из R^N в R, $l = \overline{1,L}$; A – выпуклое множество в R^N.

Теорема 2 (**правило множителей Лагранжа для ВЗМО**).

Пусть в ВЗМО $(1.1)+(1.2)$ $X = \mathrm{R}^N$, множество A – выпуклое, замкнутое, имеет непустую внутренность и выполнено ***условие регулярности***: существует элемент $\tilde{x} \in \operatorname{int} A$ такой, что для всех $l = \overline{1,L}$ выполнены неравенства $g_l(\tilde{x}) < 0$.

Если $\bar{x}$ – точка МП в ВЗМО $(1.1)+(1.2)$, то существуют не равные одновременно нулю числа $\lambda_k \ge 0$, $k = \overline{1,K}$, $\mu_l \ge 0$, $l = \overline{1,L}$ (называемые множителями Лагранжа) такие, что

а) для функции Лагранжа ВЗМО (1.1) + (1.2), определяемой равенством

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k f_k(x) + \sum_{l=1}^{L} \mu_l g_l(x),$$

выполнено ***условие минимума***

$$\min_{x \in A} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x});$$

б) выполнены ***условия дополняющей нежесткости***

$$\mu_l\, g_l(\bar{x}) = 0,\ l = \overline{1,L}.$$

Замечания

1. Для однокритериальной ВЗМО (при $K = 1$) получаем известную теорему Куна-Таккера (см., например, [3, 8]).

2. Для расшифровки условия а) теоремы 2 можно привлечь субдифференциальный аппарат выпуклого анализа (см., например, [8]).

3. Утверждение теоремы 2 (как и теоремы 1) также справедливо и в более общей ситуации, например, когда X – отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство.

В другом типе ЗМО, изученных в первой части пособия, – ***нелинейных задачах многокритериальной оптимизации*** (НЗМО) – пространство $X = \mathrm{R}^N$, а ограничение G в нём задается в виде

$$G=\{x \in \mathrm{R}^N : g_l(x) \leq 0,\ l=\overline{1,L};\ h_m(x)=0,\ m=\overline{1,M}, x \in A\} \qquad (1.3)$$

где множество $A \subseteq \mathrm{R}^N$; функции $g_l, h_m : \mathrm{R}^N \to \mathrm{R}$.

Теорема 3 (правило множителей Лагранжа для НЗМО)

Пусть в НЗМО (1.1) + (1.3) $f_k, g_l, h_m \in C^1(\mathrm{R}^N)$ и A – выпуклое, замкнутое множество в R^N с непустой внутренностью.

Если $\overline{x}$ – точка ЛМП в НЗМО (1.1) + (1.3), то существуют не равные одновременно нулю числа $\lambda_k \geq 0$, $k=\overline{1,K}$; $\mu_l \geq 0$, $l=\overline{1,L}$; ν_m, $m=\overline{1,M}$ (называемые ***множителями Лагранжа***) такие, что

а) ***для функции Лагранжа*** НЗМО (1.1) + (1.3), определяемой следующим образом

$$\mathcal{L}(x)=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k f_k(x)+\sum_{l=1}^{L}\mu_l g_l(x)+\sum_{m=1}^{M}\nu_m h_m(x),$$

при всех $x \in A$ выполнено неравенство

$$\langle \nabla_x \mathcal{L}(\overline{x}), x-\overline{x}\rangle \geq 0,$$

где $\nabla_x \mathcal{L}(\overline{x})$ градиент функции $\mathcal{L}$ (по x в точке $x=\overline{x}$);

б) выполнены ***условия дополняющей нежесткости***

$$\mu_l\, g_l(x)=0,\ l=\overline{1,L}.$$

Замечания

1. Если $A=\mathrm{R}^N$, то условие а) выглядит так:

$$\nabla_x \mathcal{L}(\overline{x})=0,$$

что следует из неравенства пункта а) при $x=\overline{x}-\nabla_x \mathcal{L}(\overline{x})\in A=\mathrm{R}^N$.

2. Для однокритериальной задачи (при $K=1$) получаем классическое ***правило множителей Лагранжа***.

В дальнейшем в этой части 2 пособия будем рассматривать обобщение многокритериальных задач на бесконечномерный случай - так называемые ***задачи векторной оптимизации*** (ЗВО), когда конечномерность пространств X и Y не предполагается. Они имеют вид:

$$F(x)\to\min,\ H(x)\le 0,\ x\in G,$$

где F и H – выпуклые отображения X в Y и X и Z, соответственно, $F: X\to Y$, $H: X\to Z$, G – выпуклое множество в X, $G\subseteq X$, а сами X, Y, Z – вещественные векторные пространства, причем Y и Z – упорядоченные векторные пространства.

Первый вопрос, который возникает в ЗВО – это определение порядка в Y (и в Z). Этими вопросами мы и займемся.

Один из способов задания порядка (предпочтения) в ЗМО и ЗВО – выделение "положительного" конуса K в пространстве Y (и соответствующего конуса в Z).

ГЛАВА 1. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА, ОТОБРАЖЕНИЯ, КОНУСЫ И ПОРЯДКИ

§1.1. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ЯДРА

Как уже было сказано выше, в пособии рассматриваются векторные пространства только над полем вещественных чисел — вещественные векторные пространства (сокращенно, в.в.п.). Пусть X – в.в.п.

Пусть R – поле вещественных чисел. Множество X называется векторным (или линейным) пространством над R, если определены две операции

– для каждых двух его элементов (векторов) x и y определена их сумма $(x+y)$ – элемент того же множества, и

– для любых элемента $x \in X$ и числа $\alpha \in \mathrm{R}$ определено произведение αx, являющееся также элементом множества X,

причем эти две операции удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам векторного пространства):

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*ассоциативность сложения*);

2) $x+y=y+x$ (*коммутативность сложения*);

3) $\exists 0_X \in X\colon\ \forall x \in X \quad x+0_X=x$ (*существование нейтрального по сложению элемента*);

4) $\forall x \in X\ \exists y \in X\colon \quad x+y=0_X$ (*существование «обратного» элемента или противоположного*);

5) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

6) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(*«дистрибутивность»*);

7) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (*«ассоциативность умножения»*);

8) $1 \cdot x = x$.

Таким образом, введенные в множестве X операции сложения и умножения на число превращают X в (вещественное) ***векторное пространство*** (сокращенно, в.в.п.). Аксиомы 1) – 4) отражают то обстоятельство, что X относительно операции сложения образует коммутативную (абелеву) группу.

Пусть, как и выше, X – вещественное векторное пространство над полем вещественных чисел R. Через A, B, $C\dots$ будем обозначать подмножества пространства X , через α , β , γ , … – вещественные числа.

Наличие в X алгебраических операций сложения элементов из X и умножения элементов из X на вещественные числа позволяет определить соответствующие алгебраические операции над непустыми подмножествами A, B, C, … :

$$C = A + B \overset{def}{=} \{c = a + b : \; a \in A, \; b \in B\},$$

$$C = \alpha A \overset{def}{=} \{c = \alpha \cdot a : a \in A\}.$$

Если множество A – пустое, $A = \varnothing$, то $C = \varnothing$, и если A – одноточечное, $A = \{a\}$, то $C = a + B$ или, соответственно, $C = \alpha\, a$.

Замечание. Для введенных операций над подмножествами X выполнены почти все аналоги аксиом 1) – 8) в.в.п., кроме 4) и 5). При этом под нейтральным элементом для введенных операций надо понимать $\{0_X\}$. Аксиома 4) уже не выполнена при $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$, и заведомо выполнена для $\alpha, \beta > 0$ и выпуклого множества A: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ и в тривиальных случаях, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Таким образом, для множества всех подмножеств пространства X относительно сложения не получается даже коммутативная группа, а лишь полугруппа, но поскольку выполнен аналог 3), то это, так называемый, моноид.

Пусть даны пространство X – в.в.п. и в нём множество $A \subseteq X$. Множество A называется ***выпуклым множеством*** (сокращенно, в.м. или ВМ) тогда и только тогда, когда при всех $\alpha \in [0;1]$ и при всех $x_1, x_2 \in A$

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in A,$$

или (что то же самое) тогда и только тогда, когда при всех $\alpha \in [0;1]$

$$\alpha A + (1-\alpha) A \subseteq A.$$

Множество $\operatorname{core} A$ называется ***ядром множества*** A, если

$$(x \in \operatorname{core} A) \Leftrightarrow (x \in A : \forall\, y \in X\ \exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0 : \forall\, t,\ |t| < \varepsilon \Rightarrow x + ty \in A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A : \forall\, y \in X\ \exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0 : \forall\, t,\ |t| < \varepsilon \Rightarrow y \in (A - x)/t).$$

Напомним, что (в в.в.п. X) множество B называется *поглощающим множеством*, если для любого $x \in X$ существует число $\beta > 0$ такое, что $x \in \beta B$, или $\bigcup\limits_{\beta \in N} \beta B$.

Предложение. Пусть X – в.в.п. и A в.м. в X, $A \subseteq X$. Тогда $\operatorname{core} A$ – в.м.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \operatorname{core} A$, $\alpha \in [0;1]$. Следует ли из этого, что $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in \operatorname{core} A$? Так как $x_1 \in \operatorname{core} A$ и $x_2 \in \operatorname{core} A$, то

$$\forall\, y \in X\ \exists \varepsilon_1 = \varepsilon(y) > 0 : x_1 + ty \in A,\ \forall\, t,\ |t| < \varepsilon_1 \text{ , и}$$

$$x_2 \in \operatorname{core} A \Rightarrow \forall\, y \in X\ \exists \varepsilon_2 = \varepsilon(y) > 0 : x_2 + ty \in A,\ \forall\, t,\ |t| < \varepsilon_2 .$$

Теперь имеем

$$\alpha (x_1 + ty) + (1-\alpha) \cdot (x_2 + ty) = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + ty = x_\alpha + ty,$$

где $|t| < \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Таким образом, для любого $y \in X$ существует $\varepsilon > 0$, что если t таково, что $|t| < \varepsilon$, то $x_\alpha + ty \in A$. Следовательно, $x_\alpha \in \operatorname{core} A$.

Предложение доказано.

Замечание. Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется ***выпуклым телом***. Отметим, что если пересечение выпуклых множеств обязательно выпукло, то пересечение выпуклых тел не обязательно является выпуклым телом (см. [10]). Точки ядра множества иногда называют *алгебраически внутренними точками* этого множества, а иногда — *окруженными точками* (см. [15]).

§ 1.2. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

а). Приведем теорему об отделимости выпуклых множеств в произвольном вещественном векторном проствранстве X. Таким образом, пока не предполагается, что пространство X наделено топологией.

Теорема 1. (теорема об отделимости в в.в.п., см. [10]). Пусть A и B – два выпуклых множества в в.в.п. X, причем ядро хотя бы одного из них не пусто и это ядро не пересекается с другим множеством (например, $\operatorname{core} B \neq \varnothing$, $A \bigcap \operatorname{core} B = \varnothing$). Тогда множества A и B отделимы, т. е. существует ненулевой линейный функционал $x' \in X'$, $x' \neq 0_{X'}$, такой, что при всех $a \in A$ и $b \in B$ всех выполнено неравенство

$$< x', a > \leq < x', b >.$$

Здесь через X' обозначено алгебраически сопряженное к X пространство, а через $< x', a >$ и $< x', b >$ – действие функционала $x' \in X'$ на a и b, соответственно.

Замечание. В аналитической форме теорема 1 об отделимости носит название теоремы о продолжении с подпространства на все пространство линейного функционала, мажорируемого преднормой (полунормой) у Г. Хана (1927) или аддитивной положительно однородной функцией у С. Банаха (1929), см. [15].

б). Приведем теорему об отделимости выпуклых множеств в общих топологических вещественных векторных пространствах (т.в.п.).

