UNIVERSITE DE NGAOUNDERE

Ecole Nationale Supérieure des Sciences Agro-Industrielles (ENSAI)

Département de Mathématiques et Informatique

CLASSIFICATION ORTHOGONALE DES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRE

Cours et Exercices Corrigés

1er Cycle des Facultés et Grandes Ecoles

TIEUDJO DANIEL

Typeset by LaTeX

UNIVERSITE DE NGAOUNDERE

Ecole Nationale Supérieure des Sciences Agro-Industrielles (ENSAI)

Département de Mathématiques et Informatique

CLASSIFICATION ORTHOGONALE DES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRE

Cours et Exercices Corrigés

1er Cycle des Facultés et Grandes Ecoles

TIEUDJO DANIEL

Ph. D. en Mathématiques, Chargé de Cours

NGAOUNDERE 2006

Typeset by LaTeX

CONTENU

Préface

Ce document présente la classification orthogonale des courbes et surfaces du second degré, qui est un outil important et très utilisé dans plusieurs branches des mathématiques et de la physique.

"Classifier" les courbes et surfaces du second degré nécessite quelques connaissances théoriques et une habilité à exécuter et à appliquer les algorithmes. Les objectifs du présent fascicule sont de :

- présenter, sans rentrer en détail dans la théorie, les concepts nécessaires à la compréhension du sujet (le lecteur peut se referrer à la bibliographie recommandée pour des notions théoriques complémentaires) ;
- proposer des algorithmes de classification orthogonale des courbes et surfaces du second degré ;
- illustrer les algorithmes étudiés par des exemples types ;
- proposer des exercices d'application.

Ce fascicule est destiné aux étudiants du premier et second cycles des universités qui suivent un cours d'algèbre linéaire ou de géométrie analytique. Il est particulièrement recommandé aux étudiants des filières "mathématique", "physique" et aux étudiants des écoles d'ingénieurs, et est fortement conseillé aux enseignants de mathématique.

Je remercie tous ceux qui voudront bien me faire part de leurs critiques et suggestions.

L'AUTEUR

1 Définitions et position du problème

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. (Forme linéaire) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Toute application linéaire l définie de E vers $\mathbb{K}$ est appelée *forme linéaire de* E. Une telle application $l : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est telle qu'à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on associe le scalaire $l(\overrightarrow{u}) = l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{K}$. On note $(a_i)_{i=1}^{n}$ *les coordonnées de l.*

Les formes quadratiques peuvent être définies de deux manières différentes.

Définition 1.2. (Forme quadratique) Une *forme quadratique* $q(x_1, \dots, x_n)$ sur $\mathbb{R}$ est un polynôme à n indéterminées $x_1, \dots, x_n$ de degré 2 de la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

où $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, et les coefficients a_{ij} sont **non tous nuls**.

Définition 1.3. (Forme bilinéaire et forme quadratique) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps commutatif $\mathbb{R}$ et de base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. Une *forme bilinéaire symétrique* φ sur E est une application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout vecteur $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ de E et tout scalaire α de $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

symétrie $\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$,

linéarité à gauche

(i) $\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + \varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$,

(ii) $\varphi(\alpha \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \alpha\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

Une forme bilinéaire symétrique sur E est aussi une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est symétrique et linéaire à droite (c'est à dire $\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$, $\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$ et $\varphi(\overrightarrow{x}, \alpha\overrightarrow{y}) = \alpha\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$). En effet toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ symétrique et linéaire à gauche est linéaire à droite.

La *forme quadratique* q associée à la forme bilinéaire symétrique non nulle φ est l'application

$$q : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$q(\overrightarrow{v}) = \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$$

i.e. chaque vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ est associé à un réel $q(\overrightarrow{v}) = q(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, où $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$, $1 \leq i, j \leq n$.

On pose $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ la *matrice de la forme bilinéaire symétrique non nulle φ (ou de la forme quadratique associée q) par rapport à la base $\mathcal{B}$*, et on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = q(x_1, \dots, x_n) = \overrightarrow{v}^t A \overrightarrow{v} &= (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{v}^t$ désigne la transposée de v.

Remarque 1.1. Il est souvent commode de noter un vecteur avec une flèche au dessus et d'écrire les coordonnées d'un vecteur verticalement, par exemple $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Cependant, les coordonnées des vecteurs peuvent être notés horizontalement. Dans ce cas, dans les formules où intervient le produit d'une matrice par les coordonnées d'un vecteur, la matrice sera remplacée par sa transposée et l'ordre d'écriture inversée pour que la multiplication soit possible.

Propriété 1.1. *La matrice d'une forme quadratique (forme bilinéaire symétrique) est une matrice symétrique.*

Définition 1.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.

- Toute forme bilinéaire symétrique φ définie positive (i.e. pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{v}$, $\varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$) est appelé *produit scalaire.*

  Le produit scalaire "classique" de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E est noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ou encore $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et est défini par

  $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

  où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ relativement à $\mathcal{B}$.

- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E sont dits *orthogonaux* par rapport à un produit scalaire φ si leur produit scalaire est nul, c'est à dire $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$. Par exemple, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *orthogonaux* pour le produit scalaire classique si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- La *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E est notée $||\overrightarrow{u}||$ et est définie par :
$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})}.$$
On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normé si $||\overrightarrow{u}|| = 1$

- Un système de vecteurs est dit *orthogonal*, si tous les vecteurs de ce système, pris 2 à 2 distinctement, sont orthogonaux. Un système de vecteurs est dit *orthonormé* s'il est orthogonal et tous les vecteurs sont normés.

- Une base est *orthogonale* (respectivement *orthonormée*) si elle constitue un système orthogonal (respectivement orthonormé) de vecteurs. Le repère $O\mathcal{B}$ de l'espace affine $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel de base orthonormée $\mathcal{B}$ est appelé *repère orthonormé*.

- Soit A une matrice carrée. Le *polynôme caractéristique* de A est $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$. C'est un polynôme de degré n. L'*équation caractéristique* de A est l'équation
$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{où} \quad I \text{ est la matrice unité.}$$
Les solutions de l'équation caractéristique sont appelées *valeurs propres* de A. Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{v} \in E$ tels que $(A - \lambda I)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$ sont appelés *vecteurs propres associés à la valeur propre* λ. L'ensemble de tous les vecteurs propres associés à une valeur propre λ est un sous-espace vectoriel. On le note E_λ et on l'appelle *sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre* λ.

- Soit λ une valeur propre d'une matrice A. La *multiplicité algébrique* de λ est son ordre en tant que racine de l'équation caractéristique $p(\lambda) = 0$. La *multiplicité géométrique* de λ est la dimension de E_λ.

- Une matrice carrée A est *orthogonale* si $AA^t = A^tA = I$ i.e. si $A^{-1} = A^t$. [On rappelle que A^t est la matrice transposée de A et A^{-1} est la matrice inverse de A]. Remarquons que l'égalité $A^tA = I$ signifie que les colonnes de la matrice A sont orthogonales, prises 2 à 2 distinctement.

Propriété 1.2. *Les vecteurs propres $\overrightarrow{v_i}$ associés respectivement aux valeurs propres distinctes λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ forment un système libre.*

Propriété 1.3 (Processus de Gramm-Schmidt)**.** *Soit $(\overrightarrow{u_i})_{i=1}^k$ un système libre de k vecteurs. Alors, on peut former un système libre et orthogonal de k vecteurs $(\overrightarrow{v_i})$ issu de $(\overrightarrow{u_i})$ en posant :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{u_1} \\
\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{u_2} - \frac{(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_1})}{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1})}\overrightarrow{v_1} \\
\overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{u_3} - \frac{(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_1})}{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1})}\overrightarrow{v_1} - \frac{(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_2})}{(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2})}\overrightarrow{v_2}, \\
\ldots
\end{aligned}$$

En général

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1}, \quad \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{u_i} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_j})}{(\overrightarrow{v_j}, \overrightarrow{v_j})}\overrightarrow{v_j} \quad \textit{pour} \quad i = 2, \ldots, k.$$

Propriété 1.4. *Soit λ une valeur propre de multiplicité algébrique k et soit $(\overrightarrow{u_i},\ i = 1, \ldots, k)$ un système libre de k vecteurs propres associés à λ. Alors, de ces k vecteurs propres $\overrightarrow{u_i}$, on peut former un système libre et orthogonal $(\overrightarrow{v_i})$ de k vecteurs.*

Remarque 1.2. L'espace vectoriel E peut être défini sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Dans ce cas, les définitions ci-dessus sont adaptables et les résultats restent valables.

Définition 1.5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine associé à E. Une *quadrique* H de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient l'équation

$$q(x_1, \ldots, x_n) + 2l(x_1, \ldots, x_n) + a_0 = 0, \tag{1}$$

où $q(x_1, \ldots, x_n)$ est une forme quadratique, $l(x_1, \ldots, x_n)$ est une forme linéaire et a_0 est un reél.
$q(x_1, \ldots, x_n)$ et $l(x_1, \ldots, x_n)$ sont respectivement *la forme quadratique et la forme linéaire associées à la quadrique* H.
L'équation (1) est l'équation de la quadrique.

Les quadriques sont appelées *coniques ou courbes du second degré* et *cubiques ou surfaces du second degré* respectivement en dimension 2 et 3.
Une conique ou courbe du second degré a donc une équation de la forme

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \tag{2}$$

donnée dans un repère orthonormé du plan affine et une surface du second degré a une équation de la forme

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \tag{3}$$

donnée dans un repère orthonormé de l'espace affine de dimension 3.

En général, une *quadrique ou hypersurface du second degré* est une équation de la forme (1) ci-dessus.

