УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс конечных групп. И путь G — свободное произведение групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. Доказано, что если группы A и B почти аппроксимируемы группами из класса $\mathcal{K}$, то и группа G почти аппроксимируема группами из класса $\mathcal{K}$. Аналогичный результат получен и для HNN-расширений.

Ключевые слова: корневой класс групп, обобщенное свободное произведение групп, HNN-расширение, аппроксимируемость конечными p-группами.

Let $\mathcal{K}$ be a root-class of finite groups. Let G be a free product of groups A and B with amalgamated finite subgroups H and K. It is proved that if A and B are virtually residually $\mathcal{K}$-groups, then G is virtually residually a $\mathcal{K}$-group. The similar result for HNN-extensions is proved.

Key words: root-class of groups, generalized free product of groups, HNN-extension, residually finite p-group.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу. Класс $\mathcal{K}$ называется корневым, если выполнены следующие три условия:

1) если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B — подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$;

2) прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$;

3) если $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ — субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Напомним, что группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий элемент g в элемент, отличный от 1.

Если класс $\mathcal{K}$ совпадает с классом с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматривается также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость и $\mathcal{F}_S$-аппроксимируемость, где p — простое число, π — множество простых чисел, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп, $\mathcal{F}_S$ — класс всех конечных разрешимых групп. Заметим, что все перечисленные классы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_\pi$, $\mathcal{F}_S$ являются корневыми.

В 2002 году Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо доказали, что свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само $\mathcal{K}$-аппроксимируемо [4]. Ранее этот результат был доказан Грюнбергом [10] при дополнительном условии, что все свободные группы аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$. Однако Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо заметили, что это условие выполняется для любого корневого класса.

Рассмотрим теперь обобщенное свободное произведение, т. е. свободное произведение

$$G = (A * B; H = K)$$

групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Большинство результатов об аппроксимируемости группы G корневым классом $\mathcal{K}$ получены при дополнительных ограничениях на объединяемые подгруппы H и K. Так, например, для произвольного корневого класса $\mathcal{K}$ Д. Н. Азаровым [3] установлены следующие два результата: свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой; свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с центральными объединенными подгруппами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Первый из этих результатов ранее был получен Дж. Болером и Б. Эвансом [9] для случая финитной аппроксимируемости.

Другим естественным ограничением на объединенные подгруппы H и K является их конечность. Еще в 1963 году Г. Баумслаг [8] доказал, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат Г. Баумслага не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на аппроксимируемость произвольным корневым классом, т. е. свободное произведение двух групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, с конечными объединенными подгруппами не обязано быть $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Тем не менее если $\mathcal{K}$ — класс конечных групп, являющийся корневым, то свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой, т. е. содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса. В действительности имеет место даже более общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $G = (A * B; H = K)$ — свободное произведение групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. И пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Если группы A и B почти аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, то и группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.*

Так как условие почти $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с условием

$\mathcal{F}$-аппроксимируемости, то непосредственным следствием теоремы 1 является упомянутый выше результат Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости произвольного свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами. Другое следствие из этой теоремы — результат, полученный авторами настоящей статьи [2]: свободное произведение двух почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Непосредственным следствием теоремы 1 будет следующее утверждение: свободное произведение двух почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп является почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой для любого класса $\mathcal{K}$ конечных групп, являющегося корневым. На самом деле это утверждение верно для произвольного корневого класса $\mathcal{K}$ (не обязательно состоящего из конечных групп).

Наряду с теоремой 1 в настоящей работе доказывается аналогичное утверждение и для HNN-расширений, которое формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть G^* — HNN-расширение группы G с конечными связанными подгруппами H и K. И пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Если группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$, то и группа G^* почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.*

Непосредственным следствием этой теоремы является следующий результат Б. Баумслага и М. Треткоффа [7]: произвольное HNN-расширение финитно аппроксимируемой группы с конечными связными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.

Свойство почти аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{K}$ в значительной степени исследовано в случае, когда класс $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп. Хорошо известно, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Этот, ставший уже классическим, результат был доказан А. Л. Шмелькиным в работе [6]. Поэтому из сформулированных выше теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение: свободное произведение двух полициклических групп с конечными объединенными подгруппами и HNN-расширение полициклической группы с конечными связанными подгруппами являются почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми группами для каждого простого числа p. Другие результаты о почти аппроксимируемости конечными p-группами обобщенных свободных произведений можно найти в работе [1].

Перейдем теперь к доказательствам теорем 1 и 2.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть группы A и B почти аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$ и подгруппы H и K конечны. Покажем, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Так как группа A почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$, то в ней существует подгруппа U конечного индекса, аппроксимируемая классом $\mathcal{K}$. Без потери общности можно считать, что подгруппа U нормальна в A. Очевидно, что группа A финитно аппроксимируема, т. к. класс $\mathcal{K}$ состоит из конечных групп. Отсюда и из того, что H — конечная подгруппа группы A, следует, что в группе A существует нормальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \cap H = 1$. Пусть $M = U \cap V$. Тогда M — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $M \cap H = 1$ и группа M аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Аналогично проверяется, что в группе B существует нормальная подгруппа N конечного индекса, являющаяся аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ и такая, что $N \cap K = 1$.