Теорема 2. (первая теорема об отделимости в т.в.п., см. [17]). Пусть A, B — непустые выпуклые множества в т.в.п. X, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, причем $(\operatorname{int} A) \cap B = \varnothing$. Тогда существует замкнутая гиперплоскость, разделяющая A и B, т. е. существует ненулевой линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0_X^*$, разделяющий A и B:

$$< x^*, a > \le < x^*, b > \text{ для всех } a \in A,\ b \in B.$$

Если к тому же A и B оба открытые, то они строго отделимы:

$$< x^*, a > < < x^*, b > \text{ для всех } a \in A,\ b \in B.$$

Здесь через X^* обозначено топологически сопряженное к X пространство, а через $< x^*, a >$ и $< x^*, b >$ действие функционала $x^* \in X^*$ на a и b, соответственно.

Замечание. Первая часть теоремы 2 (см. [7]) называется ***теоремой Эйдельгайта*** (***1936***).

в). Для полной картины отделимости выпуклых множеств приведем также теорему об отделимости в локально выпуклых т.в.п. (локально выпуклое пространство, л.в.п.). В этой теореме важно, что X не просто т.в.п., а, именно, л.в.п.

Теорема 3 (вторая теорема об отделимости в т.в.п., см. [17]). Пусть A и B – непустые не пересекающиеся выпуклые множества в отделимом л.в.п. X такие, что A – замкнуто, а B – компактно. Тогда A и B строго отделимы.

Замечание. Доказательство этой теоремы опирается на вторую часть теоремы 2: предварительно устанавливается, что существует выпуклая открытая окрестность V нуля в X (вот где требуется локальная выпуклость т.в.п. X !), что $A+V$ и $B+V$ не пересекаются. Отметим, что, очевидно, $A+V$ и $B+V$ открытые выпуклые множества в X, и тогда отделимость A и B следует из теоремы 2.

§1.3. КОНУСЫ И УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X – вещественные векторные пространства, K – множество в $X, K \subseteq X$. Множество K называется ***конусом*** в X, если для всех $x \in K$ и $\alpha > 0$ выполнено $\alpha x \in K$. Иными словами, $\alpha K \subseteq K, \forall \alpha > 0$.

Предложение. Конус K является выпуклым множеством в пространстве X (будем называть его ***выпуклым конусом***) тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя элементами этого конуса ему принадлежит и их сумма, т.е. выполнено

$$x_1 + x_2 \in K\ ,\ x_1, x_2 \in K$$

или

$$K + K \subseteq K\ .$$

Доказательство. 1. Покажем необходимость.

Пусть $x_1 \in K$, $x_2 \in K$. Так как K – выпуклое множество, то вместе с этими двумя элементами K содержит и их любую выпуклую комбинацию.

Тогда получим, что $x = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2$ принадлежит конусу K, а также $2x = 2(0{,}5x_1 + 0{,}5x_2) = x_1 + x_2 \in K$. Таким образом, $x_1 + x_2 \in K$.

2. Покажем достаточность.

Пусть для любых $x_1, x_2 \in K$ выполнено $x_1 + x_2 \in K$. Покажем, что для любых $\alpha : 0 < \alpha < 1$ и $x_1, x_2 \in K$ следует, что $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in K$, то есть K – выпуклое множество. Обозначим, $x_1' = \alpha x_1 \in K$ и $x_2' = (1-\alpha)x_2 \in K$, значит, $x_1' + x_2' = \alpha x_1' + (1-\alpha)x_2' \in K$, то есть K – выпуклое множество.

Предложение доказано.

Замечание. Итак, конус K в X является выпуклым множеством тогда и только тогда, когда $K + K \subseteq K$. Отметим, что для произвольного множества A в X необязательно $A + A = 2A$.

Введем в X отношение (частичного) порядка. Пусть K – конус в X .

а) Для $x_1, x_2 \in X$ пишем $x_1 \geq x_2$ (или $x_2 \leq x_1$), если $x_1 - x_2 \in K$.

Этим определением в X введено бинарное отношение “$\geq$”. При этом конус K в пространстве X называется *положительным*, т. к.

$$K = \{x \in X : x \geq 0\}.$$

Очевидно, что $\{x \in X : x \geq a\} = a + K$ и из неравенств $x_1 \geq x_2$, $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ следуют неравенства $\alpha x_1 \geq \alpha x_2$ и $\beta x_1 \leq \beta x_2$.

б) Отношение “$\geq$” будет *рефлексивным*, т. е. $x \geq x$ при всех $x \in X$, тогда и только тогда, когда $0 \in K$. Напомним, что конус K называется *заострённым*, если $0 \in K$. (см. [7]).

в) Отношение “$\geq$” будет *антисимметричным*, т. е. из $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq x_1$ следует $x_1 = x_2$, если конус K является *выступающим*, т. е. из $x \in K$, $x \neq 0$ следует, что

$(-x) \notin K$, или (в случае, когда $0 \in K$) из $x_1, x_2 \in K$, $x_1 + x_2 = 0$ следует, что $x_1 = x_2 = 0$.

г) Отношение “$\geq$” будет *транзитивным*, т. е. из $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq x_3$ следует $x_1 \geq x_3$, если конус K является *выпуклым*.

В дальнейшем будем считать, что (частичный) порядок “$\geq$” введен в X именно с помощью некоторого конуса K, который является ***выпуклым***, ***выступающим*** и ***заостренным***. Тогда это бинарное отношение ***рефлексивно***, ***антисимметрично*** и ***транзитивно***:

[П1] ***рефлексивность***:

$$x \geq x,\ x \in X;$$

[П2] ***антисимметричность***:

$$x_1 \geq x_2, x_2 \geq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2, \quad x_1, x_2, x_3 \in X,$$

[П3] ***транзитивность***:

$$x_1 \geq x_2, x_2 \geq x_3 \Rightarrow x_1 \geq x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in X.$$

Поскольку конус K считается заостренным, то условие, что этот конус еще и выступающий, может быть сформулировано так: $K \bigcap (-K) = \{0\}$, т. е. K не содержит прямых, проходящих через вершину 0 конуса K.

Отметим, что при введенном бинарном отношении “$\geq$” пространство X не является *совершенно* (*линейно*) *упорядоченным*, т. е. не является множеством, в котором два любых элемента сравнимы,

[П4] ***линейность***:

$$x_1 \geq x_2 \text{ или } x_2 \geq x_1, \quad x_1, x_2 \in X,$$

а является лишь ***частично упорядоченным множеством***, сокращенно, ч.у.м.

При введенном отношении (частичного) порядка “$\geq$” над неравенствами можно выполнять некоторые действия:

(А) умножать неравенство на положительное число

$$x_1 \geq x_2, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x_1 \geq \alpha x_2;$$

(Б) почленно складывать неравенства одного знака

$$x_1 \geq x_2, x_3 \geq x_4 \Rightarrow x_1 + x_3 \geq x_2 + x_4.$$

Будем также писать $x_1 > x_2$, если $x_1 \geq x_2$ и $x_1 \neq x_2$. Такое отношение ***транзитивно***, но ***не рефлексивно*** и ***не антисимметрично***. Верно следующее:

а) $x_1 > x_2, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x_1 > \alpha x_2$;

б) $x_1 \geq x_2, x_3 > x_4 \Rightarrow x_1 + x_3 > x_2 + x_4$ и, значит,

в) $x_1 > x_2, x_3 > x_4 \Rightarrow x_1 + x_3 > x_2 + x_4$.

Замечания. Вещественное векторное пространство X называется упорядоченным векторным пространством (у.в.п.), если в X введено бинарное отношение, которое является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным (отношение частичного порядка, обозначенное “$\geq$”) и согласовано с линейной структурой пространства X (см., например, [17]):

[ЛП1] $x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 + x \geq x_2 + x,\ x \in X$;

[ЛП2] $x_1 \geq x_2,\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x_1 \geq \lambda x_2,\ x_1, x_2 \in X$.

Первое из этих свойств отражает инвариантность порядка относительно трансляций (параллельных переносов, сдвигов), а второе – инвариантность относительно гомотетий (растяжений). Из [ЛП2] следует, что множество $K = \{x \in X : x \geq 0\}$ является конусом в X. Этот конус называется положительным (относительно порядка “$\geq$”) конусом. Из рефлексивности отношения следует, что $0 \in K$, т. е. K – заостренный конус, из антисимметричности следует, что K

является выступающим конусом, из транзитивности следует, что K – выпуклый конус. Отметим, что [ЛП1] равносильно (Б).

Таким образом, введенный выше с помощью конуса K порядок "$\geq$" превращает X в упорядоченное векторное пространство. Значит, между порядками со свойствами [П1] — [П3], удовлетворяющими также свойствам [ЛП1] и [ЛП2], и заостренными, выступающими, выпуклыми конусами имеется взаимно однозначное соответствие.

Подведем некоторые итоги сказанному.

Пусть X – *в.в.п.* и K – непустой *выпуклый* конус в X, который будем считать нетривиальным, $K \neq \{0\}$. Будем также считать, что к тому же конус K – *заострённый* (т.е. $0 \in K$) и *выступающий* (т.е. $K \bigcap (-K) = \{0\}$). Далее такой конус будем называть *положительным* конусом. Обозначаем, как и выше, через K^+ – множество $K \setminus \{0\}$ и через $\operatorname{core} K$ – ядро множества K. Будем далее предполагать, что $\operatorname{core} K \neq \varnothing$

Бинарное отношение "$\geq$" в X, заданное по правилу: $x' \geq x'' \Leftrightarrow x' - x'' \in K$ $(x', x'' \in X)$, обладает свойствами [$П_1$] *рефлексивности,* [$П_2$] *антисимметричности* и [$П_3$] *транзитивности*, т.е. является отношением (*частичного*) *порядка* и превращает X в (*частично*) *упорядоченное множество* (ч.у.м.). Эти свойства бинарного отношения обеспечиваются свойствами положительного конуса K, а, именно, тем, что конус K, соответственно, заостренный, выступающий и выпуклый. К тому же, наличие линейной структуры в X придает указанному порядку некоторые дополнительные свойства *линейности*: [$ЛП_1$] $x' \geq x'' \Leftrightarrow \alpha x' \geq \alpha x''$; [$ЛП_2$] $x' \geq x'' \Leftrightarrow x + x' \geq x + x''$ $(x, x', x'' \in X,\ \alpha > 0)$, которые возникают в связи с инвариантностью положительного конуса относительно положительных гомотетий и инвариантностью самого X относительно трансляций. Эти пять свойств дают возможность говорить о в.в.п. X как об упорядоченном векторном пространстве (сокращенно, *у.в.п.*).

Используя непустые выпуклые конусы K^+ и $\operatorname{core} K$, можно ввести на в.в.п. X бинарные отношения “>” и “>>”: $x' > x'' \Leftrightarrow x' - x'' \in K^+$, $x' >> x'' \Leftrightarrow x' - x'' \in K$ $(\forall\, x', x'' \in X)$. Эти бинарные отношения уже не являются отношениями (частичного) порядка, поскольку для них не выполнены свойства рефлексивности и антисимметричности, но всё же выполнено свойство транзитивности (в силу выпуклости конусов K^+ и $\operatorname{core} K$). Для этих отношений выполнены свойства, аналогичные [ЛП$_1$] и [ЛП$_2$]. В силу цепочки включений $\operatorname{core} K \subseteq K^+ \subseteq K$, имеем так же, что $x' >> x'' \Rightarrow x' > x'' \Rightarrow x' \geq x''$.

Предложение 1. Если K – непустой, заостренный, выступающий, выпуклый конус в в.в.п. X, то бинарное отношение “≥”, введенное по правилу: $(x', x'' \in X)$ $x' \geq x'' \Leftrightarrow x' - x'' \in K$, является порядком.

Доказательство. Проверим условия порядка.

1. Рефлексивность. Для любого $x \in X$ справедливо $x \geq x$. Это следует из того, что $x - x = 0 \in K$, т.к. конус K является заостренным.

2. Антисимметричность. Пусть для $x', x'' \in X$ справедливо $x' \geq x''$ и $x'' \geq x'$. Тогда справедливо $x' - x'' \in K$ и $x'' - x' \in K$. Отсюда из равенства $(x' - x'') + (x'' - x') = 0$ и из того, что конус K является выступающим, следует, что $x' - x'' = 0$ или $x' = x''$.

3. Транзитивность. Пусть для $x', x'', x''' \in X$ справедливо $x' \geq x''$ и $x'' \geq x'''$. Тогда справедливо $x' - x'' \in K$ и $x'' - x''' \in K$. Отсюда и из того, что конус K является выпуклым, следует, что $(x' - x'') + (x'' - x''') \in K$ или $x' - x''' \in K$, т.е. $x' \geq x'''$.