La donnée d'une quadrique suppose la donnée d'une forme quadratique q représentée par sa matrice $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, d'une forme linéaire l représentée par ses coordonnées (a_i), $i = 1, \ldots, n$ et d'une constante a_0.

1.2 Différents types de coniques et quadriques

Dans un plan affine doté d'un repère orthonormé les coniques remarquables (ou classiques) et leurs équations sont :

	Type	Equation
1	Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2	Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
3	Parabole	$x^2 = 2py,\ p > 0$
4	Deux droites parrallèles	$x^2 = 1$
5	Deux droites confondues	$x^2 = 0$
6	Origine ou deux droites imaginaires sécantes	$x^2 + y^2 = 0$
7	Deux droites sécantes	$x^2 - y^2 = 0$
8	$\emptyset$ ou ellipse imaginaire	$x^2 + y^2 = -1$
9	$\emptyset$ ou deux droites imaginaires parallèles	$x^2 = -1$

Dans un espace affine de dimension 3 doté d'un repère orthonormé, les cubiques remarquables et leurs équations sont :

	Type	Equation
1	Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2	Ellipsoïde imaginaire ou $\emptyset$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
3	Hyperboloïde à une nappe	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
4	Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
5	Cône	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
6	Cône imaginaire	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
7	Paraboloïde elliptique	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$ où $p, q > 0$
8	Paraboloïde hyperbolique	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$ où $p, q > 0$
9	Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
10	Cylindre elliptique imaginaire ou $\emptyset$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
11	Cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
12	Deux plans sécants	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
13	Deux plans imaginaires sécants ou $\emptyset$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
14	Cylindre parabolique	$x^2 = 2py,$ où $p > 0$
15	Deux plans parallèles	$x^2 = a^2,$ où $a \neq 0$
16	Deux plans imaginaires parallèles	$x^2 = -a^2,$ où $a \neq 0$
17	Deux plans confondus	$x^2 = 0$

Les schémas de ces courbes et surfaces sont insérés en annexe.

Remarque 1.3. L'éllipse imaginaire, les droites imaginaires, l'éllipsoïde imaginaire, le cylindre imaginaire, les plans imaginaires sont des *courbes et surfaces imaginaires*. Si le corps de base de l'espace vectoriel est $\mathbb{R}$, alors les équations des courbes et surfaces imaginaires représentent l'ensemble vide ou un point. Sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, ces équations décrivent des courbes complexes imaginaires pures, i.e. un ensemble de points d'affixes de parties réelles nulles.

1.3 Position du problème

Soit $q = q(x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique.
La *forme canonique* de la forme quadratique q est une équation de la forme

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots + \lambda_n X_n^2 \tag{4}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. On dit aussi que q est exprimée *sous forme de somme des carrés*.
Soit H une quadrique donnée dans un repère orthonormé $(O\mathcal{B})$ par l'équation (1).
La *forme canonique* de la quadrique H est l'équation simplifiée de la forme

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots \lambda_n X_n^2 + D = 0 \tag{5}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ et $D \in \mathbb{R}$.

Soit (1) l'équation d'une quadrique H donnée dans un repère orthonormé $(O\mathcal{B})$; le problème de classification orthogonale consiste à trouver un nouveau repère orthonormé relativement auquel l'équation (1) s'écrit sous la forme (5) et de déterminer la nature de l'ensemble des points de l'espace vérifiant (1). Il s'agit donc de déterminer le nouveau repère orthonormé $(O'\mathcal{B}')$ et les formules de transformation (formules de changement de variables) correspondantes qui permettent d'écrire l'équation de H sous forme canonique, et de donner le type de courbe ou de surface que H décrit.

2 Transformation des coordonnées : formules de changement des variables

L'un des principaux objectifs de la géométrie analytique consiste en : étant donnés deux systèmes de coordonnées (2 repères ou 2 bases) et connaissant les coordonnées d'un point M ou d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans l'un des systèmes, il faut déterminer les coordonnées de ce même point ou vecteur dans l'autre système. Ce problème est connu sous le nom de *problème de changement de repère (base) ou changement de variables* et s'opère par une *transformation de coordonnées.*

Dans toute la suite, il est donné un espace affine associé à un espace vectoriel. Les systèmes de coordonnées utilisés sont supposés orthogonaux.

2.1 Formule de changement de repère

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de E et soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ une nouvelle base orthonormée de E. Les vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ ont pour coordonnées relativement à l'ancienne base :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_1} &= a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}, \\
\overrightarrow{u_2} &= a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3}, \\
\overrightarrow{u_3} &= a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la *matrice de passage* P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de la matrice P sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base relativement à l'ancienne base.

Comme $||\overrightarrow{u_1}|| = ||\overrightarrow{u_2}|| = ||\overrightarrow{u_3}|| = 1$ et $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_3} =$
$= \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0$, alors la matrice P est orthogonale.

Soient $\mathcal{R} = (O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{R}' = (O'\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3})$ les repères orthonormés associés aux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.

Soit un point M de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

or

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{u_1} + y'\overrightarrow{u_2} + z'\overrightarrow{u_3}$$

et

$$OO' = x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} + z_0\overrightarrow{e_3}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} &= x'\overrightarrow{u_1} + y'\overrightarrow{u_2} + z'\overrightarrow{u_3} + x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} + z_0\overrightarrow{e_3} \\
&= x'(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}) \\
&\quad +y'(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3}) \\
&\quad +z'(a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}) \\
&\quad +x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} + z_0\overrightarrow{e_3} \\
&= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0)\overrightarrow{e_1} \\
&\quad +(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0)\overrightarrow{e_2} \\
&\quad +(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0)\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

Comme tout vecteur se décompose d'une manière unique relativement à une base, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} x &=& a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y &=& a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z &=& a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0 \end{array}$$

qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\boxed{(M)_{\mathcal{R}} = P \cdot (M)_{\mathcal{R}'} + (O')_{\mathcal{R}}} \qquad (6)$$

où $(N)_{\mathcal{S}}$ représente les coordonnées d'un point N dans le repère S.

La formule (6) donnent une relation entre les coordonnées du point M dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Elle permet donc, connaissant les coordonnées de M dans l'un des repères, de déterminer les coordonnées de M dans l'autre repère.
La formule (6) est appelée *formule de changement de repère* ou *formule de transformation des coordonnées*. Elle définit ainsi une *formule de changement de variables*.

2.2 Formule de changement de base pour un vecteur

Soit E un espace vectoriel. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ et (x', y', z') dans $\mathcal{B}'$. Posons $(O\mathcal{B})$ et $(O\mathcal{B}')$ les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement (ils ont même origine O). Supposons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM'}$ c'est à dire $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = (M)_{\mathcal{R}}$ et $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'} = (M)_{\mathcal{R}'}$, où $(\overrightarrow{w})_{\mathcal{T}}$ représente les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ relativement à la base $\mathcal{T}$ et $(N)_{\mathcal{S}}$ représente les coordonnées d'un point N dans le repère $\mathcal{S}$. Donc M et M' représentent l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Ainsi, les formules de transformation (6) ont alors la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

i.e.

$$(M)_{\mathcal{R}} = P \cdot (M)_{\mathcal{R}'}$$

qui s'écrit

$$\boxed{(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = P \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'}} \tag{7}$$

puisque $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

La formule (7) est appelée *formule de changement de base* pour les vecteurs.

Notons que

$$(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = P \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'} \quad \text{équivaut à} \quad P^{-1} \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'} .$$

2.3 Formule de changement de base pour une matrice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est notée A. Soit $\mathcal{B}'$ une nouvelle base de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit A' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = P \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'}$, c'est à dire $A(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = AP \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'}$. Donc $(f(\overrightarrow{v}))_{\mathcal{B}} = A(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = P \cdot A'(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'}$ d'où $P^{-1}A(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'} = A'(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'} = (f(\overrightarrow{v}))_{\mathcal{B}'}$. Donc

$$A' = P^{-1}AP.$$

Ainsi,

$$\boxed{A' = P^{-1}AP \quad \text{i.e.} \quad A = PA'P^{-1}} \tag{8}$$

La formule (8) est appelée *formule de changement de base* pour les endomorphismes.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit φ une forme bilinéaire symétrique définie sur E et soit q sa forme quadratique. Soit A la matrice de φ (ou de q) relativement à $\mathcal{B}$. Pour tout vecteur u et v de E, on a :

$$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u})^t_{\mathcal{B}} A(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} \text{ et } q(\overrightarrow{u}) = \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u})^t_{\mathcal{B}} A(\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}}.$$

Soit $\mathcal{B}'$ une nouvelle base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors, comme pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}} = P \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'}$, on a :

$$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (P \cdot (\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}'})^t A(P \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'})$$

ou encore

$$q(\overrightarrow{u}) = (P \cdot (\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}'})^t A(P \cdot (\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}'}).$$

i.e.

$$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ((\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}'})^t P^t AP \cdot (\overrightarrow{v})_{\mathcal{B}'}$$

et

$$q(\overrightarrow{u}) = ((\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}'})^t P^t AP \cdot (\overrightarrow{u})_{\mathcal{B}'}$$

D'où, si A' désigne la matrice de φ (ou de q) relativement à $\mathcal{B}'$, alors

$$\boxed{A' = P^t A P} \tag{9}$$

La formule (9) est appelée *formule de changement de base* pour les formes bilinéaires et les formes quadratiques.