Так как $M \cap H = 1$ и $N \cap K = 1$, то отображение φ_{MN} подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы A/M на подгруппу $KN/N = \{kN : k \in K\}$ группы B/N, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi N$ из KN/N, является изоморфизмом. Поэтому можно рассматривать свободное произведение

$$G_{MN} = A/M * B/N(HM/M, KN/N, \varphi_{MN})$$

групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}. Так как группы A/M и B/N конечны, то группа G_{MN} является финитно аппроксимируемой [8].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $\varepsilon_M : A \to A/M$ и $\varepsilon_N : B \to B/N$. Тогда $a\rho_{MN} = a\varepsilon_M = aM$ и $b\rho_{MN} = b\varepsilon_N = bN$ для произвольных элементов a и b из подгрупп A и B соответственно.

Поскольку группа G_{MN} финитно аппроксимируема и подгруппы A/M и B/N конечны, то существует гомоморфизм σ группы G_{MN} на конечную группу $\overline{G}$, инъективный на A/M и B/N. Тогда произведение $\rho_{MN}\sigma$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{MN}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Так как $A \cap \mathrm{Ker}\ \rho_{MN} = M$ и гомоморфизм σ инъективен на подгруппе $A\rho_{MN} = A/M$, то $A \cap \mathrm{Ker}\ \rho_{MN}\sigma = M$, т. е. $L \cap A = M$. Аналогично получается, что $L \cap B = N$.

Тогда $L \cap H = L \cap A \cap H = M \cap H = 1$, т. е. $L \cap H = 1$. Отсюда и из того, что L — нормальная подгруппа группы G, следует, что L пересекается по единице со всеми сопряжениями к H в группе G. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман (см., напр., [5, с. 122]) подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Ax = x^{-1}(L \cap A)x = x^{-1}Mx,$$

$$L \cap y^{-1}By = y^{-1}(L \cap B)y = y^{-1}Ny,$$

где $x, y \in G$.

Свободная группа F аппроксимируема корневым классом $\mathcal{K}$ [4], а группы $x^{-1}Mx$ и $y^{-1}Ny$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, т. к. $x^{-1}Mx \cong M$ и $x^{-1}Nx \cong N$ для любых $x, y \in G$. Таким образом, группа L раскладывается в свободное произведение групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$. Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо [4] доказали, что свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Поэтому группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе G, следует, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа, H и K — подгруппы группы G, φ —изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G^* = \langle G, t; t^{-1}ht = h\varphi (h \in H)\rangle$$

— HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K. Будем предполагать, что подгруппы H и K конечны. И пусть группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Покажем, что группа G^* почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Как и в доказательстве теоремы 1, легко проверяется, что в группе G существует нормальная подгруппа M конечного индекса, являющаяся $\mathcal{K}$-аппроксимируемой и такая, что $M \cap H = 1 = M \cap K$. Так как $H \cap M = 1 = K \cap M$, то отображение φ_{M} подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы G/M на подгруппу $KM/M = \{kM : k \in K\}$ группы G/M, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi M$ из KM/M, является изоморфизмом.

Поэтому можно рассматривать HNN-расширение

$$G^*_{M} = \langle G_{M},\ t;\ t^{-1}\overline{h}t = \overline{h}\varphi_{M}\ (\overline{h} \in HM/M)\ \rangle$$

группы $G_{M} = G/M$ со связанными подгруппами HM/M и KM/M. Так как группа G_{M} конечная, то группа G^*_{M} финитно аппроксимируема [7].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_{M} : G^* \longrightarrow G^*_{M}$, продолжающий естественный гомоморфизм $\varepsilon_{M} : G \longrightarrow G_{M}$ и такой, что $t\rho_{M} = t$. Тогда для каждого элемента a из G выполняется $a\rho_{M} = aM$.

Так как группа G^*_{M} финитно аппроксимируема и ее подгруппа G_{M} конечна, то существует гомоморфизм σ группы G^*_{M} на конечную группу $\overline{G}$, иньективный на подгруппе G_{M}. Тогда произведение $\rho_{M}\sigma$ является гомоморфизмом группы G^* на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{M}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G^*.

Поскольку $G \cap \mathrm{Ker}\ \rho_{M} = M$ и гомоморфизм σ инъективен на подгруппе $G_{M} = G\rho_{M}$, то $G \cap \mathrm{Ker}\ \rho_{M}\sigma = M$, т. е. $L \cap G = M$. Тогда $L \cap H = L \cap G \cap H = M \cap H = 1$. Таким образом, подгруппа L, а значит, и все сопряженные с ней подгруппы группы G^* тривиально пересекаются со связанной подгруппой H. Поэтому в силу теоремы А. Карраса и Д. Солитера [5, с. 288] подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Gx = x^{-1}(L \cap G)x = x^{-1}Mx,$$

где $x \in G^*$. Поскольку группа F и подгруппы $L \cap x^{-1}Gx$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, то и группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе G^*, следует, что группа G^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 9, вып. 3 (35). С. 11—21.
2. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* Почти аппроксимируемость конечными p-группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 94—97.
3. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Сер.: Математика. Вып. 6 (2008). С. 29—42.
4. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Там же. Вып. 5 (2002). С. 6—10.
5. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
6. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
7. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6 (2). P. 179—194.
8. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
9. *Boler J., Evans B.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 37 (1). P. 50—52.
10. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.