Предложение 2. Если K – непустой, заостренный, выступающий, выпуклый конус в в.в.п X, то множества K^+ и $\operatorname{core} K$ также являются выпуклыми конусами, причем $\operatorname{core} K \subseteq K^+ \subseteq K$.

Доказательство. Пусть $x \in K^+$. Тогда $x \in K$ и из определения конуса следует, что для любого $\alpha > 0$ справедливо $\alpha x \in K$. Поскольку $x \neq 0$ и $\alpha \neq 0$, то $\alpha x \neq 0$. Значит, справедливо $\alpha x \in K^+$ Поэтому, множество K^+ является конусом и очевидно, что $K^+ \subseteq K$.

Пусть $x \in \operatorname{core} K$. Тогда для любого $x' \in X$ существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $t \in (0; \varepsilon)$ справедливо $x + tx' \in K$. Отсюда и из определения конуса K следует, что для любого $\alpha > 0$ и для любого $x' \in X$ существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $t \in (0; \varepsilon)$ справедливо $\alpha(x + tx') \in K$. Следовательно, для любого $\alpha > 0$ и для любого $x' \in X$ существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $\tau = \alpha t \in (0; \alpha\varepsilon)$ справедливо $\alpha x + \alpha t x' = \alpha x + \tau x' \in K$. Значит, $\alpha x \in \operatorname{core} K$. Поэтому, множество $\operatorname{core} K$ является конусом.

Покажем, что $0 \notin \operatorname{core} K$. Пусть это не так, и $0 \in \operatorname{core} K$. Тогда по определению ядра множества $\forall x', x'' \in X \ \exists \varepsilon' > 0, \varepsilon'' > 0 : \forall t' \in (0; \varepsilon')$, $t'' \in (0; \varepsilon'') \Rightarrow 0 + t'x' \in K,\ 0 + t''x'' \in K$. Отсюда следует, что $\exists x \in K,\ x \neq 0 : (-x) \in K$, что противоречит тому, что K – выступающий конус. Значит, $0 \notin \operatorname{core} K$, и, поэтому, $\operatorname{core} K \subseteq K^+$.

Конус $\operatorname{core} K$ является выпуклым, т.к. ядро любого выпуклого множества является выпуклым.

Далее для любых двух элементов $x', x'' \in K^+$ справедливо $x' + x'' \in K$, причем равенство $x' + x'' = 0$ противоречит тому, что конус K является выступающим. Значит, $x' + x'' \in K^+$ и, следовательно, конус K^+ является выпуклым.

Предложение 3. Если K – непустой, заостренный, выступающий, выпуклый конус в линейном пространстве X, то бинарное отношение, “>” введенное по правилу: $(\forall\, x', x'' \in X)\; x' > x'' \Leftrightarrow x' - x'' \in K^+$, обладает свойством транзитивности.

Доказательство. Пусть для $x', x'', x''' \in X$ справедливо $x' > x''$ и $x'' > x'''$. Тогда справедливо $x' - x'' \in K^+$ и $x'' - x''' \in K^+$. Следовательно, справедливо $x' - x'' \in K$ и $x'' - x''' \in K$. Отсюда и из того, что конус K является выпуклым, следует, что $(x' - x'') + (x'' - x''') \in K$. Причем, если бы $(x' - x'') + (x'' - x''') = 0$, то из того, что конус K является выступающим, следует, что $x' - x'' = 0$ и $x'' - x''' = 0$, но это противоречит тому, что $x' - x'' \in K^+$ и $x'' - x''' \in K^+$. Значит, справедливо $(x' - x'') + (x'' - x''') \in K^+$ или $x' - x''' \in K^+$, т.е. $x' > x'''$.

Предложение 4. Если K – непустой, заостренный, выступающий, выпуклый конус в линейном пространстве, то бинарное отношение “>>”, введенное по правилу: $(\forall\, x', x'' \in X)\; x' >> x'' \Leftrightarrow x' - x'' \in \operatorname{core} K$, обладает свойством транзитивности.

Доказательство. Пусть для $x', x'', x''' \in X$ справедливо $x' >> x''$ и $x'' >> x'''$. Тогда $x' - x'' \in \operatorname{core} K$ и $x'' - x''' \in \operatorname{core} K$. Значит, для любого $x \in X$ существуют

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что для любого $t_1 \in (0; \varepsilon_1)$ справедливо $(x' - x'') + t_1 x \in X$ и для любого $t_2 \in (0; \varepsilon_2)$ справедливо $(x'' - x''') + t_2 x \in X$. Тогда для любого $t \in (0; \varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1; \varepsilon_2\}$, справедливо $(x' - x'') + tx \in X$ и $(x'' - x''') + tx \in X$. Отсюда и из того, что конус K является выпуклым, следует, что $(x' - x'') + tx + (x'' - x''') + tx \in X$ или $(x' - x''') + 2tx \in K$. Получили, что для любого $x \in X$ существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $2t \in (0; 2\varepsilon)$ справедливо $(x' - x''') + 2tx \in K$, т.е. $x' >> x'''$.

Следствие 1. Для любого $\alpha > 0$ и для любых $x', x'' \in X$ справедливы импликации: $x' \geq x'' \Rightarrow \alpha x' \geq \alpha x''$, $x' > x'' \Rightarrow \alpha x' > \alpha x''$, $x' >> x'' \Rightarrow \alpha x' >> \alpha x''$, $x' > x'' \Rightarrow x' \geq x''$, $x' >> x'' \Rightarrow x' > x''$.

Доказательство. Из того, что множество K является конусом, следует, что для любого $\alpha > 0$ и для любых $x', x'' \in X$ справедливо: $x' \geq x'' \Rightarrow x' - x'' \in K \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha(x' - x'') \in K \Rightarrow \alpha x' - \alpha x'' \in K \Rightarrow \alpha x' \geq \alpha x''$. Аналогично доказываются свойства $x' > x'' \Rightarrow \alpha x' > \alpha x''$ и $x' >> x'' \Rightarrow \alpha x' >> \alpha x''$. Из вложения $\operatorname{core} K \subseteq K^+ \subseteq K$ следуют свойства $x' > x'' \Rightarrow x' \geq x''$ и $x' >> x'' \Rightarrow x' > x''$.

В теории многокритериальной оптимизации (и общей векторной оптимизации) в у.в.п. X одновременно с (частичным) порядком “≥” используются отношения “>” и “>>”. Поэтому важны свойства, связывающие эти три отношения между собой. Особую важность среди этих свойств имеют различные преобразования неравенств, задаваемых этими отношениями и (частичным) порядком. Достаточно полный список таких свойств приводится в следующей теореме.

Теорема. Пусть X – у.в.п., K – положительный конус в X, “≥” – определенный конусом K порядок, “>” и “>>” – отношения, определенные с помощью K^+ и $\operatorname{core} K$, соответственно, причем $\operatorname{core} K \neq \varnothing$. Тогда для любых $x', x'', x, x_1, x_2 \in X$ и для любого $\alpha > 0$ справедливы следующие свойства, связывающие бинарные отношения и линейные операции:

(1) $x' \geq x'' \Rightarrow x' + x \geq x'' + x$;

(2) $x' \geq x'' \wedge x_1 \geq x_2 \Rightarrow x' \geq x_1 \wedge x'' \geq x_2$;

(3) $x' \geq x'' \Rightarrow \alpha x' \geq \alpha x''$;

(4) $x' > x'' \Rightarrow x' + x > x'' + x$;

(5) $x' > x'' \wedge x_1 > x_2 \Rightarrow x' + x_1 > x'' + x_2$;

(6) $x' \geq x'' \wedge x_1 > x_2 \Rightarrow x' + x_1 > x'' + x_2$;

(7) $x' > x'' \Rightarrow \alpha x' > \alpha x''$;

(8) $x' > x'' \Rightarrow x' \geq x''$;

(9) $x >> x'' = x' + x >> x'' + x$;

(10) $x' >> x'' \wedge x_1 >> x_2 \Rightarrow x' + x_1 >> x'' + x_2$;

(11) $x' > x'' \wedge x_1 >> x_2 \Rightarrow x' + x_1 >> x'' + x_2$;

(12) $x' \geq x'' \wedge x_1 >> x_2 \Rightarrow x' + x_1 >> x'' + x_2$;

(13) $x' >> x'' \Rightarrow \alpha x' >> \alpha x''$;

(14) $x' >> x'' \Rightarrow x' > x''$.

Замечание. Доказательство теоремы приведено в статье Д. В. Гольцова «Выпуклые конусы: порядки и предпорядки».

§1.4. ВЫПУКЛЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть X – в.в.п., Y, Z – у.в.п., K_Y и K_Z – положительные конусы в Y и Z.

1). Пусть F – отображение из X в Y, $F : X \to Y$. Это отображение называется ***выпуклым отображением***, если множество

$$\operatorname{epi} F = \{(x, y) \in X \times Y : y \geq F(x)\}$$

является выпуклым множеством в $X \times Y$.

Это множество называется ***надграфиком*** (или иногда ***эпиграфом***) отображения F. Отметим, что $\operatorname{epi} F$ – не пустое множество, т. к. $(x, F(x)) \in \operatorname{epi} F$ при $x \in X$.

Предложение. Выпуклость надграфика $\operatorname{epi} F$ равносильна *неравенству Иенсена*: при всех $x_1, x_2 \in X$ и всех $\alpha \in [0;1]$

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2).$$

Доказательство.

Покажем, что из выпуклости надграфика отображения F вытекает неравенство Иенсена. Возьмем произвольные $\alpha \in [0;1]$ и $x_1, x_2 \in X$. Тогда $(x_1, F(x_1)) \in \operatorname{epi} F$ и $(x_2, F(x_1)) \in \operatorname{epi} F$. Так как множество $\operatorname{epi} F$ выпукло, имеем

$$\alpha (x_1, F(x_1)) + (1-\alpha)(x_2, F(x_2)) \in \operatorname{epi} F.$$

Следовательно,

$$(\alpha x_1, \alpha F(x_1)) + ((1-\alpha) x_2, (1-\alpha) F(x_2)) \in \operatorname{epi} F,$$

то есть

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2, \alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2)) \in \operatorname{epi} F.$$

Отсюда по определению надграфика имеем:

$$\alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2) \overset{K_Y}{\geq} F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2),$$

то есть неравенство Иенсена.

Пусть теперь имеет место неравенство Иенсена и пусть $(x_1, y_1) \in \operatorname{epi} F$ и $(x_2, y_2) \in \operatorname{epi} F$. Тогда по определению надграфика имеем $y_1 \geq F(x_1)$ и $y_2 \geq F(x_2)$, т.е. $y_1 - F(x_1) \in K_Y$ и $y_2 - F(x_2) \in K_Y$. Так как K_Y – конус, то $\forall \alpha > 0 : \alpha \in [0;1]$, имеют место включения $y' = \alpha (y_1 - F(x_1)) \in K_Y$ и $y'' = (1-\alpha)(y_2 - F(x_2)) \in K_Y$. В силу выпуклости конуса K_Y получаем

$$y' + y'' = (\alpha (y_1 - F(x_1)) + (1-\alpha)(y_2 - F(x_2))) \in K_Y.$$

Отсюда

$$(\alpha y_1 - \alpha F(x_1) + (1-\alpha) y_2 - (1-\alpha) F(x_2)) \in K_Y,$$

т.е.

$$\left(\alpha y_1+(1-\alpha)\,y_2\right)-\left(\alpha\,F(x_1)+(1-\alpha)\,F(x_2)\right)\in K_Y.$$

По определению порядка “≥” и из неравенства Иенсена имеем

$$\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\geq\alpha\,F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2)\overset{Н.И.}{\geq}F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),$$

т.е.

$$\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\geq F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$$

или

$$\alpha(x_1,\,y_1)+(1-\alpha)(x_2,\,y_2)=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\,\alpha y_1+(1-\alpha)\,y_2)\in\operatorname{epi}F,$$

т.е. $\operatorname{epi}F$ – выпуклое множество в $X\times Y$.

Предложение доказано.