Définition 2.1. Matrices semblables Soient A et B deux matrices carrées de même ordre. On dit que A est *semblable* à B et on note $A \approx B$ s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. On dit aussi que les matrices A et B sont *conjuguées* à l'aide de P. Une matrice A est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale. Ceci signifie l'existence d'une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Si la matrice A est semblable à une matrice diagonale par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale P, on dit que A est *orthogonalement diagonalisable.*

Propriété 2.1. *Deux matrices semblables ont exactement les mêmes valeurs propres.*

En effet, puisque $det(P) \neq 0$, l'équation caractéristique de A

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

s'écrit aussi,

$$\begin{aligned} 0 = det(P^{-1})det(A - \lambda I_n)det(P) &= det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ = det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P) &= det(A' - \lambda I_n) \end{aligned}$$

et les deux matrices A et $A' = P^{-1}AP$ ont la même équation caractérisitique, et donc les mêmes valeurs propres.

Remarque 2.1. L'inverse de la propriété ci-dessus n'est pas toujours vraie !

Propriété 2.2. *La donnée de deux bases d'un espace vectoriel implique la donnée d'une matrice de passage entre ces deux bases : celle-ci définit des formules de changement de base ou formules de changement de variables et inversement.*

Deux matrices A et B sont dites *équivalentes* et on note $A \sim B$ si elles ont un même rang.

3 Réduction canonique des surfaces du second degré

Nous étudions ici les méthodes de classification des surfaces du second degré. D'une manière générale, nous décririons des algorithmes de réduction des surfaces du second degré; ces algorithmes restent applicables dans les cas des courbes et des hypersurfaces du second degré.

3.1 Théorèmes de réduction canonique des surfaces du second degré

Théoreme 3.1. *Toute forme quadratique peut être réduite sous forme canonique à l'aide d'une transformation orthogonale homogène des coordonnées. Les coefficients de la forme canonique sont les solutions de son équation caractéristique.*

En effet, comme toute matrice symétrique est orthogonalement diagonalisable, alors toute forme quadratique est orthogonalement diagonalisable i.e. il existe une base orthonormée relativement à laquelle la matrice de la forme quadratique est diagonale. La diagonale de cette matrice est constituée des valeurs propres qui sont toutes réelles.

En substituant dans l'équation de la surface les formules de changement de variables qui ont permis de réduire la forme quadratique associée, et en regroupant l'équation obtenue en carrés parfaits, on obtient une des équations 1–5 suivantes :

Théoreme 3.2. *Toute surface de second degré*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

donnée dans un repère orthonormé peut être réduite, à l'aide d'une transformation orthogonale des coordonnées, sous l'une des formes canoniques suivantes :

1. $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+D=0$, *où* $\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0, \lambda_3\neq 0$;
2. $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+2a_3'Z=0$, *où* $\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0, a_3'\neq 0$;
3. $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+D=0$, *où* $\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0$;
4. $\lambda_1X^2+2a_2'Y=0$, *où* $\lambda_1\neq 0, a_2'\neq 0$;
5. $\lambda_1X^2+D=0$, *où* $\lambda_1\neq 0$.

Théoreme 3.3. *Toute conique ou surface de second degré donnée dans un repère orthonormé représente l'une des courbes ou surfaces décrites à la section* 1.2*.*

3.2 Méthodes de réduction canonique des surfaces du second degré

Elaborons maintenant les techniques de réduction orthogonale d'une surface de second degré, donnée dans un repère orthonormé. La procédure décrite ici peut être utilisée pour réduire les courbes du second degré (coniques), et les hypersurfaces en général.

Ainsi, considérons la surface donnée par l'équation (3) suivante dans un repère orthonormé :

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0.$$

Elle peut être écrite sous la forme matricielle

$$v^t A v + 2lv + a = 0$$

où

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$l = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

A est la matrice de la forme quadratique et l désigne les coordonnées de la forme linéaire associées.

Relativement à une nouvelle base $\mathcal{B}'$ donnée par une matrice de passage P, et en appliquant les formules de transformation

$$v = Pv', \text{ où } v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{10}$$

l'équation devient :

$$(v')^t A' v' + 2l'v' + a = 0, \quad \text{où} \quad l = Pl', \; A' = P^t A P \tag{11}$$

et la constante a ne change pas. L'équation (11) ne contient plus les termes comportant les produits des variables.

Ainsi, l'étape la plus importante consiste en l'***annulation*** dans l'équation (3) des termes comportant les produits des variables. Cette opération ne concerne que la partie quadratique de la surface et correspond à un changement de base. Elle permet de trouver une base orthogonale par rapport à laquelle la matrice A a la forme diagonale, donc de réduire la forme quadratique. C'est la première étape de réduction de la quadrique.

3.2.1 Réduction de la forme quadratique associée

Nous examinons ici 4 méthodes :

1. Algorithme de réduction par diagonalisation de la matrice

Cette méthode permet de diagonaliser orthogonalement la matrice A de la forme quadratique. Les coefficients λ_i de (4) sont les valeurs propres de A.

Etape 1 : Déterminer la matrice A de la forme quadratique et les solutions de l'équation caractéristique $det(A - \lambda I) = 0$;

Etape 2 : 2 cas :

- Si toutes ces racines sont distinctes, alors pour chaque λ, trouver une solution du système d'équations $(A - \lambda I)v = 0_E$, puis normer le vecteur obtenu.
- Si il existe une racine double, alors trouver une solution fondamentale du système d'équations $(A - \lambda I)v = 0_E$. Utiliser le processus de Gramm-Schmidt pour extraire un système orthogonal.

Etape 3 : construire la nouvelle base $\mathcal{B}'$ constituée de tous les vecteurs normés obtenus à l'étape 2. Ecrire la matrice de passage P de l'ancienne base à la nouvelle base.

Remarquer que relativement à cette nouvelle base, la matrice A' de la forme quadratique est diagonale, et sa diagonale est constituée des valeurs propres, prises avec leur multiplicité et dans le même ordre d'écriture correspondant à celle de P; par conséquent, la forme quadratique a la forme :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Exemple 3.1. *On donne la forme quadratique suivante*

$$q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Déterminer la forme canonique el la base orthogonale relativement à laquelle elle s'écrit comme somme de carrés.

Solution : L'équation caractéristique de q est :

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Donc $det(A-\lambda I) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda-1)^3(\lambda+3) = 0$. Donc $\lambda = 1$ est valeur propre de multiplicité algébrique 3 et $\lambda = -3$ est valeur propre de multiplicité algébrique 1. Déterminons les vecteurs propres associés :

Pour $\lambda = 1$,

$$(A - \lambda I) = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on obtient les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (1,1,0,0),\ \overrightarrow{e_2} = (1,0,1,0),\ \overrightarrow{e_3} = (-1,0,0,1).$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ ne sont pas orthogonaux, appliquons le processus de Gramm-Schmidt pour en extraire un système orthogonal.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{e_1} = (1,1,0,0), \\
\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{e_2} - \frac{(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v_1})}{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}} \overrightarrow{v_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), \\
\overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{e_3} - \frac{(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{v_1})}{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}} \overrightarrow{v_1} - \frac{(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{v_2})}{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}} \overrightarrow{v_2} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1),
\end{aligned}$$

Pour $\lambda = -3$,

$$(A-\lambda I) = A+3I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient le vecteur $\overrightarrow{e_4} = (1, -1, -1, 1)$.
Ces vecteurs, normés forment la base orthonormale $\mathcal{B}'$ constituée des vecteurs $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}$ de coordonnnées respectives

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0),\ \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,1,1,3),\ \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$$

relativement à laquelle la forme quadratique a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les formules de transformation ou de changement de variables sont :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

et l'équation de la forme quadratique relativement à la nouvelle base est

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 3X_4^2.$$

Exemple 3.2. *On donne la forme quadratique suivante*

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4 + 3x_4^2.$$

Déterminer la forme canonique et la base orthogonale relativement à laquelle elle est diagonale i.e. elle s'écrit comme somme de carrés.

Solution : L'équation caractéristique de q a pour solutions -2, 7 et 0 de multiplicité algébrique respective 2, 1 et 1.
Pour $\lambda = -2$,

$$(A - \lambda I) = A + 2I \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (-1, 1, 0, 0),\ \overrightarrow{e_2} = (-1, 0, 1, 0).$$

Pour $\lambda = 7$, une solution fondamentale du système d'équations $(A - \lambda I) = A - 7I$ est $\overrightarrow{e_3} = (2, 2, 2, 3)$.
Pour $\lambda = 0$, une solution fondamentale du système d'équations $(A - \lambda I) = A$ est $\overrightarrow{e_4} = (1, 1, 1, -2)$.
Comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ ne sont pas orthogonaux, appliquons le processus de Gramm-Schmidt pour en extraire un système orthogonal.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{e_1} = (-1, 1, 0, 0), \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{e_2} - \frac{(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v_1})}{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}} \overrightarrow{v_1} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), \end{aligned}$$

En normant ces vecteurs, on obtient la base orthonormale constituée des vecteurs

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0),\ \overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2, 0),$$

$$\overrightarrow{f_3} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 2, 2, 3),\ \overrightarrow{f_4} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, -2)$$

relativement à laquelle la forme quadratique a pour matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les formules de transformation ou de changement de variables sont donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

et l'équation de la forme quadratique relativement à la nouvelle base est

$$-2X_1^2 - 2X_2^2 + 7X_3^2.$$

2. Algorithme de Lagrange

Le but de la méthode de Lagrange consiste en ce que : en séparant les carrés, on obtient une équation dont le nombre d'inconnues est inférieur au nombre initial.

Soit (1) une surface donnée dans un repère orthonormé. Soit

$$q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \text{ où } a_{ij} = a_{ji},$$

la forme quadratique extraite de (1).