2). Отметим, что если отображение $H:X\to Z$ выпуклое, то множество $\{x\in X:H(x)\leq 0\}$ является выпуклым.

Действительно, $\forall\, x_1,x_2\in X$, таких что $H(x_1)\overset{K_Z}{\leq}0_Z$, $H(x_2)\overset{K_Z}{\leq}0_Z$ и $\forall\alpha\in[0;1]$ получим

$$H(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\underset{Н.И.}{\overset{K_Z}{\leq}}\alpha H(x_1)+(1-\alpha)H(x_2)\overset{K_Z}{\leq}\alpha 0_Z+(1-\alpha)0_Z=0_Z,$$

т.е.

$$H(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\overset{K_Z}{\leq}0_Z.$$

Следовательно, $\left\{x\in X:H(x)\overset{K_Z}{\leq}0_Z\right\}$ – выпуклое множество.

§ 1.5. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ФАНЬ ЦЗЫ – ГЛИКСБЕРГА – ГОФФМАНА

1. Пусть Z – у.в.п. с положительным конусом K, где $K \subseteq Z$. Порядок в Z будем обозначать“$\geq$” (или “$\leq$”), т. е. $z_1 \geq z_2$ $(z_2 \leq z_1)$, если $z_1 - z_2 \in K$. Конус K считается заостренным, выступающим, выпуклым конусом в Z с непустым ядром, $\operatorname{core} K \neq \varnothing$.

Пусть $H: X \to Z$, где X – в.в.п. Отображение H предполагается выпуклым отображением.

Для обозначения (алгебраически) сопряженного к Z пространства мы используем символ Z', а для его элементов пишем $z' \in Z'$, действие $z' \in Z'$ на $z \in Z$ обозначаем $\langle z', z \rangle$. Как обычно, сопряженным конусом к конусу K называется множество

$$K' = \{z' \in Z' \colon \langle z', z \rangle \geq 0 \text{ при всех } z \in K\}.$$

2. В дальнейшем изложении нам потребуются некоторые свойства конусов и их ядер. Перечислим их. Пусть K – конус в Z.

1) $\operatorname{core} K$ – выпуклое множество в Z. Это общее свойство ядра: в вещественном векторном пространстве ядро выпуклого множества само является выпуклым множеством (см., например, [10]).

2) $\operatorname{core} K$ – конус в Z.

Действительно, если $\hat{z} \in \operatorname{core} K$ и $\alpha > 0$, то для $\hat{z}_\alpha = \alpha \hat{z}$ имеем: в силу того, что $\hat{z} \in \operatorname{core} K$, для любого $z \in Z$ существует $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$ такое, что при всех t, $|t| < \varepsilon$, выполнено $\hat{z} + tz \in K$, а в силу того, что K – конус, имеем $\alpha\hat{z} + (\alpha t) z \in K$ или $\hat{z}_\alpha + \tau z \in K$ при τ, $|\tau| < \varepsilon_\alpha = \alpha\varepsilon$. Итак, $\hat{z}_\alpha \in \operatorname{core} K$.

3) $K + \operatorname{core} K = \operatorname{core} K$.

Включение $\mathrm{core}K \subseteq K + \mathrm{core}K$ очевидно в силу определения операции сложения множеств и того обстоятельства, что $0_Z \in K$. Покажем обратное включение. Пусть $z_1 \in K$ и $z_0 \in \mathrm{core}K$. Тогда для любого $z \in K$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех t, $|t| < \varepsilon$ выполнено $z_0 + tz \in K$. Но K – выпуклый конус, а $z_1 \in K$, значит, и $z_1 + z_0 + tz \in K$. Таким образом, $z_1 + z_0 \in \mathrm{core}K$, т. е. $K + \mathrm{core}K \subseteq \mathrm{core}K$.

Наша основная цель в этом параграфе – следующая теорема, обобщающая классическую теорему Фань Цзы – Гликсберга – Гоффмана (о совместности системы выпуклых неравенств, см., например, [16, 23]).

Теорема (обобщенная теорема Фань Цзы – Гликсберга – Гоффмана, см. [22]). Пусть даны X и Z – в.в.п., причем Z – у.в.п. с положительным конусом K, имеющим непустое ядро, $\mathrm{core}K \neq \varnothing$, а также даны G – выпуклое множество в X и $H : X \to Z$ – выпуклое отображение. Тогда имеет место один и только один из двух случаев:

(А) существует точка $\tilde{x} \in G$ такая, что $(-H(\tilde{x})) \in \mathrm{core}K$;

(Б) существует такой ненулевой линейный функционал $\bar{z}'$ из K' – алгебраически сопряженного к K конуса, что при всех $x \in G$ выполнено неравенство $\langle \bar{z}', H(x) \rangle \geq 0$.

Замечания

а) В конечномерном случае $\left(X = \mathrm{R}^n,\ Z = \mathrm{R}^m,\ K = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathrm{R}^m : z_j > 0,\ j = \overline{1, m}\},\ F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),\ f_i \text{ – выпуклые функции}\right)$ теорема Фань Цзы – Гликсберга – Гоффмана (ФГГ) доказана в [16], см. также [23].

б) Теоремы об альтернативе (или совместности) для систем линейных и выпуклых неравенств играют важную роль при изучении экстремальных задач, в том числе и теорема ФГГ для систем выпуклых неравенств, а также теоремы Моцкина и Таккера и другие теоремы для систем линейных неравенств.

Приведем без деталей формулировку классической теоремы ФГГ из монографии Рокафеллара. Напомним, что у Рокафеллара на протяжении всей монографии $X = \mathrm{R}^n$.

Теорема. Пусть C – выпуклое множество и $f_1,...,f_m$ – собственные выпуклые функции, такие, что $\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{ri} C$. Тогда возможен один и только один из следующих двух случаев:

(a) существует такой элемент $x \in C$, что

$$f_1(x) < 0, ..., f_m(x) < 0;$$

(b) найдутся неотрицательные числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 f_1(x) + ... \lambda_m f_m(x) \geq 0, \ \forall x \in C.$$

Доказательство обобщенной теоремы ФГГ

Пусть (А) выполнено. Покажем, что (Б) не выполнено. Итак, пусть существует точка $\tilde{x} \in G$ такая, что $(-H(\tilde{x})) \in \operatorname{core} K$. Так как по определению $\operatorname{core} K \subseteq K$, то для любого линейного функционала $z' \in K'$ следует

$$\langle z', -H(\tilde{x}) \rangle \geq 0, \text{ или } \langle z', H(\tilde{x}) \rangle \leq 0 \text{ при всех } z' \in K' \tag{1}$$

Пусть все же (Б) выполнено, т. е. существует ненулевой линейный функционал $\bar{z}' \in K'$ такой, что выполнено неравенство

$$\langle \bar{z}', H(x) \rangle \geq 0 \text{ при всех } x \in G. \tag{2}$$

Из (1) (при $z' = \bar{z}'$) и (2) (при $x = \tilde{x}$) получаем, что $\langle \bar{z}', H(\tilde{x}) \rangle \geq 0$, или

$$\langle \bar{z}', -H(\tilde{x}) \rangle = 0. \tag{3}$$

Далее, т. к. $(-H(\widetilde{x}))\in\operatorname{core}K$, то для любого $z\in Z$ существует $\varepsilon=\varepsilon(z)>0$ такое, что при всех t, $|t|<\varepsilon$, имеем, что $-H(\widetilde{x})+tz\in K$ и, значит, $\langle\overline{z}',-H(\widetilde{x})+tz\rangle\geq 0$. Отсюда в силу (3) получаем $t\langle\overline{z}',z\rangle\geq 0$ при всех t, $|t|<\varepsilon$, а, значит $\langle\overline{z}',z\rangle=0$, при всех $z\in Z$, т. е. $\overline{z}'=0_{Z'}$, что противоречит предположению (Б) $(\overline{z}'\neq 0_{Z'})$. Итак, если (А) выполнено, то (Б) не выполнено.

Покажем теперь, что если (А) не выполнено, то (Б) выполнено. Рассмотрим множество

$$M=\bigcup_{x\in G}\{H(x)+\operatorname{core}K\}.$$

1) Отметим, что M – выпуклое множество в Z. Пусть $z_1,z_2\in M$. Тогда для некоторых $x_1,x_2\in G$

$$z_1\in H(x_1)+\operatorname{core}K,\ z_2\in H(x_2)+\operatorname{core}K$$

и, значит, для некоторых $\hat{z}_1,\hat{z}_2\in\operatorname{core}K$ имеем

$$z_1=H(x_1)+\hat{z}_1,\ z_2=H(x_2)+\hat{z}_2 \tag{4}$$

Для $\alpha\in(0;1)$ рассмотрим точку $x_\alpha=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, она принадлежит множеству G в силу его выпуклости, $x_\alpha\in G$.

Аналогично, $\hat{z}_\alpha=\alpha\hat{z}_1+(1-\alpha)\hat{z}_2\in\operatorname{core}K$, т. к. $\operatorname{core}K$ – выпуклое множество (по причине того, что K – выпуклое множество).

Обозначим $z_\alpha=\alpha z_1+(1-\alpha)z_2$. Из (4) имеем

$$\alpha(z_1-\hat{z}_1)=\alpha H(x_1),$$

$$(1-\alpha)(z_2-\hat{z}_2)=(1-\alpha)H(x_2),$$

$$z_\alpha-\hat{z}_\alpha=\alpha(z_1-\hat{z}_1)+(1-\alpha)(z_2-\hat{z}_2)=\alpha H(x_1)+(1-\alpha)H(x_2)\geq H(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=H(x_\alpha).$$

Итак, $z_\alpha-H(x_\alpha)\geq\hat{z}_\alpha$, следовательно, $z_\alpha-H(x_\alpha)\in\hat{z}_\alpha+K$, т.е. $z_\alpha-H(x_\alpha)\in\operatorname{core}K+K=\operatorname{core}K$ или $z_\alpha\in H(x_\alpha)+\operatorname{core}K$. Значит, $z_\alpha\in M$.

2) Теперь отметим, что $M\bigcap(-K)=\varnothing$. Действительно, если существует $-\tilde{z}\in -K$ (т. е. $\tilde{z}\in K$) такой, что $-\tilde{z}\in M$, то при некотором $\hat{x}\in G$ имеем $-\tilde{z}\in H(\hat{x})+\operatorname{core}K$, т.е. $-H(\hat{x})\in\tilde{z}+\operatorname{core}K\subseteq K+\operatorname{core}K=\operatorname{core}K$ А последнее означает, что (А) выполнено. Это противоречит нашему предположению (что (А) не выполнено). Поэтому $M\bigcap(-K)=\varnothing$.

3) Поскольку $\operatorname{core}K\neq\varnothing$, то и $\operatorname{core}M\neq\varnothing$, т.к. $\operatorname{core}M\supseteq\operatorname{core}K$; M и K – выпуклые множества и $M\bigcap(-K)=\varnothing$, то M и $(-K)$ можно отделить [10, с. 138]: существует $\bar{z}'\in Z'$, $\bar{z}'\neq 0_{Z'}$ такой, что при всех $x\in G$, $z\in K$ и $\hat{z}\in\operatorname{core}K$ выполнено неравенство отделимости

$$\langle\bar{z}',-z\rangle\leq\langle\bar{z}',H(x)+\hat{z}\rangle \qquad (5)$$

Отсюда следует, что

$$\langle\bar{z}',z\rangle\geq 0 \text{ при всех } z\in K \qquad (6)$$

$$\text{и } \langle\bar{z}',H(x)+\hat{z}\rangle\geq 0 \text{ при всех } x\in G \text{ и всех } \hat{z}\in\operatorname{core}K, \qquad (7)$$

иначе при невыполнении (6) левая часть в (5) не ограничена сверху и правая часть в (5) не ограничена сверху и правая часть в (5) не ограничена снизу.

Из (6) сразу получаем, что $\bar{z}'\in K'$, а из (7) при фиксированных $x\in G$ и $\hat{z}_1\in\operatorname{core}K$ и малых положительных α получаем $\alpha\hat{z}_1\in\operatorname{core}K$ (т. к. $\operatorname{core}K$ – тоже конус), и, значит, в силу (7) $\langle\bar{z}',H(x)+\alpha\hat{z}_1\rangle\geq 0$. Откуда при $\alpha\to +0$ получаем при всех $x\in G$ неравенство $\langle\bar{z}',H(x)\rangle\geq 0$.

Итак, если (А) не выполнено, то (Б) выполнено.

В итоге: в силу первой части доказательства (А)$\Rightarrow\neg$(Б) и, значит, (Б)$\Rightarrow\neg$(А), а также в силу второй части доказательства $\neg$(А)$\Rightarrow$ (Б), т. е. (А)$\Leftrightarrow\neg$(Б), (Б)$\Leftrightarrow\neg$(А).

Теорема доказана.

ГЛАВА 2. ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

§ 2.1. ПОСТАНОВКА ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть X, Y, Z – вещественные векторные пространства, причем Y и Z – упорядоченные векторные пространства, K_X и K_Y – положительные конусы в Y и Z соответственно.

Выпуклой задачей векторной оптимизации (ВЗВО) называется *задача минимизации* следующего вида:

$$F(x)\to\min,\ x\in G,\ H(x)\le 0_Z\,, \tag{1}$$

где G – выпуклое множество в X, $F: X\to Y$, $H: X\to Z$ – выпуклые отображения.

Замечание. Отметим, что *множество допустимых точек* в ВЗВО(1)

$$D=G\bigcap\{x\in X: H(x)\le 0_Z\}$$

является выпуклым множеством как пересечение выпуклых множеств.

Для ВЗВО (1) допустимая точка $\overline{x}\in D$ называется *эффективной точкой* (или *точкой абсолютного минимума по Парето*, точкой АМП), если не существует $\widetilde{x}\in D$ – допустимой точки в ВЗВО (1) такой, что $F(\widetilde{x})<F(\overline{x})$.

Для ВЗВО (1) (в случае, когда X – т.в.п.) допустимая точка $\overline{x}$ называется *локально эффективной точкой* (или *точкой локального минимума по Парето*, точкой ЛМП), если существует открытая окрестность $O(\overline{x})$ точки $\overline{x}$ такая, что не существует $\widetilde{x}$ – допустимой точки в ВЗВО (1), близкой к $\overline{x}$, а именно $\widetilde{x}\in O(\overline{x})$, и такой, что $F(\widetilde{x})<F(\overline{x})$.

Предложение 1. Если $\bar{x}$ – точка ЛМП в ВЗВО (1), то $\bar{x}$ – точка АМП в ВЗВО (1).

Доказательство. Поскольку $\bar{x}$ – точка ЛМП в ВЗВО (1), то существует $O(\bar{x})$ – открытая окрестность точки $\bar{x}$ такая, что не существует точки $\tilde{x} \in G$ такой, что $H(\tilde{x}) \le 0_Z$, $\tilde{x} \in O(\bar{x})$ и $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$.

Пусть утверждение не выполнено и существует $x' \in G$ такая, что и $F(x') < F(\bar{x})$. Из последнего неравенства следует, что $x' \ne \bar{x}$.

Положим для $\alpha \in (0;1)$ $\tilde{x}_\alpha = \alpha x' + (1-\alpha)\bar{x}$. Отметим, что $\tilde{x}_\alpha \in D$ в силу того, что D – выпуклое множество.

Выберем теперь α так, чтобы выполнялось условие $\tilde{x}_\alpha \in O(\bar{x})$. Последнее будет верным при достаточно малых положительных α: $\tilde{x}_\alpha \in O(\bar{x}) \Leftrightarrow \alpha x' + (1-\alpha)\bar{x} \in O(\bar{x}) \Leftrightarrow \alpha(x' - \bar{x}) \in O(\bar{x}) - \bar{x}$, а это верно, т. к. $(O(\bar{x}) - \bar{x})$ – поглощающее множество. Таким образом, существует $\alpha_0 > 0$ такое, что при любом α, $0 < \alpha < \alpha_0$, точка $\tilde{x}_\alpha$ – допустимая в ВЗВО (1) и $\tilde{x}_\alpha \in O(\bar{x})$, а значит, не должно быть $F(\tilde{x}_\alpha) < F(\bar{x})$. Но у нас, с другой стороны, получается

$$F(\tilde{x}_\alpha) = F(\alpha x' + (1-\alpha)\bar{x}) \le \alpha F(x') + (1-\alpha)F(\bar{x}) < \alpha F(\bar{x}) + (1-\alpha)F(\bar{x}) = F(\bar{x}).$$

Это – противоречие с тем, что $\bar{x}$ – точка ЛМП в ВЗВО (1).

Предложение доказано.

Замечание. Предложение 1 утверждает (в случае, когда X – т.в.п.), что в ВЗВО нет точек ЛМП, которые не являются точками АМП.

§ 2.2. ПАРЕТО ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассмотрим сначала выпуклую задачу векторной оптимизации без ограничений в виде неравенств

$$F(x)\to\min, x\in G, \tag{2}$$

где, как и выше, G – выпуклое множество в в.в.п. X, $F:X\to Y$ – выпуклое отображение, Y – у.в.п. с положительным конусом K_Y.

Теорема 4. Пусть в ВЗВО (2) положительный конус K_Y имеет непустое ядро, $\operatorname{core} K_Y=\varnothing$.

Если $\overline{x}$ – точка АМП в ВЗВО (2), то существует отличный от нуля линейный функционал $y'\in K_Y'$ такой, что для функции Лагранжа ВЗВО (2)

$$L(x)=\langle y', F(x)\rangle$$

выполнено условие минимума

$$\min_{x\in G} L(x)=L(\overline{x}).$$

Здесь, как обычно, K_Y – алгебраически сопряженный к K_Y конус, лежащий в алгебраически сопряженном к Y пространстве Y'.

Доказательство

1. Введем в рассмотрение множество

$$M=\{y\in Y: y>F(x)-F(\overline{x}), x\in G\}.$$

2. Покажем, что M – выпуклое множество в Y.

Если $\alpha \in (0;1)$ и $y_1, y_2 \in M$, то существуют $x_1, x_2 \in G$ такие, что $y_1 > F(x_1) - F(\overline{x})$, $y_2 > F(x_2) - F(\overline{x})$.

Тогда для $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$ и $y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ имеем

$$y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 > \alpha\left[F(x_1) - F(\overline{x})\right] + (1-\alpha)\left[F(x_2) - F(\overline{x})\right] \geq$$

$$\geq F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - F(\overline{x}) = F(x) - F(\overline{x}).$$

Таким образом, для $x \in G$ получили, что $y > F(x) - F(\overline{x})$, т. е. $y \in M$. Следовательно, M – выпуклое множество в Y.

3. Отметим, что M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{x \in G}\left(F(x) - F(\overline{x}) + K_Y^+\right),$$

где $K_Y^+ = \{y \in K_Y : y > 0_Y\} = K_Y \setminus \{0_Y\}$.

Действительно, для $x \in G$

$$F(x) - F(\overline{x}) + K_Y^+ = \left\{y = F(x) - F(\overline{x}) + \hat{y} : \hat{y} \in K_Y^+\right\},$$

т. е. $y - (F(x) - F(\overline{x})) = \hat{y} \in K_Y^+$, или $y > F(x) - F(\overline{x})$.

4. Отметим, что $\operatorname{core} K_Y \subseteq K_Y^+$. Действительно, если $\hat{y} \in \operatorname{core} K_Y$, то $\hat{y} \in K_Y$, или $\hat{y} \geq 0_Y$, и если $\hat{y} = 0_Y$, то $\hat{y} = 0_Y \in K_Y$. А это не так: $K_Y - 0_Y = K_Y$, но это множество не является поглощающим в Y, т. к. конус K_Y выступающий, $K_Y \cap (-K_Y) = \{0_Y\}$. Значит, $\hat{y} > 0_Y$ и $\hat{y} \in K_Y^+$. По предположению $\operatorname{core} K_Y \neq \varnothing$ и, значит, $\operatorname{core} M \neq \varnothing$.

Множество M не содержит нуля $0_Y \in Y$. Действительно, если $y = 0_Y \in M$, то существует $x_0 \in G$ такая, что $y = F(x_0) - F(\overline{x}) + \hat{y}$, где $\hat{y} \in K_Y^+$ и, значит, $\hat{y} > 0_Y$, т.е. $\hat{y} = F(\overline{x}) - F(x_0) > 0_Y$, $F(x_0) < F(\overline{x})$. Получили противоречие с тем, что $\overline{x}$ – точка АМП в ВЗВО (2).

5. Поскольку $0_Y \notin M$ и, значит, $0_Y \notin \operatorname{core} M$, то в этом случае точку $0_Y \in Y$ и множество M можно отделить по теореме 1 из §1.2.: существует ненулевой линейный функционал $y' \in Y'$ такой, что при всех $y \in M$ будет выполнено неравенство $\langle y', y \rangle \geq 0 = \langle y', 0_Y \rangle$. Итак, при всех $x \in G$, $\hat{y} \in K_Y^+$ имеет место *неравенство отделимости* $\langle y', F(x) - F(\overline{x}) + \hat{y} \rangle \geq 0$.

Положив в неравенстве отделимости $x = \overline{x}$, получим неравенство $\langle y', \hat{y} \rangle \geq 0$ для всех $\hat{y} \in K_Y^+$, которое, очевидно, выполнено и для $\hat{y} = 0_Y$, значит, для всех $\hat{y} \in K_Y$. Тогда последнее неравенство означает, что $y' \in K_Y'$.

Покажем, что из неравенства отделимости следует неравенство

$$\langle y', F(x) - F(\overline{x}) \rangle \geq 0$$

для всех $x \in G$. Допустим, это не верно, и существует точка $x_1 \in G$ такая, что $\langle y', F(x_1) - F(\overline{x}) \rangle < 0$. Тогда при фиксированном $y_1 \in K_Y^+$ и малых положительных α имеем, что $\alpha y_1 \in K_Y^+$ и

$$\langle y', F(x_1) - F(\overline{x}) + \alpha y_1 \rangle = \langle y', F(x_1) - F(\overline{x}) \rangle + \alpha \langle y', y_1 \rangle < 0,$$

что противоречит неравенству отделимости.

Таким образом, получаем $\langle y', F(x) - F(\overline{x}) \rangle \geq 0$ при всех $x \in G$, или $\langle y', F(x) \rangle \geq \langle y', F(\overline{x}) \rangle$.

Итак, для функции Лагранжа $L(x) = \langle y', F(x) \rangle$ выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} L(x) = L(\overline{x}).$$

Теорема доказана.

Замечания

1. Суть теоремы 4 – в сведéнии задачи векторной оптимизации к задаче скалярной оптимизации. Метод сведéния – “свертка” векторного функционала

$F(x)$ в скалярный – $\langle y', F(x)\rangle$, или скаляризация, популярен в прикладных исследованиях, поскольку помогает избавиться от многочисленных критериев (multiple objectives) с помощью субъективных их весов (см., например, [9], [13], [14], [18]). Конечномерный вариант теоремы 4 см., например, в [18]. Однако, рассмотрев теорему, тут же И. Экланд [18, с. 65–66] подвергает эмоциональной критике как само понятие оптимума по Парето, так и выбор функции коллективной полезности (т. е. функции Лагранжа), служащей для решения проблемы справедливого дележа, и завершает свое обсуждение словами: “Мы не настаиваем на том, что выбор невозможен. Мы утверждаем, что он имеет политический характер, поскольку его невозможно совершить, исходя лишь из экономических соображений … Таким образом, понятие оптимума по Парето указывает водораздел между экономикой и политикой. Экономист ограничивается описанием оптимумов, иначе говоря, убеждается лишь в том, что экономика функционирует без разбазаривания средств. После этого на смену ему приходит политик, чтобы сказать, какой из оптимумов будет хорошим”.

2. Задача (скалярной) минимизации $L(x)\to\min$, $x\in G$ является простейшей задачей выпуклого программирования – задачей минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве, так как $L(x)$ – выпуклая функция из X в R, а G – выпуклое множество в X.