CAS 1 : supposons que l'un au moins des coefficients a_{ii} des carrés soit non nul ; par exemple, supposons que $a_{11} \neq 0$;

regroupons tous les termes contenant x_1 et écrivons cette expression comme carré parfait. On a :

$$\begin{aligned}
q &= a_{11}(x_1^2 + 2x_1(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)) + q_1(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right) \\
&\quad - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + q_1(x_2, \ldots, x_n) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + q_2(x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

où

$$q_2(x_2, \ldots, x_n) = q_1(x_2, \ldots, x_n) - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$$

Posons

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

Ainsi,

$$q = a_{11}y_1^2 + q_2(x_2, \ldots, x_n)$$

où $q_2(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_iy_j$ est une forme quadratique à $n-1$ inconnues et ne comportant plus x_1.

CAS 2 : supposons que tous les coefficients a_{ii} des carrés sont tous nuls et supposons par exemple que $a_{12} \neq 0$; en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} x_1 = & y_1 + y_2 \\ x_2 = & y_1 - y_2 \end{cases}$$

on obtient :

$$q = 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \cdots .$$

A partir de cette nouvelle forme, on peut procéder comme au cas 1.

Exemple 3.3. *Réduire la forme quadratique suivante sous forme canonique* $q = 2x_1x_4 + 6x_2x_3$.

Solution : Utilisons la méthode de Lagrange.
Comme tous les coefficients des termes au carré sont nuls et a_{14} et a_{23} non nuls, effectuons le changement de variables :

$$x_1 = y_1 + y_4,\ x_2 = y_2 + y_3,\ x_3 = y_2 - y_3,\ x_4 = y_1 - y_4$$

qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} q &= 2(y_1 + y_4)(y_1 - y_4) + 6(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\ &= 2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 - 2y_4^2. \end{aligned}$$

Effectuons un autre changement de variables :

$$X_1 = \sqrt{2}y_1,\ X_2 = \sqrt{6}y_2,\ X_3 = \sqrt{6}y_3,\ X_4 = \sqrt{2}y_4$$

qui peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$T'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

et on obtient

$$q = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2.$$

Ainsi la matrice de passage qui est orthogonale

$$T = T'T'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T'T'' \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

3. Méthode de Jacobi

L'algoritme de Lagrange est souvent difficile à appliquer, surtout si le nombre d'inconnues est très élevé. Il est recommandé dans ce cas d'utiliser la méthode de Jacobi.

Supposons que la forme quadratique extraite de l'équation de la quadrique (1) soit donnée par sa matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Calculons tous les déterminants successifs :

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = |A|.$$

La méthode de Jacobi s'applique lorsque

$$\Delta_i \neq 0, \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Si cette condition est vérifiée, la forme quadratique peut être réduite sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2, \text{ ou encore} \\ q &= \Delta_1 z_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} z_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} z_n^2. \end{aligned}$$

Du premier type, on pose le changement de variables

$$\begin{cases} y_1 &= \Delta_1 z_1, \\ y_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} z_2, \\ y_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta_2} z_3, \\ \vdots & \\ y_n &= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} z_n. \end{cases}$$

Exemple 3.4. *Réduire la forme quadratique suivante sous forme canonique*

$$q = 2x_1^2 + \cdots + 2x_n^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - \cdots - 2x_{n-1}x_n.$$

Solution : Utilisons la méthode de Jacobi. La matrice de cette forme quadratique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons les déterminants :

$$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Montrons par recurrence que $\Delta_k = k+1$ pour tout $k = 1, \dots, n$. En effet,

Base de recurence : pour $k = 1$, on a bien $\Delta_1 = 1+1 = 2$.

Supposons que $\Delta_m = m + 1$ pour tout $m < k$ et **montrons** que $\Delta_k = k+1$. Pour cela calculons Δ_k en le décomposant par rapport à la 1ère ligne:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}.$$

Puisque $k - 1,\ k - 2 < k$ on peut appliquer l'hypothèse de recurrence. Ainsi on a :

$$\Delta_k = 2\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2} = 2(-1 + 1) - (k - 2 + 1) = k + 1;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi tous les $\Delta_k \neq 0$, et on peut appliquer la méthode de Jacobi. La forme quadratique a donc la forme

$$\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2 + \cdots + \frac{n}{n+1}y_n^2.$$

Le changement de variables

$$X_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}}\, y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

permet d'écrire la forme quadratique sous la forme

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2.$$

Remarque 3.1. En général, les méthodes de Lagrange et de Jacobi s'appliquent lorsque le nombre d'inconnues est supérieur ou égal à 4.

4. Méthode de Gauss

La méthode de Gauss nécessite des connaissances sur la notion de "dualité et orthogonalité", dispensées dans le cours d'algèbre linéaire 2 des spécialités mathématiques ou physique. Elle consiste à décomposer les formes quadratiques en sommes de carrés **linéairement indépendants**, c'est à dire qu'elle fournit une méthode de construction d'une base **orthogonale relativement à** q et par rapport à laquelle la forme quadratique est une somme de carrés.

Soit (1) une surface donnée dans un repère orthonormé. Soit

$$q = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_i y_j$$

la forme quadratique extraite de (1).

CAS 1 : Si l'un au moins des coefficients a_{ii} des carrés est non nul ; par exemple, supposons $a_{11} \neq 0$. On considère donc que la forme quadratique q est un polynôme de second degré en x_1. Posons

$l_1 = \dfrac{1}{2}\, q'_{x_1},\ q'_{x_i}$ désigne la dérivée partielle de q par rapport à x_i.

l_1 est une forme linéaire et on a :

$$q = a_{11}^{-1}[l_1]^2 + q_1$$

où q_1 est une nouvelle forme quadratique qui ne dépend pas de la variable x_1.

CAS 2 : supposons que tous les coefficients a_{ii} des carrés sont tous nuls et supposons par exemple que $a_{12} \neq 0$. Posons

$$l_1 = \frac{1}{2}\, q'_{x_2},\ l_2 = \frac{1}{2}\, q'_{x_1}$$

puis

$$\begin{cases} l'_1 = & l_1 + l_2 \\ l'_2 = & l_1 - l_2 \end{cases}$$

On obtient :

$$q = 2a_{12}^{-1} l_1 l_2 + q_1 = [l'_1]^2 - [l'_2]^2 + q_1$$

où $l_1,\ l_2,\ l'_1,\ l'_2$ sont des formes linéaires, et q_1 est une nouvelle forme quadratique qui ne dépend pas des variables x_1 et x_2. Procéder de la même façon sur la nouvelle forme quadratique q_1.

Remarque 3.2. La méthode de Gauss est une amélioration de l'algorithme de Lagrange. Elle est souvent appelée *méthode de Lagrange-Gauss.*

Exemple 3.5. *Réduire la forme quadratique*

$$q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

sous forme canonique par la méthode de Gauss. Trouver une base orthogonale relativement à q et écrire la matrice de q sur cette base.

Solution : Comme q comporte des termes carrés, alors

$$l_1 = \frac{1}{2}\, q'_{x_1} = x_1 - 2(x_2 + x_3).$$

Ainsi

$$q_1 = q - l_1^2 = -3x_2^2 - 3x_3^2 - 12x_2x_3.$$

Alors q_1 est une forme quadratique indépendante de x_1 et comporte des termes carrés. D'où

$$l_2 = \frac{1}{2}\, q'_{1_{x_2}} = -3x_2 - 6x_3$$

et

$$q_2 = q_1 + \frac{1}{3}[l_2]^2 = 9x_3^2.$$

Finalement,

$$q = [l_1]^2 - \frac{1}{3}[l_2]^2 + [l_3]^2$$

où les formes linéaires $l_1,\ l_2,\ l_3$ ont pour coordonnées respectives

$$(1, -2, -2),\ (0, -3, -6),\ (0, 0, 3)$$

dans la base duale de la base canonique. Elles sont linéairement indépendantes et forment une base de l'espace dual E^* de E. Soit (e'_1, e'_2, e'_3) la base biduale de (l_1, l_2, l_3). Alors (e'_1, e'_2, e'_3) est une base orthogonale relativement à q. Soient (x_1^1, x_2^1, x_3^1), respectivement (x_1^2, x_2^2, x_3^2), (x_1^3, x_2^3, x_3^3), les coordonnées de e'_1, respectivement e'_2, e'_3. Alors on a

$$l_i(e'_j) = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 3, \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_1^1 - 2x_2^1 - 2x_3^1 & = 1 \\ -3x_2^1 - 6x_3^1 & = 0 \\ 3x_3^1 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 & = 0 \\ -3x_2^2 - 6x_3^2 & = 1 \\ 3x_3^2 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_2^3 - 2x_3^3 & = 0 \\ -3x_2^3 - 6x_3^3 & = 0 \\ 3x_3^3 & = 1 \end{cases}$$

qui donne $e'_1 = (1,0,0)$, $e'_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$, $e'_3 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Les formules de transformation ou de changement de variables sont donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

et la matrice de q relativement à cette base (e'_1, e'_2, e'_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$q = X^2 - \frac{1}{3}Y^2 + Z^2.$$

Exemple 3.6. *Réduire la forme quadratique suivante sous forme canonique*

$$q = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_i x_j$$

par la méthode de Gauss. Trouver une base orthogonale relativement à q et écrire la matrice de q sur cette base.

Solution : Comme q ne renferme aucun terme carré et $a_{12} = \frac{1}{2}$, alors on pose

$$q = 4l_1 l_2 + q_1 = [l'_1]^2 [l'_2]^2 + q_1,$$

où

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & \frac{1}{2}\, q'_{x_2} = \frac{1}{2}(x_1+x_3+x_4) \\ l_2 & = & \frac{1}{2}\, q'_{x_1} = \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4) \\ l'_1 & = & l_1+l_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_3+x_4 \\ l'_2 & = & l_1-l_2 = \frac{1}{2}(x_1-x_2) \end{array}$$

donc

$$q_1 = q - [l'_1]^2 + [l'_2]^2 = -x_3^2 - x_4^2 - x_3x_4.$$

La forme quadratique q_1 ne dépend pas des variables x_1 et x_2 et renferme de termes carrés. D'où

$$l_3 = \frac{1}{2}\, q'_{1_{x_3}} = -x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

et on obtient

$$q_2 = q_1 - [l_3]^2 = -\frac{3}{4}x_4^2.$$

On pose donc

$$l_4 = x_4$$

et on a

$$q = [l'_1]^2 - [l'_2]^2 - [l_3]^2 - \frac{3}{4}[l_4]^2.$$

Les formes linéaires $l'_1,\ l'_2,\ l_3,\ l_4$ ont pour coordonnées respectives $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1)$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0)$, $(0,0,-1,-\frac{1}{2})$, $(0,0,0,1)$; elles sont linéairement indépendantes et forment une base du dual E^* de l'espace E. La base (e'_1,e'_2,e'_3,e'_4) biduale de (l'_1,l'_2,l_3,l_4) est une base orthogonale pour q. Soient $(x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1)$, respectivement $(x_1^2,x_2^2,x_3^2,\ x_4^2)$, $(x_1^3,x_2^3,x_3^3,x_4^3)$ et $(x_1^4,x_2^4,x_3^4,x_4^4)$, les coordonnées de e'_1, respectivement e'_2, e'_3 et e'_4. Alors on a

$$l_i(e'_j) = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 4 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 4$$

qui donne 4 systèmes de 4 équations à 4 inconnues. Les solutions sont $e'_1 = (1,1,0,0)$, $e'_2 = (1,-1,0,0)$, $e'_3 = (1,1,-1,0)$ et

$e'_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ et on a les formules de transformation ou de changement de variables

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$$

et la matrice de q relativement à cette base (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Transformation de la partie linéaire

Supposons que la partie quadratique de l'équation (1) de la quadrique soit déjà réduite. Alors les termes comportant les produits des variables ont été éliminés par l'une des techniques (3.2.1) ci-dessus ; la formule de changement de variables a permi d'obtenir l'équation (4) dans la nouvelle base. Reste donc à reécrire les coordonnées de la partie linéaire dans cette nouvelle base.

Pour cela, on détermine les nouveaux coefficients linéaires par la formule

$$l' = P^t l.$$

On peut aussi utiliser la formule $l' = lP$, si les coordonnées des vecteurs sont notées horizontalement.

3.3 Algorithme de réduction orthogonale des surfaces du second degré

Récapitulons maintenant les méthodes de classification orthogonale d'une courbe ou surface du second degré par l'algorithme dont les étapes sont les suivantes :

Etape 1 : Déterminer la matrice A de la forme quadratique associée et la réduire en somme des carrés, en utilisant l'une des méthodes exposées ci-dessus en (3.2.1).

Etape 2 : Construire la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Ecrire la matrice de passage P de l'ancienne base à la nouvelle base, et les formules de changement des variables correspondantes.

La forme quadratique a la forme :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Etape 3 : Déterminer les nouveaux coefficients linéaires par la formule

$$l' = P^t l \text{ ou } l' = lP.$$

Etape 4 : Ecrire la nouvelle équation obtenue. Elle a la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + 2a_3' z' + a = 0 \quad (12)$$

Etape 5 : Opérer une translation des axes en regroupant les termes sous forme de carrés parfaits pour trouver les coordonnées du nouvel origine.

Etape 6 : Ecrire les formules de transformation et déterminer la nature de la surface.

4 Exemples d'application

4.1 Exemples

Exemple 4.1. *Une surface est donnée dans un repère orthonormé de l'espace de dimension 3 par l'équation*

$$2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 2x + 4y + 6z - 1 = 0.$$

Déterminer l'équation réduite, la nature ou type de cette surface et les formules de transformation correspondantes.

Solution : La forme quadratique correspondante à cette quadrique est :

$$2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz.$$

La matrice A de cette forme quadratique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminons l'équation caractéristique et ses solutions.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((9-\lambda)(2-\lambda) - 4) + 2((-2)(2-\lambda)) \\ &\quad (2-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) \\ &= (\lambda - 1)(2-\lambda)(\lambda - 10) \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 10$ sont solutions de l'équation caractéristique.

Déterminons maintenant les solutions fondamentales du système d'équations $(A - \lambda I)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Pour $\lambda_1 = 1$ **:** la matrice $(A - \lambda_1 I)$ échelonnée donne

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I) &= (A-I) = \begin{pmatrix} 2-1 & -2 & 0 \\ -2 & 9-1 & 2 \\ 0 & 2 & 2-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées (x, y, z) est vecteur propre associé à la valeur propre λ_1, alors, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

qui donne $x = 2y$, $z = -2y$. Une solution fondamentale est $(2, 1, -2)$, qui, normé, devient $\overrightarrow{u_1} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$.
Pour $\lambda_2 = 2$ **:** échelonner la matrice $(A - \lambda_2 I)$ donne

$$\begin{aligned}(A-\lambda_2 I) &= (A-2I) = \begin{pmatrix} 2-2 & -2 & 0 \\ -2 & 9-2 & 2 \\ 0 & 2 & 2-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées (x, y, z) est vecteur propre associé à λ_2, alors, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

qui donne $x = z$, $y = 0$. Un vecteur solution est le vecteur $(1, 0, 1)$, qui normé devient $\overrightarrow{u_2} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Pour $\lambda_3 = 10$ **:** échelonner la matrice $(A - \lambda_3 I)$ donne

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_3 I) &= (A - 10I) = \begin{pmatrix} 2-10 & -2 & 0 \\ -2 & 9-10 & 2 \\ 0 & 2 & 2-10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{u_3}$ de coordonnées (x, y, z) est vecteur propre associé à λ_3, alors, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

qui donne $x = -z$, $y = 4z$; $(-1, 4, 1)$ est une solution fondamentale ; ce vecteur, normé devient $\overrightarrow{u_3} = (\frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$.

Nous obtenons ainsi une nouvelle base orthonormée $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

D'où de la formule (7) de changement de base on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{13}$$

et

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Déterminons la forme de la partie linéaire dans le repère $(O\mathcal{B}')$.

$$\begin{aligned} l' = lP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \\ -2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 12 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 2\sqrt{2} & \frac{5\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc la nouvelle équation dans le repère $(O\mathcal{B}')$:

$$x'^2 + 2y'^2 + 10z^2 - \frac{4}{3}x' + 4\sqrt{2}y' + \frac{10\sqrt{2}}{3}z' - 1 = 0.$$

Enfin effectuons la translation des axes en regroupant les termes sous formes de carrés parfaits :

$$\left(x'^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x' + \frac{4}{9}\right) + 2\left(y'^2 + 2 \cdot \sqrt{2}y' + 2\right) +$$
$$+10\left(z'^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}z' + \frac{1}{18}\right) - \frac{4}{9} - 4 - \frac{10}{18} - 1 = 0$$

i.e.

$$\left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(y' + \sqrt{2}\right)^2 + 10\left(z' + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - 6 = 0.$$

Posons

$$x" = x' - \frac{2}{3},\ y" = y' + \sqrt{2},\ z" = z' + \frac{\sqrt{2}}{6} \tag{14}$$

et nous obtenons l'équation canonique de la surface :

$$x"^2 + 2y"^2 + 10z"^2 = 6 \text{ ou encore } \frac{x"^2}{6} + \frac{y"^2}{3} + \frac{Z"^2}{3/5} = 1.$$

De l'équation (14), on a :

$$x' = x" + \frac{2}{3},\ y' = y" - \sqrt{2},\ z' = z" - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

Portant cette équation dans l'équation (13) i.e. $M = PM'$, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi dans le nouveau repère $(O'\mathcal{B}')$ où O' est de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2})$ et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ de coordonnées ci-dessus relativement au repère initial $(O\mathcal{B}) = (O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3})$, la surface a pour équation

$$\frac{x"^2}{6} + \frac{y"^2}{3} + \frac{Z"^2}{3/5} = 1$$

qui est une ellipsoide.

Exemple 4.2. *Une surface est donnée dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3})$ par l'équation*

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 12z + 15 = 0.$$

Déterminer l'équation canonique, les formules de transformation qui permettent de l'écrire sous forme canonique et la nature de cette surface.

Solution : L'équation de la surface peut être exprimée matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 15 = 0$$

On pose donc

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de la forme quadratique associée et

$l = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ la forme linéaire associée.

Déterminons l'équation caractéristique et ses solutions.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 3)^2.$$

Ainsi, les solutions de l'équation caractéristique sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 0$.

Pour $\lambda_3 = 0$**,** la matrice $(A - \lambda_3 I)$ échelonnée donne :

$$(A - \lambda_3 I) \;=\; (A - 0I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées (x, y, z) est solution, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

qui donne $x = -z$, $y = -z$. Une solution fondamentale est $(1, 1, -1)$; ce vecteur normé devient $\overrightarrow{u_1} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$**,** la matrice $(A - \lambda_2 I)$ échelonnée donne

$$(A - \lambda_2 I) = (A - 3I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Une solution est le vecteur $(1, 0, 1)$, qui, après être normé, est désigné par $\overrightarrow{u_2} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Enfin choisissons comme troisième vecteur $\overrightarrow{u_3}$, le produit vectoriel normé des deux premiers vecteurs non normés. Ainsi,

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

qui, après être normé, devient $\overrightarrow{u_3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$.