Действительно, т. к. F – выпуклое отображение, то имеет место неравенство Иенсена $F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le \alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2)$, т. е. $y_\alpha=\alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2)-F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\ge 0$, или $y_\alpha\in K_Y$. Но у нас $y'\in K_{Y'}$, значит, $\langle y', y_\alpha\rangle\ge 0$, т. е.

$$\langle y', \alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2)-F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\rangle\ge 0,$$

или
$$\alpha\langle y', F(x_1)\rangle+(1-\alpha)\langle y', F(x_2)\rangle\ge\langle y', F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\rangle,$$

т. е.
$$\alpha L(x_1)+(1-\alpha)L(x_2)\ge L(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),$$

а это означает, что $L(x)$ – выпуклая функция из X в R.

3. Отметим, что из условия минимума, или неравенства $\langle y', F(x)\rangle \geq \langle y', F(\bar{x})\rangle$, выполненного при всех $x \in G$, по обобщенной теореме Фань Цзы – Гликсберга – Гоффмана следует, что не существует точки $\tilde{x} \in G$ такой, что $-(F(\tilde{x}) - F(\bar{x})) \in \operatorname{core} K_Y$ (такие точки $\bar{x}$ называются слабо оптимальными по Парето, или слабо эффективными). С другой стороны, оптимальность по Парето влечет за собой слабую оптимальность по Парето, а небольшие изменения в доказательстве теоремы 4 приводят к тому же выводу – условию минимума, исходя из предпосылки о слабой оптимальности по Парето. Таким образом, условие минимума, сформулированное в теореме 4, является необходимым и достаточным условием слабой оптимальности по Парето и, значит, теорема 4 фактически обобщает на бесконечномерный случай теорему Гурвица (см. [5]) и теорему Ю (см. [24]), изложенные в [14] для конечномерного случая – многокритериальной оптимизации. В связи с теоремой 4 стоит обратить внимание также на теорему Джоффриона (см. [14, с. 107-108]), в которой критерием собственной эффективности (или эффективности по Джоффриону [14, с. 50]) является все то же условие минимума.

Рассмотрим теперь ВЗВО в полном объеме как задачу (1) – векторную задачу минимизации выпуклого векторного функционала $F(x)$ на выпуклом множестве при выпуклых ограничениях в виде включений и неравенств:

$$F(x) \to \min, \ x \in G, \ H(x) \leq 0_Z, \tag{1}$$

где X – в.в.п., Y и Z – у.в.п. с положительными конусами K_Y и K_Z соответственно, G – выпуклое множество в X, $F: X \to Y$ $H: X \to Z$ выпуклые отображения.

Теорема 5. Пусть в ВЗВО (1) положительные конусы K_Y и K_Z имеют не пустые ядра, $\mathrm{core}\, K_Y \neq \varnothing$ и $\mathrm{core}\, K_Z \neq \varnothing$. Если – точка АМП в ВЗВО (1), то существуют не равные нулю одновременно $y' \in K_Y$ и $z' \in K_Z$ такие, что

а) для *функции Лагранжа* ВЗВО (1)

$$L(x) = \langle y',\, F(x)\rangle + \langle z',\, H(x)\rangle$$

выполнено *условие минимума*

$$\min_{x \in G} L(x) = L(\bar{x});$$

б) выполнено *условие дополняющей нежесткости*

$$\langle z',\, H(\bar{x})\rangle = 0.$$

Доказательство

1. Введем в рассмотрение множество в $Y \times Z$

$$M = \{(y, z) \in Y \times Z : y > F(x) - F(\bar{x}), z \geq H(x), x \in G\}.$$

2. Покажем, что M – выпуклое множество в $Y \times Z$.

Если $\alpha\,(0;1)$ и $m_1 = (y_1, z_1)$, $m_2 = (y_2, z_2) \in M$, то существуют $x_1, x_2 \in G$, такие, что $y_1 > F(x_1) - F(\bar{x})$, $y_2 > F(x_2) - F(\bar{x})$, $z_1 \geq H(x_1)$, $z_2 \geq H(x_2)$. Тогда для $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$ и $m = (y, z) = \alpha m_1 + (1-\alpha)m_2 = (\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)$ имеем

$$y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 > \alpha\,[F(x_1) - F(\bar{x})] + (1-\alpha)[F(x_2) - F(\bar{x})] \geq$$
$$\geq F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - F(\bar{x}) = F(x) - F(\bar{x}),$$

а также $z = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \geq \alpha H(x_1) + (1-\alpha)H(x_2) \geq H(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = H(x)$. Таким образом, для $x \in G$ имеем $y > F(x) - F(\bar{x})$ и $z \geq H(x)$, т.е. $(y, z) \in M$. Следовательно, M – выпуклое множество в $Y \times Z$.

3. Отметим, что M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{x \in G} \left(F(x) - F(\bar{x}) + K_Y^{+}, H(x) + K_Z\right),$$

где, как и выше, $K_Y^+ = \{y \in K_Y : y > 0_Z\} = K_Y \setminus \{0_Y\}$.

Действительно, для $x \in G$

$$F(x) - F(\overline{x}) + K_Y^+ = \{y = F(x) - F(\overline{x}) + \hat{y} : \hat{y} \in K_Y^+\},$$

т. е. $y - (F(x) - F(\overline{x})) = \hat{y} \in K_Y^+$, следовательно, $y > F(x) - F(\overline{x})$.
Аналогично, $H(x) + K_Z = \{z = H(x) + \hat{z} \colon \hat{z} \in K_Z\}$, следовательно $z - H(x) = \hat{z} \in K_Z$, т. е. $z \geq H(x)$.

4. Отметим, что $\operatorname{core} M \neq \varnothing$. Это вытекает из того, что $\operatorname{core} K_Z \subseteq K_Z$ и $\operatorname{core} K_Y \subseteq K_Y^+$. Последнее выполнено в силу определения: $\operatorname{core} K_Y \subseteq K_Y$ и $0_Y \notin \operatorname{core} K_Y$ (т. к. $K_Y - 0_Y = K_Y$, а это множество не является поглощающим по причине того, что K_Y предполагается выступающим, $K_Y \cap (-K_Y) = \{0_Y\}$). Поскольку $\operatorname{core} K_Y \neq \varnothing$ и $\operatorname{core} K_Z \neq \varnothing$, то и $\operatorname{core} M \neq \varnothing$.

5. Отметим, что M не содержит нуля $(0_Y, 0_Z) \in Y \times Z$. Действительно, если $(0_Y, 0_Z) \in M$, то существует $x_0 \in G$ такая, что $H(x_0) \leq 0_Z$, а также $0_Y = F(x_0) - F(\overline{x}) + \hat{y}$, где $\hat{y} > 0_Y$, т. е. $F(x_0) - F(\overline{x}) < 0_Y$ или $F(x_0) < F(\overline{x})$. Получаем противоречие с тем, что $\overline{x}$ – точка АМП в ВЗВО (1).

6. Поскольку M – выпуклое множество в $Y \times Z$, $\operatorname{core} M \neq \varnothing$ и $(0_Y, 0_Z) \notin M$, то точку $(0_Y, 0_Z) \in Y \times Z$ и множество M можно отделить по теореме 1 из §1.2: существует ненулевой элемент $(y', z') \in (Y \times Z)' \cong Y' \times Z'$ такой, что для всех $(y, z) \in M$ будет выполнено

$$\langle (y', z'), (y, z) \rangle = \langle y', y \rangle + \langle z', z \rangle \geq \langle (y', z'), (0_Y, 0_Z) \rangle = \langle y', 0_Y \rangle + \langle z', 0_Z \rangle = 0.$$

Таким образом, при всех $x \in G$, $y \in K_Y^+$, $z \in K_Z$ имеет место *неравенство отделимости*

$$\langle y',\, F(x) - F(\overline{x}) + y \rangle + \langle z',\, H(x) + z \rangle \geq 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что выполнены неравенства $\langle y', y\rangle \geq 0$ при всех $y \in K_Y^+$ и, значит, при всех $y \in K_Y$, а также $\langle z', z\rangle \geq 0$ при всех $z \in K_Z$, иначе левая часть неравенства отделимости не ограничена снизу. Последние два неравенства означают, что $y' \in K_Y'$ и $z' \in K_Z'$.

Из неравенства отделимости следует, что при всех $x \in G$

$$\langle y',\, F(x) - F(\overline{x})\rangle + \langle z',\, H(x)\rangle \geq 0.$$

Действительно, если это не так и существует $x_1 \in G$ такое, что

$$\langle y',\, F(x_1) - F(\overline{x})\rangle + \langle z',\, H(x_1)\rangle < 0,$$

то при фиксированных $y_1 \in K_Y^+$ и $z_1 \in K_Z$ для малых положительных α имеем $\alpha y_1 \in K_Y^+$, $\alpha z_1 \in K_Z$ и

$$\langle y', F(x_1) - F(\overline{x}) + \alpha y_1\rangle + \langle z', H(x_1) + \alpha z_1\rangle =$$

$$= \langle y', F(x_1) - F(\overline{x})\rangle + \langle z', H(x_1)\rangle + \alpha\left(\langle y', y_1\rangle + \langle z', z_1\rangle\right) < 0$$

А это противоречит неравенству отделимости.

Таким образом, при всех $x \in G$ выполнено неравенство

$$\langle y', F(x)\rangle + \langle z', H(x)\rangle \geq \langle y', F(\overline{x})\rangle. \qquad (2)$$

7. Докажем *условие дополняющей нежесткости*: $\langle z', H(\overline{x})\rangle = 0$.

Из неравенства (2) при $x = \overline{x}$ имеем $\langle z', H(\overline{x})\rangle \geq 0$.

Точка $\overline{x}$ – допустимая в ВЗВО (1), следовательно, $H(\overline{x}) \leq 0_Z$, т. е. $-H(\overline{x}) \in K_Z$. Так как $z' \in K_Z'$, то $\langle z', -H(\overline{x})\rangle \geq 0$, или $\langle z', H(\overline{x})\rangle \leq 0$. Значит, $\langle z', H(\overline{x})\rangle = 0$.

8. Теперь, добавляя это нулевое слагаемое в правую часть неравенства (2), получаем для всех $x \in G$

$$\langle y',\, F(x)\rangle + \langle z', H(x)\rangle \geq \langle y',\, F(\overline{x})\rangle + \langle z', H(\overline{x})\rangle,$$

т. е. для *функции Лагранжа* $L(x)=\langle y', F(x)\rangle+\langle z', H(x)\rangle$ выполнено *условие минимума*

$$\min_{x\in G} L(x)=L(\overline{x}).$$

Теорема доказана.

Замечание. Как и в замечании 2 к теореме 4, можно показать, что и в теореме 5 функция Лагранжа $L(x)$ – это выпуклая функция из X в R. Это также следует из того, что $y'\in K'_Y$, $z'\in K'_Z$ и F, H – выпуклые отображения из X в Y и Z, соответственно.

Получим из теоремы 5 классическую теорему Куна–Таккера (1951).

Пусть в ВЗВО (1): X – в.в.п.; $Y=\mathrm{R}$; $Z=\mathrm{R}^n$; G – выпуклое множество в X; $K_Y=[0;+\infty)$; $K_Z=\mathrm{R}^n_+=\{z=(z_1,\ldots,z_n): z_j\ge 0,\, j=\overline{1,n}\}$; $F(x)=f_0(x): X\to\mathrm{R}$; $H(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x)): X\to\mathrm{R}^n$.

Тогда

$$K'_Y=[0;+\infty);\quad K'_Z=\mathrm{R}^n_+=\{z'=(z'_1,\ldots,z'_n): z'_j\ge 0,\, j=\overline{1,n}\};\ y'\in K'_Y\Leftrightarrow y'=\lambda_0\ge 0;\ z'\in K'_Z\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z'=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \lambda_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\ L(x)=\langle y', F(x)\rangle+\langle z', H(x)\rangle=$$

$$=\lambda_0 f_0(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j(x);\ \langle z', H(\overline{x})\rangle=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(\overline{x})=0\Leftrightarrow \lambda_j f_j(\overline{x})=0,$$

т.к. $f_j(\overline{x})\le 0, \lambda_j\ge 0, j=\overline{1,n}$.

Теорема 6 (теорема Куна–Таккера)**.** Пусть X – в.в.п., G – выпуклое множество в X, $f_j(\overline{x}): X\to\mathrm{R}$ – выпуклые функции, $j=\overline{0,n}$.