Nous obtenons ainsi une nouvelle base orthonormée $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

D'où la formule (7) de changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{15}$$

et

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons la partie linéaire dans le repère $(O\mathcal{B}')$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ = -\frac{3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc la nouvelle équation dans le repère $(O\mathcal{B}')$:

$$3x'^2 + 3y'^2 - 9\sqrt{2}x' - 3\sqrt{6}y' + 15 = 0$$

qui donne après simplification par 3 :

$$x'^2 + y'^2 - 3\sqrt{2}x' - \sqrt{6}y' + 5 = 0.$$

Enfin, effectuons la translation des axes :

$$\left(x'^2 - 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{9}{2}\right) + \left(y'^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}y' + \frac{6}{4}\right) - \frac{9}{2} - \frac{6}{4} + 5$$

$$= \left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Posons

$$x" = x' - \frac{3\sqrt{2}}{2},\ y" = y' - \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{16}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et nous obtenons l'équation canonique de la surface :

$$x"^2 + y"^2 = 1$$

qui est l'équation d'un cylindre elliptique.

Déterminons les formules de changemant de variables.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi dans le nouveau repère $(O'\mathcal{B}')$ où O' est de coordonnées $(1,1,2)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ de coordonnées ci-dessus relativement au repère initial $(O\mathcal{B}) = (O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3})$, la surface a pour équation

$$x"^2 + y"^2 = 1$$

qui est un cylindre elliptique.

Exemple 4.3. *Une surface est donnée dans un repère orthonormé $(O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3})$ par l'équation*

$$9y^2 + 16z^2 + 24yz + 5x + 10y + 5z + 11 = 0.$$

Déterminer l'équation canonique, les formules de transformation qui permettent de l'écrire sous forme canonique et le type de surface qu'elle décrit.

Solution : Exprimons matriciellement l'équation de la surface :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 11 = 0.$$

Déterminons l'équation caractéristique et ses solutions fondamentales.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 12 \\ 0 & 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 25).$$

Les valeurs $\lambda_1 = 25$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sont solutions de l'équation caractéristique.
Pour $\lambda_1 = 25$**,** la matrice $(A - \lambda_1 I)$ échelonnée donne

$$(A-\lambda_1 I) = (A-25I) = \begin{pmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 12 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

qui donne $x = 0,\ y = \frac{3}{4}z$. Une solution fondamentale est $(0, 3, 4)$. Ce vecteur normée devient $\overrightarrow{u_1} = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **:**

$$(A-\lambda_2 I) = (A-0I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En choisissant le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées (x, y, z) comme solution, on a $y = -\frac{4}{3}z$, un espace vectoriel de dimension 2. On peut fixer $x = 0, z = 3$ et puis $x = 1, y = 0$ et on obtient les vecteurs $\overrightarrow{u_2} = (0, -4, 3)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1, 0, 0)$, qui, normés, deviennent : $\overrightarrow{u_2} = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ et $\overrightarrow{u_3} = (1, 0, 0)$.
On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{17}$$

et

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le nouveau repère $(O\mathcal{B}')$, la surface a donc pour équation :

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+11=0$$

i.e. $25x'^2+10x'-5y'+5z'+11=0$. Effectuons la translation.

$$\begin{aligned} 25x'^2+10x'-5y'+5z'+11 & \\ &= 25\left(x'^2+\tfrac{10}{25}x'\right)-5y'+5z'+11 \\ &= 25\left(x'+\tfrac{1}{5}\right)^2-5y'+5z'+10 \\ &= 25\left(x'+\tfrac{1}{5}\right)^2-5(y'-2)+5z'. \end{aligned}$$

Posons

$$x"=x'+\frac{1}{5}, y"=y'-2, z"=z',$$

i.e.

$$x'=x"-\frac{1}{5}, y'=y"+2, z'=z",$$

matriciellement

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et l'équation de la surface dans le repère $(O'\mathcal{B}')$ est

$$5x"^2-y"+z"=0. \tag{18}$$

où O' est de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Cette forme ne correspondant à aucune des formes du théorème (3.2), il faut effectuer un autre changement de variable qui est une rotation du repère $(O'\mathcal{B}')$ autour de l'axe $(Ox")$ en posant :

$$x'''=x", y'''=\frac{-y"+z"}{\sqrt{2}}, z'''=\frac{y"+z"}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$x"=x''', y"=-\frac{\sqrt{2}}{2}y'''+\frac{\sqrt{2}}{2}z''', z"=\frac{\sqrt{2}}{2}y'''+\frac{\sqrt{2}}{2}z'''.$$

qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $x", y", z"$ dans l'équation (18), on obtient

$$5x'''^2 + \sqrt{2}y''' = 0 \quad \text{i.e.} \quad x'''^2 = -\frac{\sqrt{2}}{5}y'''$$

D'où, en posant

$$X = x''', Y = -y''', Z = z''',$$

on obtient l'équation canonique d'un cylindre parabolique

$$X^2 = \frac{\sqrt{2}}{5}Y.$$

Déterminons les coordonnées du nouveau repère dans lequel l'équation admet cette forme $X^2 = \frac{\sqrt{2}}{5}Y$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{43}{25} \\ \frac{26}{25} \end{pmatrix}$$

L'équation canonique obtenue ci-dessus est donc donnée dans le repère $(O_1\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3})$, où

$$\overrightarrow{v_1} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \overrightarrow{v_2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right),$$

$$\overrightarrow{v_3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right)$$

et l'origine

$$O_1 = \left(0, -\frac{43}{25}, \frac{26}{25}\right).$$

Exemple 4.4. *Réduire la quadrique suivante sous forme d'une somme des carrés*

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 5 = 0$$

et préciser les formules de transformation.

Solution :

1. Examinons la forme quadratique

$$q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Appliquons la méthode de Lagrange en posant

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 & = & y_1 + y_2 & \quad & x_3 & = & y_3 \\ x_2 & = & y_1 - y_2 & \quad & x_4 & = & y_4 \end{array}$$

qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique a donc la forme

$$q = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 - 4y_2y_4 + 2y_3y_4.$$

Extraire le carré des membres en y_2 donne

$$\begin{aligned}
q &= 2y_1^2 - 2(y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_2y_4) + 2y_3y_4 \\
&= 2y_1^2 - 2(y_2^2 + 2y_2(-y_3 + y_4)) + 2y_3y_4 \\
&= 2y_1^2 - 2\left(y_2^2 + 2y_2(-y_3 + y_4) + (-y_3 + y_4)^2\right. \\
&\quad \left.-(-y_3 + y_4)^2\right) + 2y_3y_4 \\
&= 2y_1^2 - 2\left(y_2^2 + 2y_2(-y_3 + y_4) + (-y_3 + y_4)^2\right) \\
&\quad +2(-y_3 + y_4)^2 + 2y_3y_4 \\
&= 2y_1^2 - 2(y_2 - y_3 + y_4)^2 + 2(y_3^2 - 2y_3y_4 + y_4^2) + 2y_3y_4 \\
&= 2y_1^2 - 2(y_2 - y_3 + y_4)^2 + 2y_3^2 - 2y_3y_4 + 2y_4^2.
\end{aligned}$$

Puis, extraire le carré des membres en y_3 donne

$$\begin{aligned}
q &= 2y_1^2 - 2(y_2 - y_3 + y_4)^2 + 2(y_3^2 - y_3y_4) + 2y_4^2 \\
&= 2y_1^2 - 2(y_2 - y_3 + y_4)^2 + 2\left(y_3^2 - 2y_3 \cdot \frac{y_4}{2} + \frac{y_4^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}\right) + 2y_4^2 \\
&= 2y_1^2 - 2(y_2 - y_3 + y_4)^2 + 2\left(y_3 - \frac{y_4}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}y_4^2.
\end{aligned}$$

Posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& y_1 \\ z_2 &=& y_3 - \frac{y_4}{2} \\ z_3 &=& y_4 \\ z_4 &=& y_2 - y_3 + y_4 \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& z_1 \\ y_2 &=& z_2 - \frac{z_3}{2} + z_4 \\ y_3 &=& z_2 + \frac{z_3}{2} \\ y_4 &=& z_3 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad \text{où } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique est

$$q = 2z_1^2 + 2z_2^2 + \frac{3}{2}z_3^2 - 2z_4^2.$$

Si on pose encore

$$u_1 = \sqrt{2}z_1, \quad u_2 = \sqrt{2}z_2, \quad u_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}z_3, \quad u_4 = \sqrt{2}z_4$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \text{ où } T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La forme quadratique est

$$q = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$$

et la matrice de passage est

$$\begin{aligned} T &= T_1T_2T_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Dans la nouvelle base dont la matrice de passage est T, la

quadrique a pour équation :

$$\begin{aligned}
& u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2+\\
+ & \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + 5\\
= & u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2+\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + 5\\
= & u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2-\sqrt{2}u_1-\sqrt{2}u_2-3\sqrt{6}u_3+\sqrt{2}u_4+5=0.
\end{aligned}$$

En regroupant le membre de gauche en carrés parfaits, on obtient:

$$\begin{aligned}
& \left(u_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(u_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(u_3-3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(u_4-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\\
+ & 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-9\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\
= & \left(u_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(u_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(u_3-3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\\
+ & \left(u_4-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-9=0
\end{aligned}$$

qui se met sous la forme :

$$\frac{\left(u_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{3^2}+\frac{\left(u_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{3^2}+\frac{\left(u_3-3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{3^2}-\frac{\left(u_4-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{3^2}=1.$$

Posons enfin

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{u_1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{3} & X_2 &= \frac{u_2-\frac{1}{\sqrt{2}}}{3}\\
X_3 &= \frac{u_3-3\sqrt{\frac{3}{2}}}{3} & X_4 &= \frac{u_4-\frac{1}{\sqrt{2}}}{3}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

et on a l'équation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = 1.$$

Les formules de transformations sont donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.5. *Réduire la quadrique suivante sous forme d'une somme des carrés*

$$4x_1x_2+4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4+4x_3x_4+3x_4^2+14x_4+11 = 0.$$

en précisant les formules de transformation.

Solution :

1. Examinons la forme quadratique associée

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4 + 3x_4^2.$$

Regroupons les termes en x_4 puis en x_3 en carrés parfaits.

$$\begin{aligned}
& 3x_4^2 + 4x_3x_4 + 4x_2x_4 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4^2 + \frac{4}{3}x_3x_4 + \frac{4}{3}x_2x_4 + \frac{4}{3}x_1x_4) + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4^2 + 2x_4(\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)) + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4^2 + 2x_4(\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1) + (\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2) \\
& -3(\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 \\
& -3(\frac{4}{9}x_3^2 + \frac{4}{9}x_2^2 + \frac{4}{9}x_1^2 + \frac{8}{9}x_3x_2 + \frac{8}{9}x_3x_1 + \frac{8}{9}x_2x_1) \\
& +4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_1^2 \\
& -\frac{8}{3}x_3x_2 - \frac{8}{3}x_3x_1 - \frac{8}{3}x_2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{4}{3}(x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3) \\
& -\frac{4}{3}x_2^2 - \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 \\
= \; & 3(x_4 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 \\
& -\frac{4}{3}\left(x_3^2 + 2x_3(-\frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2}) + (-\frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2})^2 - (-\frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2})^2\right) \\
& -\frac{4}{3}x_2^2 - \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3(x_4+\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_1)^2-\frac{4}{3}(x_3-\frac{x_2}{2}-\frac{x_1}{2})^2\\
&\quad +\frac{1}{3}x_2^2+\frac{1}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_2^2-\frac{4}{3}x_1^2+\frac{4}{3}x_1x_2\\
&= 3(x_4+\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_1)^2-\frac{4}{3}(x_3-\frac{x_2}{2}-\frac{x_1}{2})^2\\
&\quad -(x_1-x_2)^2.
\end{aligned}
$$

En posant

$$
\begin{cases}
y_1 = & x_1-x_2\\
y_2 = & \frac{2}{\sqrt{3}}(x_3-\frac{x_2}{2}-\frac{x_1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3\\
y_3 = & \sqrt{3}(x_4+\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_1) = \frac{2}{\sqrt{3}}x_1+\frac{2}{\sqrt{3}}x_2+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3+\sqrt{3}x_4\\
y_4 = & x_1
\end{cases}
$$

on obtient

$$q = -y_1^2-y_2^2+y_3^2.$$

Exprimons x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4.

$$
\begin{cases}
x_1 &= y_4\\
x_2 &= -y_1+y_4\\
x_3 &= -\frac{y_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+y_4\\
x_4 &= y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3-2y_4
\end{cases}
$$

qui s'écrit matriciellement

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1\\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{pmatrix}
$$

2. Trouvons l'équation de la quadrique en y_1, y_2, y_3, y_4 :

$$\begin{aligned}
& y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} - 11 \\
& = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 14y_1 + \frac{14}{\sqrt{3}}y_2 - \frac{14}{\sqrt{3}}y_3 + 28y_4 - 11 = 0;
\end{aligned}$$

en regroupant en carrés parfaits, on a :

$$\begin{aligned}
& (y_1 - 7)^2 + (y_2 + \frac{7}{\sqrt{3}})^2 - (y_3 + \frac{7}{\sqrt{3}})^2 + 28y_4 \\
- \ & 7^2 - (\frac{7}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{7}{\sqrt{3}})^2 - 11 \\
= \ & (y_1 - 7)^2 + (y_2 + \frac{7}{\sqrt{3}})^2 - (y_3 + \frac{7}{\sqrt{3}})^2 - 2(-14y_4 + 30) = 0.
\end{aligned}$$

On pose donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & y_1 - 7 \\ z_2 & = & y_2 + \frac{7}{\sqrt{3}} \\ z_3 & = & y_3 + \frac{7}{\sqrt{3}} \\ z_4 & = & -14y_4 + 30 \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & z_1 + 7 \\ y_2 & = & z_2 - \frac{7}{\sqrt{3}} \\ y_3 & = & z_3 - \frac{7}{\sqrt{3}} \\ y_4 & = & -\frac{1}{14}z_4 + \frac{30}{14} \end{array} \right.$$

qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{7}{\sqrt{3}} \\ -\frac{7}{\sqrt{3}} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix}$$

et on obtient l'équation

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 2z_4$$

avec les formules de transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{14} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{34}{7} \\ -\frac{34}{7} \\ \frac{19}{7} \end{pmatrix}.$$

4.2 Exercices dirigés

Exercice 4.1. *Réduire la quadrique suivante sous forme d'une somme des carrés et préciser les formules de transformation*

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 5 = 0$$

Solution : Vérifier que la forme quadratique a pour équation caractéristique

$$(\lambda - 1)^3(\lambda + 3) = 0,$$

qu'une matrice de passage est

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et que la quadrique a pour équation

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2 - \sqrt{2}y_1 - \sqrt{6}y_2 - 4\sqrt{3}y_3 + 5 = 0.$$

Vérifier qu'après regroupement en carrés parfaits, l'équation canonique de la quadrique est

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 3X_4^2 = 9$$

par rapport aux formules de transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + T_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2. *Réduire la quadrique suivante sous forme d'une somme des carrés et préciser les formules de transformation*

$$4x_1x_2+4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4+4x_3x_4+3x_4^2+14x_4+11 = 0$$

Solution : Vérifier que les solutions de l'équation quadratique sont $2, -7, 0$ et que une matrice de passage est

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

et que la quadrique a pour équation

$$2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2 - 2\sqrt{21}y_3 + 4\sqrt{7}y_4 - 11 = 0.$$

Vérifier qu'après regroupement en carrés parfaits, l'équation canonique est

$$2X_1^2 + 2X_2^2 - 7X_3^2 = 4\sqrt{7}X_4$$

par rapport aux formules de transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3. *Réduire la quadrique suivante sous forme d'une somme des carrés et préciser les formules de transformation*

$$2x_1^2 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 14 = 0$$

Solution : La forme quadratique est déjà sous forme canonique. Démontrer que l'équation canonique de la quadrique est

$$\frac{X_1^2}{3/2} = 2x_2$$

relativement au repère $(0'\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_4})$ où

$$O' = (-1, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}), \quad \overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0), \quad \overrightarrow{e_2} = (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}),$$

$$\overrightarrow{e_3} = (0, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}), \quad \overrightarrow{e_4} = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}).$$

Exercice 4.4. *Soit la surface de second degré donnée dans un repère orthonormé*

$$2x^2 + 3y + 4z + 5 = 0.$$

Déterminer la rotation qui permet d'affirmer que cette surface est un cylindre parabolique d'équation

$$X^2 = 2pY.$$

Solution : Vérifier que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

5 Exercices

1. Déterminer l'équation canonique de chacune des courbes suivantes données dans un repère orthonormé du plan ; donner les formules de transformations, la nature et une représentation de chacune de ces courbes.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0;$
2. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0;$
3. $16y^2 - 9x^2 + 32y + 54x - 209 = 0;$
4. $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0;$
5. $x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y - 11 = 0;$
6. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x - 3y + 15 = 0.$

2. Déterminer l'équation canonique de chacune des surfaces suivantes données dans un repère orthonormé; donner les formules de transformations, la nature de chacune de ces surfaces.

1. $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0;$
2. $x^2 + y^2 + z^2 - xz + yz + 3x + 3y - 3z = 0;$
3. $x^2 - 3z^2 - 4yz - 4y + 2z + 5 = 0;$
4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 4y + 3 = 0;$
5. $y^2 + 2xz + 2x + 2z + 1 = 0;$
6. $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0;$
7. $-x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 2x + 12y + 24z + 36 = 0;$
8. $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0;$

9. $4x^2 + 4y^2 - 4xy - 12x - 12y - 5z + 1 = 0$;
10. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0$;
11. $4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$;
12. $-8y^2 - z^2 + 6xy + 60x + 2z + 89 = 0$;
13. $5x^2 + 8y^2 + 4xy + 2x + 44y - 36z + 65 = 0$;
14. $-x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2x + 3y - 5z + 1 = 0$;
15. $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 24xy - 9x - 12y + 4z + 71 = 0$;
16. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 8y + 29 = 0$;
17. $-x^2 + 7y^2 - 24yz + 2x + 120y = 0$;
18. $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0$;
19. $3x^2 + 4xy + 8x + 8y - 4z = 0$;
20. $-x^2 - 9y^2 + 6xy + 50x - 50y - 15z - 100 = 0$.

3. Réduire les formes quadratiques suivantes en sommes de carrés linéairement indépendants par la méthode de Gauss. Trouver une base orthogonale pour chacune d'elles et écrire la matrice sur cette base.

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$;
2. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1cos\lambda + x_2sin\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_1x_2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer l'équation canonique de chacune des formes quadratiques. Préciser les formules de transformation de chacune d'elles.

1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$;
2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_3x_4$;
3. $4x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+4x_3x_4$;
4. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;
5. $x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$.