Если $\overline{x}$ – точка абсолютного минимума в задаче выпуклого программирования (ЗВП)

$$f_0(x) \to \min,$$
$$f_j(x) \le 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$
$$x \in G,$$

то существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, ..., \lambda_n \ge 0$ (так называемые *множители Лагранжа*) такие, что

а) для *функции Лагранжа* ЗВП (3)

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j(x)$$

выполнено *условие минимума*:

$$\min_{x \in G} L(x) = L(\overline{x});$$

б) выполнены *условия дополняющей нежесткости*

$$\lambda_j f_j(\overline{x}) = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Замечания

1. Выпуклость F означает, что f_0 – выпуклая функция, определенная на X, а выпуклость H означает, что все f_j – выпуклые функции из X в R, $j = \overline{1,n}$.

2. В ЗВП точка АМП – это обычная точка абсолютного минимума числовой функции f_0 при ограничениях в виде неравенств и включений.

Получим из теоремы 5 теорему о седловой точке. Для этого воспользуемся следующим вспомогательным предложением.

Предложение 2. Пусть в *простейшей линейной* ЗВО (ПЛЗВО)

$$\varphi(z') = \langle z', z \rangle \to \max,\ z' \in K',$$

где Z – в.в.п., K – конус в Z, $z \in Z$, z – фиксирован, выполнены условия

а) $(-z) \in K$,

б) $\langle \bar{z}', z \rangle = 0$,

тогда точка $z' = \bar{z}' \in K'$ является точкой абсолютного максимума в ПЛЗВО.

Доказательство. По определению сопряженного конуса имеем $\langle z', -z \rangle \geq 0$ для всех $z' \in K'$ или $\langle z', z \rangle \leq 0$. Но по условию б) $\langle \bar{z}', z \rangle = 0$. Значит, для всех $z' \in K'$ $\langle z', z \rangle \leq \langle \bar{z}', z \rangle$, т.е. $\varphi(z') \leq \varphi(\bar{z}')$. Следовательно, $z' = \bar{z}'$ является точкой абсолютного максимума в ПЛЗВО.

Предложение доказано.

Теорема 7 (теорема о седловой точке). Пусть в ВЗВО (1) $\operatorname{core} K_Y \neq \varnothing$, и $\operatorname{core} K_Z \neq \varnothing$ и $\bar{x}$ – точка АМП. Тогда существуют не равные нулю одновременно $\bar{y}' \in \overline{K}'_Y$ и $\bar{z}' \in \overline{K}'_Z$ такие, что для функции Лагранжа ВЗВО (1)

$$L(x, z') = L(x, \bar{y}', z') \overset{def}{=} \langle \bar{y}', F(x) \rangle + \langle z', H \rangle$$

точка $(x, y) = (\bar{x}, \bar{z}')$ является *седловой точкой*:

$$\min_{x \in G} L(x, \bar{z}') \overset{(*)}{=} L(\bar{x}, \bar{z}') \overset{(**)}{=} \max_{z' \in K'_Z} L(\bar{x}, z'),$$

т. е. $L(x, \bar{z}') \geq L(\bar{x}, \bar{z}') \geq L(\bar{x}, z')$ для всех $x \in G$, $z' \in K'_Z$.

Доказательство. Если $\bar{x}$ – точка АМП в ВЗВО (1), то по теореме 5 существуют не равные нулю одновременно $\bar{y}' \in K'_Y$ и $\bar{z}' \in K'_Z$ такие, что для

$$\hat{L}(x) = \langle \bar{y}', F(x) \rangle + \langle \bar{z}', H(x) \rangle$$

выполнено условие минимума $\min_{x \in G} \hat{L}(x) = \hat{L}(\bar{x})$, а также условие дополняющей нежесткости $\langle \bar{z}', H(x) \rangle = 0$.

Следовательно, (*) доказано, т. к. $L(x, \bar{z}') = \hat{L}(x)$.

Отметим, что (**) равносильно

$$\langle \bar{y}', F(\bar{x})\rangle + \langle \bar{z}', H(\bar{x})\rangle = \max_{z' \in K'_Z} (\langle \bar{y}', F(\bar{x})\rangle + \langle z', H(\bar{x})\rangle),$$

или

$$\langle \bar{z}', H(\bar{x})\rangle = \max_{z' \in K'_Z} \langle \bar{z}', H(\bar{x})\rangle .$$

Таким образом, точка $z' = \bar{z}'$ должна являться точкой абсолютного максимума на K'_Z функционала $\langle z', z\rangle$, где $z = H(\bar{x})$.

Поэтому, если в предложении 2 положим $z = H(\bar{x})$, то

а) в силу того, что $\bar{x}$ – допустимая точка в ВЗВО (1) и $H(\bar{x}) \le 0_Z$, получаем $(-z) \ge 0_Z$;т.е. $(-z) \in K_Z$;

б) $0 = \langle \bar{z}', z\rangle = \langle \bar{z}', H(\bar{x}')\rangle$ – это условие дополняющей нежесткости в теореме 5.

А в силу предложения 2 точка $z' = \bar{z}'$ является точкой абсолютного максимума функции $\langle z', z\rangle$ на K'_Z, когда выполнены условия а) $(-z) \in K_Z$, б) $\langle \bar{z}', z\rangle = 0$.

Таким образом, точка $z' = \bar{z}'$ – это действительно точка абсолютного максимума функции $\langle z', z\rangle$ на K'_Z, т. е. (**) верно.

Теорема доказана.

Замечания

1. Если дополнительно к условиям теоремы 7 (или теоремы 5) потребовать выполнения условия регулярности (существует точка $\tilde{x} \in G$ такая, что $-H(\tilde{x}) \in \operatorname{core} K_Z$; для задачи выпуклого программирования – это так называемое условие Слейтера), то среди не равных нулю одновременно $\bar{y}' \in K'_Y$, $\bar{z}' \in K'_Z$ (в теореме 5: y', z') обязательно $\bar{y}' \ne 0_{Y'}$. Действительно, т. к. $-H(\tilde{x}) \in \operatorname{core} K_Z$, а $\bar{z}' \in K'_Z$, то $\langle \bar{z}', -H(\tilde{x})\rangle \ge 0$. Далее, если

$\langle \bar{z}', -H(\tilde{x}) \rangle = 0$, то, поскольку $-H(\tilde{x}) \in \operatorname{core} K_Z$, для любого $z \in Z$ существует $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$ такое, что при всех t, $|t| < \varepsilon$, получаем $-H(\tilde{x}) + tz \in K_Z$ и, значит, $\langle \bar{z}', -H(\tilde{x}) + tz \rangle = t \langle \bar{z}', z \rangle \geq 0$. Поэтому $\langle \bar{z}', z \rangle = 0$ при всех $z \in Z$, т. е. $\bar{z}' = 0_{Z'}$, и тогда сразу получаем, что $\bar{y}' \neq 0_{Y'}$. Если же $\langle \bar{z}', H(\tilde{x}) \rangle < 0$, то, предположив $\bar{y}' = 0_{Y'}$, имеем

$$L(\tilde{x}, \bar{z}') = \langle \bar{y}', F(\tilde{x}) \rangle + \langle \bar{z}', H(\tilde{x}) \rangle = \langle \bar{z}', H(\tilde{x}) \rangle < 0 = \langle \bar{y}', F(\bar{x}) \rangle + \langle \bar{z}', H(\bar{x}) \rangle = L(\bar{x}, \bar{z}'),$$

что противоречит условию (*) в теореме 7 (условию минимума а) в теореме 5).

2. Если в ВЗВО (1) считать, что X – в.в.п., а Y и Z – т.в.п., K_Y и K_Z соответственно положительные конусы, задающие порядки “$\overset{Y}{\geq}$” и “$\overset{Z}{\geq}$”, причем $\operatorname{int} K_Y \neq \varnothing$ и $\operatorname{int} K_Z \neq \varnothing$, то, заменяя в доказательствах теорем 4 и 5 core на int и при отделимости теорему 1 на теорему 2 из §1.2, мы приходим к аналогам теорем 4 и 5 для т.в.п. Y и Z (и в.в.п. X), формулировки которых выглядят точно так же, с одной лишь особенностью, что вместо существования $y' \in K_Y'$ (и $z' \in K_Z'$) можно гарантировать, что это непрерывные функционалы, т. е. $y' \in K_Y^*$ (и $z' \in K_Z^*$). При указанных изменениях верна также и теорема 7.

3. Для случая топологических векторных пространств теорема, близкая к теореме 7, приведена в работе [5], но в доказательстве “автор допустил неточности, которые были устранены при редактировании перевода” (примеч. ред. см.: [5, с. 141]). Однако, учитывая нечеткое изложение автора статьи [Гурвиц], это “устранение” неточностей слабо повлияло на улучшение доказательства теоремы 5.3.1. О существовании этой теоремы автору пособия стало известно уже после того, как были получены результаты, приведенные в статье [20].

Аналогичные замечания (о неточностях и примечаниях редактора) можно высказать и по поводу работы [6] (примеч. ред. см.: [6, с. 164,165]). Отметим, что авторами статей [5] и [6] не был сделан решающий шаг по очищению ситуации от “случайных примесей” и, таким образом, получению общего результата: они действовали в рамках т.в.п. и использовали основной инструмент – первую и вторую теоремы об отделимости в т.в.п. (из §1.2), но по какой-то причине упустили, что и для в.в.п. есть теоремы отделимости (см. теорему 1 из §1.2). Хотя поиск подходящей более общей ситуации, чем рассматривается в [5] и [6], занимает там же значительное их внимание.

4. Конечномерный вариант, близкий к теореме 7, появляется в [13, § 17.1] и в [9, § 9.1] при обсуждении традиционной экономической теории благосостояния в терминах справедливого дележа, конкурентного равновесия и вектора оптимальных цен. Для экономики с континуумом участников дележи, эффективные по Парето, обсуждаются в [2]. См. также [11].

5. Наконец, может показаться, что изложение материала в нашем пособии излишне подробно. Но тут мы полностью согласны со словами профессора В. Г. Дурнева из Ярославского государственного университета о том, что “пока результат не проверен по шагам – это не результат”. Тем более что перед нами имеются результаты и их представление в статьях[5] и [6], потребовавшие попыток устранения неточностей переводчиком.

§ 2.3. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

2.3.1. Слабо эффективные точки множеств

Пусть Y – у.в.п., K – положительный конус в Y, A – множество в Y, $A \subseteq Y$.

Точка $\bar{y} \in A$ называется *слабо эффективной точкой* множества A (или точкой *слабого минимума по Парето*), если не существует точки $\tilde{y} \in A$ такой, что $\bar{y} - \tilde{y} \in \operatorname{core} K$ (т.е. $\tilde{y} \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$, где $K^\circ = \operatorname{core} K$).

Точка $\bar{y} \in A$ называется *эффективной точкой* множества A (или точкой *минимума по Парето*), если не существует точки $\tilde{y} \in A$ такой, что $\bar{y} - \tilde{y} \in K^+$, где $K^+ = K \setminus \{0_Y\}$ (т.е. $\tilde{y} \overset{K}{<} \bar{y}$).

Замечание. Если $\bar{y}$ – эффективная точка (точка минимума по Парето) множества A, то $\bar{y}$ – слабо эффективная точка (точка слабого минимума по Парето) множества A, поскольку $\operatorname{core} K \subset K^+$.

Введем в рассмотрение множество $A^* = A + K$.

Предложение 1. *Пусть $\bar{y} \in A$. Точка $\bar{y}$ – точка слабого минимума по Парето для множества A тогда и только тогда, когда она является точкой слабого минимума по Парето для множества A^*.*

Доказательство. Если $\bar{y} \in A$ является слабо эффективной точкой для A^*, то, очевидно, она слабо эффективна и для A, так как $A \subseteq A^*$.

Предположим теперь, что $\bar{y}$ – слабо эффективная точка для A и существует такая точка $\tilde{y} \in A^*$, что $\tilde{y} \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$. Согласно равенству $A^* = A + K$, для некоторых $y \in A$ и $y_0 \in K$ верно $\tilde{y} = y + y_0 \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$, тогда $y \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$, что противоречит слабой эффективности точки $\bar{y}$ для A. Предложение доказано.

Множество A, лежащее в Y, называют *эффективно выпуклым*, если выпукло множество A^*.

Теорема 8. *Пусть A – эффективно выпукло. Точка $\bar{y} \in A$ является точкой слабого минимума по Парето тогда и только тогда, когда существует линейный функционал $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что*

$$\langle y', \bar{y} \rangle \leq \langle y', y \rangle \text{ для любой } y \in A.$$

Доказательство. По предложению 1: $\bar{y} \in A$ – точка слабого минимума по Парето на A, тогда и только тогда, когда $\bar{y} \in A$ – точка слабого минимума по Парето на A^*, то есть не существует точки $y^* \in A^*$ такой, что $\bar{y} - y^* \in \operatorname{core} K$.

Определим отображение $F(y)$ следуюшим образом: $F(y) = y - \bar{y}$ то есть $F = E - \bar{y}$, $F : Y \to Y$, где E – тождественное отображение Y. Отметим, что F - выпуклое отображение.

Пусть $\bar{y} \in A$ – точка слабого минимума по Парето на A. Тогда не существует $y^* \in A^*$ такого, что $\bar{y} - y^* = -F(\bar{y}) \in \operatorname{core} K$.

По обобщенной теореме Фань Цзи–Гликсберга–Гоффмана (см. [22]) получаем, что тогда существует линейный функционал $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что $\langle y', F(y) \rangle \geq 0$ для любой $y \in A^*$.

В силу включения $A \subseteq A^*$ имеем для любой $y \in A$ неравенство $\langle y', F(y) \rangle \geq 0$, или по определению F имеем $\langle y', y - \bar{y} \rangle \geq 0$ то есть $\langle y', y \rangle \geq \langle y', \bar{y} \rangle$, что и требовалось доказать.

Наоборот, пусть теперь существует $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что $\langle y', \tilde{y} \rangle \geq \langle y', \bar{y} \rangle$ для любой $\tilde{y} \in A$. По определению сопряженного конуса имеем $\langle y', y_0 \rangle \geq 0$ для любой $y_0 \in K$. Следовательно, $\langle y', \tilde{y} + y_0 \rangle \geq \langle y', \bar{y} \rangle$ для любых $\tilde{y} \in A$, $y_0 \in K$, то есть $\langle y', y \rangle \geq \langle y', \bar{y} \rangle$ для любой $y \in A^*$, или опять по определению F имеем $\langle y', F(y) \rangle \geq 0$ для любой $y \in A^*$.

Тогда по обобщенной теореме Фань Цзи–Гликсберга–Гоффмана получаем, что не существует точки $y^* \in A^*$такой, что $-F(y^*) \in \operatorname{core} K$ или $\bar{y} - y^* \in \operatorname{core} K$. Значит, $\bar{y}$ – точка слабого минимума по Парето на A^*, и, в силу предложения 1, $\bar{y}$ – точка слабого минимума по Парето на A.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 8 обобщает теорему П. Л. Ю (P. L. Yu) с конечномерного случая (см. [14], [24]) на случай произвольного, в том числе бесконечномерного, упорядоченного векторного пространства.

Пусть X – вещественное векторное пространство, Y – упорядоченное векторное пространство и K – положительный конус в Y, F – отображение из X в Y, $F : X \to Y$.

Предложение 2. *Пусть F – выпуклое отображение из X в Y. Если G – выпуклое множество в X, то множество $A = F(G)$ эффективно выпукло, то есть эффективное множество $A^* = A + K$ – это выпуклое множество в Y.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in A^*$, то есть для некоторых $x_1, x_2 \in G$ и $y', y'' \in K$ имеем $y_1 = F(x_1) + y'$, $y_2 = F(x_2) + y''$.

В силу выпуклости множества G точка $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$, $\alpha \in (0; 1)$. Далее,

$$y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = \alpha\big(F(x_1) + y'\big) + (1-\alpha)\big(F(x_2) + y''\big) =$$

$$= \big(\alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2)\big) + \big(\alpha y' + (1-\alpha)y''\big) \overset{K}{\geq} F\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big) + \hat{y} = F(x) + \hat{y},$$

где $\hat{y} = \alpha y' + (1-\alpha)y'' \in K$ так как K – выпуклый конус.

Итак, $y \overset{K}{\geq} F(x) + \hat{y}$, то есть $\hat{\hat{y}} \overset{K}{\geq} y - (F(x) + \hat{y}) \in K$, значит,

$$y = F(x) + \big(\hat{y} + \hat{\hat{y}}\big) = F(x) + \tilde{y},$$

где $\tilde{y} = \hat{y} + \hat{\hat{y}} \in K$ опять же в силу выпуклости *K*. Таким образом, для $y_1, y_2 \in A^*$ при $\alpha \in (0; 1)$ получаем

$$y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = F(x) + \tilde{y},$$

где $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$ и $\tilde{y} \in K$, то есть $y \in A^*$. Значит, множество A^* выпукло.

Предложение доказано.

Замечание. Если A – выпуклое множество, то очевидно, что A^* тоже выпуклое множество, как сумма двух выпуклых множеств A и K. Но даже, если G – выпуклое множество, F – выпуклое отображение, то множество $A = F(G)$ не обязательно выпуклое.

Пример. $X = \mathrm{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in X$, $Y = \mathrm{R}^2$, $y = (y_1; y_2) \in Y$; $F(x) = (f_1(x); f_2(x)) = (y_1; y_2)$, $F : X \to Y$ – выпуклое отображение при $y_1 = x_1^2 + kx_2$, $y_2 = kx_1 + x_2^2$;

$$A = \{x \in X : x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0\}$$

– выпуклое множество.

Образом отображения F будет гладкая кривая, три точки которой $F((1;0))$, $F\left(\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right)$, $F((0;1))$ при $k \neq 1$ не лежат на одной прямой, и поэтому $F(A)$ – множество не выпуклое.

2.3.2. Слабо эффективные решения ВЗВО

Из теоремы 8 и предложения 2 получается следующая теорема, обобщающая теорему 4.

Пусть X – в.в.п., Y – у.в.п. с положительным конусом K, G – выпуклое множество в X, $F : X \to Y$ – выпуклое отображение. Рассмотрим *выпуклую задачу векторной оптимизации* (ВЗВО) *с ограничениями в виде включений* следующего вида

$$F(x) \to \min, x \in G.$$

Точка $\overline{x} \in G$ называется *слабо эффективной точкой* в ВЗВО (точкой *слабого минимума по Парето* в ВЗВО), если $\overline{y} = F(\overline{x})$ – слабо эффективная точка множества $A = F(G)$ или (в силу предложения 1) множества $A^* = A + K$ (точка слабого минимума по Парето для множества A^*).

Точка $\overline{x} \in G$ называется *эффективной точкой* в ВЗВО (точкой *абсолютного минимума по Парето* в ВЗВО, точкой АМП в ВЗВО), если $\overline{y} = F(\overline{x})$ – эффективная точка (точка минимума по Парето) для множества A.

Выше отмечено, что $\overline{y} \in A$ – слабо эффективная точка множества A тогда и только тогда, когда $\overline{y}$ – слабо эффективная точка множества A^*. А также, если

$\overline{y} \in A$ – эффективная точка множества A, то $\overline{y}$ – слабо эффективная точка множества A.

Значит, если $\overline{x} \in G$ – эффективная точка в ВЗВО, то $\overline{x}$ – слабо эффективная точка в ВЗВО.

Теорема 9. *Пусть* $\overline{x} \in G$. *Точка* $\overline{x}$ *является точкой слабого минимума по Парето в* ВЗВО *тогда и только тогда, когда существует ненулевой линейный функционал* $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ *такой, что для функции Лагранжа* ВЗВО

$$L(x) \stackrel{def}{=} \langle y', F(x) \rangle$$

выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} L(x) = L(\overline{x}).$$

Доказательство. Отметим, что поскольку G – выпуклое множество в X и F – выпуклое отображение из X в Y, то множество $A^* = A + K$ – выпуклое множество в Y, где $A = F(G)$.

Далее, по теореме 8, когда A^* является выпуклым множеством, точка $\overline{y} \in A$ (у нас сейчас $\overline{y} = F(\overline{x})$) является слабо эффективной точкой множества A тогда и только тогда, когда существует линейный функционал $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что при всех $y \in A$

$$\langle y', y \rangle \geq \langle y', \overline{y} \rangle,$$

но поскольку сейчас $A = F(G)$, $\overline{y} = F(\overline{x})$, то

$$\langle y', F(x) \rangle \geq \langle y', F(\overline{x}) \rangle$$

при всех $x \in G$, или для функции Лагранжа $L(x)$ выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} L(x) = L(\overline{x})$$

Теорема доказана.

Замечания

1. Суть теоремы 9 – в сведении задачи векторной оптимизации к задаче скалярной оптимизации. Метод сведения – "свертка" векторного функционала $F(x)$ в скалярный – $\langle y', F(x) \rangle$, или скаляризация, часто используется в прикладных исследованиях, чтобы избавиться от многочисленных критериев (multiple objectives) с помощью субъективных их весов.

2. Задача (скалярной) минимизации $L(x) \to \min, \quad x \in G$ является простейшей задачей выпуклого программирования – задачей минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве, так как $L(x)$ – выпуклая функция
из X в R, а G – выпуклое множество в X.

Список литературы

Монографии, сборники и учебные пособия

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. – М.: Наука, 1984. С. 568.
2. *Гильденбранд В.* Ядро и равновесие в большой экномике. – М.: Наука, 1986. С.200.
3. *Гирсанов И.В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. – М.: Изд-во Московского университета, 1970. С. 122.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решёток. – М.: Мир, 1982. С. 456.
5. *Гурвиц Л.* Программирование в линейных пространствах // Исследования по линейному и нелинейному программированию. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 65–155.
6. *Гурвиц Л., Удзава Х.* Заметка о седловых точках функции Лагранжа // Исследования по линейному и нелинейному программированию. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 156–172.
7. *Дэй М.М.* Нормированные линейные пространства. – М.: Мир,1961. С.236.
8. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. С. 480.
9. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. С. 840.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. С. 544.
11. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. – М.: Наука, 1985. 352 С.
12. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. С. 352.

13. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. С.520.
14. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. С. 256.
15. *Райков Д. А.* Векторные пространства. – М.: ГИФМЛ, 1962. С.212.
16. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. С.472.
17. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. С.360.
18. *Экланд И.* Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983. С. 248.

Журнальные статьи

19. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений// Журн. вычисл. математики и матем. физики.– 1965. – Т.5, № 3. С. 395–453.
20. *Груздева Ю.В., Пухов С.В.* Принцип оптимальности в выпуклых задачах векторной оптимизации // Вестник Ивановского государственного университета, серия «Естественные, общественные науки», ИвГУ, 2009, выпуск 2 «Биология. Химия. Физика. Математика». С. 86–100.
21. *Груздева Ю.В., Пухов С.В.* Парето-оптимальные решения в выпуклых задачах векторной оптимизации // Вестник. Ивановского государственного университета. Сер. «Естественные, общественные науки», ИвГУ, 2010, выпуск 2 «Биологи. Химия. Физика. Математика». С. 98–103.
22. *Пухов С.В.* Теорема Фань Цзи – Гликсберга – Гоффмана для выпуклых отображений со значениями в упорядоченных векторных пространства // Вестник Ивановского государственного университета, серия «Естественные, общественные науки», ИвГУ, 2009, выпуск 2 «Биология. Химия. Физика. Математика», С. 117–120.

23. *Fan Ky, Glicksberg I., Hoffman A. J.* Systems of inequalities involvingconvex functions // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 8 (1957). P. 617–622.

24. *Yu P. L.* Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // J. of Optimization Theory and Applications. 1974. Vol. 14, № 3. P. 319–377.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ВП, в.п. – векторное пространство

ВВП, в.в.п. – вещественное ВП

УВП, у.в.п. – упорядоченное ВВП

ТВП, т.в.п. – топологическое ВВП

о.л.в. т.в.п. – отделимое локально-выпуклое ТВП

АМП – абсолютный минимум по Парето

ЛМП – локальный МП

НП, н.п. – нормированное ВП

ВМ, в.м. – выпуклое множество (в ВВП)