Bibliographie recommandée

1. A. Calvo *Exercices d'algèbre 1er cycle, 2e année et Spéciales MM'*, Collection Armand Colin (1997).
2. V. Chipatchev *Mathématiques supérieures*, Editions Mir, (1988);
3. J. Dixmier *Cours de mathématiques du 1er cycle 2ème année, exercices, indications de solutions, réponses*, Gauthier-Villars, (1984);
4. D. Fadeev, V. Fadeeva *computational methods of linear algebra*, San francisco, W. H. Freeman, (1963);
5. M. D. Greenberg *Advanced engeneering mathematics*, Prentice-Hall International Editions, (1988);
6. D. Guiring, B. Joppin *Mathématiques : algèbre et géométrie (cours méthodes, exercices résolus)*, Les nouveaux précis Bréal, Bréal (2000);
7. J. M. Monier *Algèbre 2, cours et 500 exercices corrigés*, Dunod (2000);
8. E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux *Cours de mathématiques spéciales Tome 2 : algèbre et applications à la géométrie*, Masson (2000);
9. M. Serfati *Exercices de mathématiques Tome 4 : géométrie-cinématique*, Collection Dia-Belin (1986).

Annexes : schémas de quelques courbes et surfaces du second degré

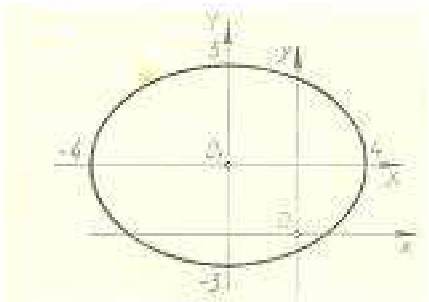

Figure 1: Ellipse

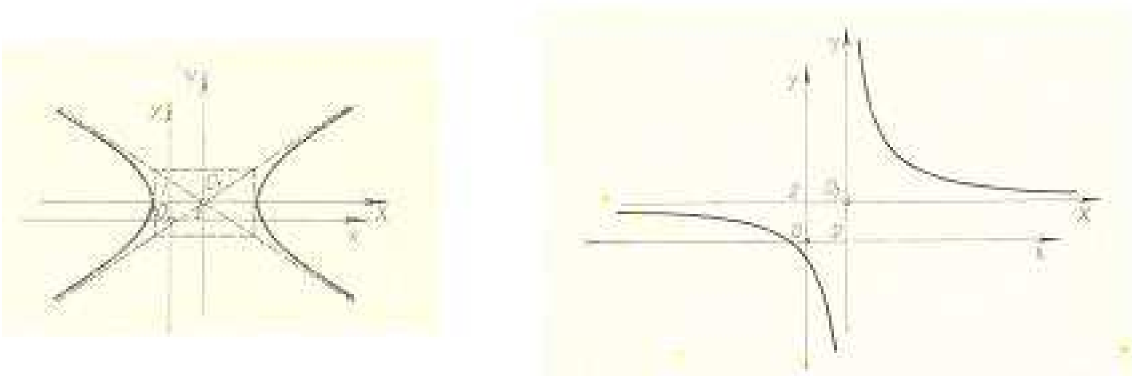

Figure 2: Hyperboles

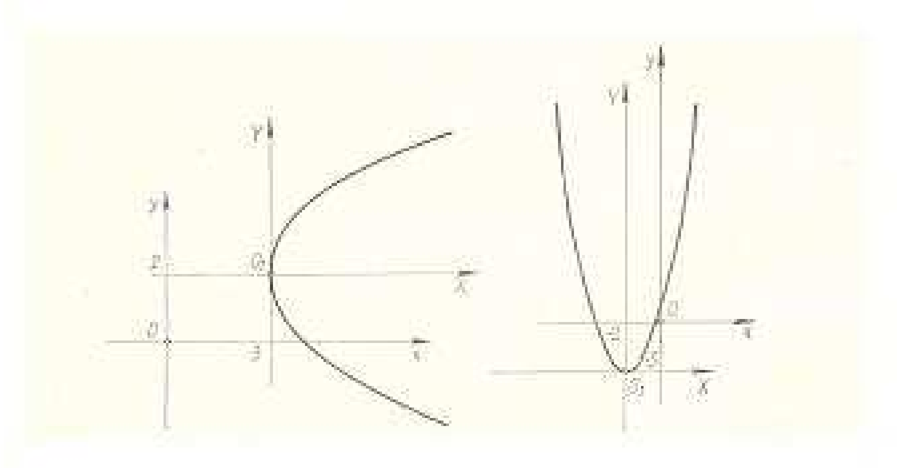

Figure 3: Paraboles

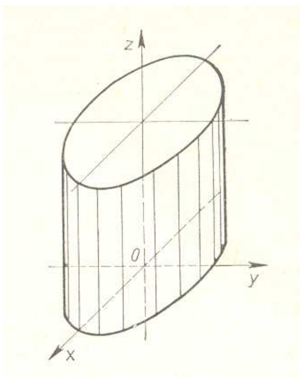

Figure 4: Cylindre elliptique

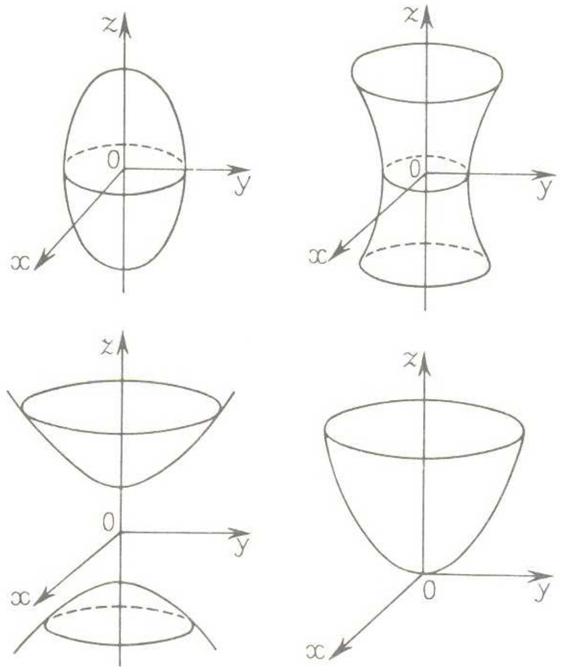

Figure 5: Ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique

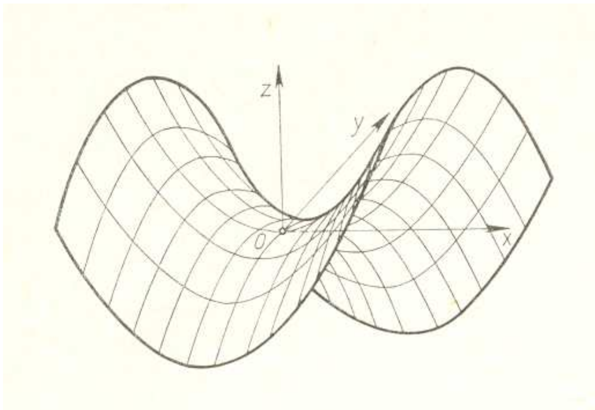

Figure 6: Paraboloïde hyperbolique

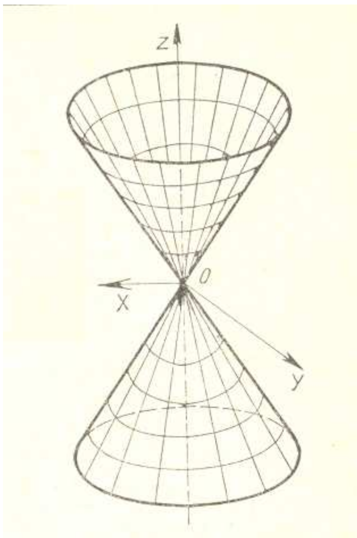

Figure 7: Cône

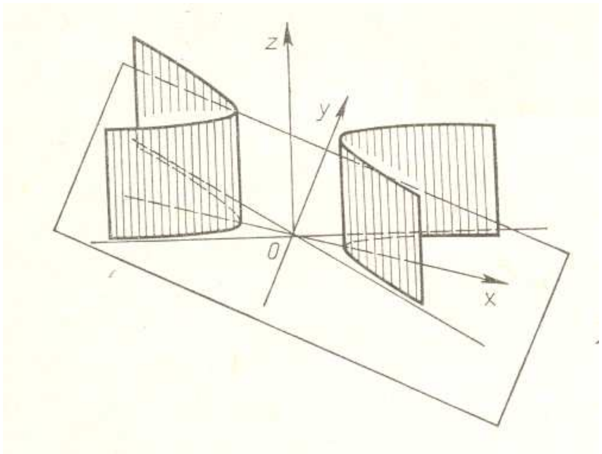

Figure 8: Cylindre hyperbolique

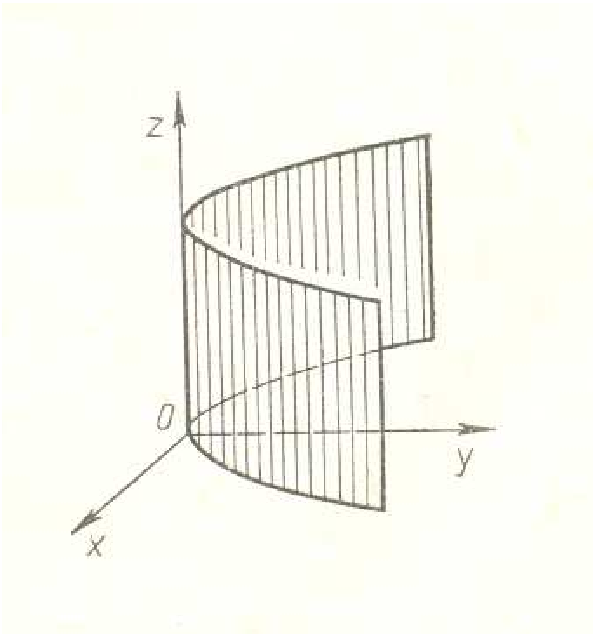

Figure 9: Cylindre parabolique