Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 2
Иваново, 1999

УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова

К ВОПРОСУ О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ОБЪЕДИНЕНИЕМ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Получено необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп.

1. Пусть G – свободное произведение групп $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной подгруппой H. Простейшие примеры показывают, что группа G не обязана аппроксимироваться нильпотентными группами, даже если свободные сомножители G_λ обладают этим свойством. Г.Баумслаг [2] доказал нильпотентную аппроксимируемость свободного произведения свободной группы F и бесконечной циклической группы с объединением X, при условии, что X – изолированная подгруппа группы F. В [1] доказан критерий нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения свободных групп с циклическим объединением. Здесь мы докажем следующее утверждение:

Теорема. *Пусть все G_λ – локально нильпотентные группы, причем $G_\lambda \neq H \neq G_\mu$ хотя бы для двух различных $\lambda, \mu \in \Lambda$. И пусть G аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда существует простое число p такое, что подгруппа H p'-изолирована в группе G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$.*

Напомним, что подгруппа T группы B называется p'-изолированной, если для любого $b \in B$ и для любого простого числа $q \neq p$ из условия $b^q \in T$ следует, что $b \in T$. Заметим, что в силу вышеуказанного результата Г.Баумслага сформулированная нами теорема не может быть распространена на случай, когда свободные сомножители G_λ являются произвольными группами.

2. Доказательство теоремы.

Пусть G аппроксимируется нильпотентными группами.

Очевидно, что любая конечно порожденная подгруппа группы G аппроксимируется конечными группами примарных порядков.

Покажем, что существует простое число p такое, что H p'-изолирована во всех G_λ. Опуская тривиальный случай, когда H изолирована во всех G_λ, будем считать, что H не изолирована в G_μ для некоторого $\mu \in \Lambda$. Очевидно, что существуют элемент $a \in G_\mu \backslash H$ и простое число p такие, что $a^p \in H$.

Покажем, что H – p'-изолированная подгруппа группы G_μ. Допустим противное. Тогда найдутся простое число $q \neq p$ и элемент $b \in G_\mu \backslash H$ такие, что $b^q \in H$.

Зафиксируем элемент $c \in G_\nu \backslash H$, где $\nu \in \Lambda$ и $\nu \neq \mu$. Рассмотрим две последовательности простых коммутаторов:

$$\begin{array}{llll} u_1 = c, & u_2 = a^{-1}u_1^{-1}au_1, & u_3 = a^{-1}u_2^{-1}au_2, & \dots, \\ v_1 = c, & v_2 = b^{-1}v_1^{-1}bv_1, & v_3 = b^{-1}v_2^{-1}bv_2, & \dots \end{array}$$

Легко проверить, что при $n > 1$ u_n и v_n имеют несократимые записи длины 2^n вида:

$$u_n = a^{-1}c^{-1} \dots ac, \quad v_n = b^{-1}c^{-1} \dots bc.$$

Поскольку $ba^{-1} \in G_\mu \backslash H$, то элемент

$$\begin{aligned} w_n &= u_n^{-1}v_n^{-1}u_nv_n = \\ &= c^{-1}a^{-1} \dots cac^{-1}b^{-1} \dots c(ba^{-1})c^{-1} \dots acb^{-1}c^{-1} \dots bc \end{aligned}$$

отличен от 1.

Группа (a^p, b^q, c) нильпотентна, поскольку является конечно порожденной подгруппой группы G_ν. Будем далее считать, что n – фиксированное число, большее ступени нильпотентности группы (a^p, b^q, c).

Пусть σ – гомоморфизм группы (a, b, c) на конечную группу P примарного порядка. Тогда одно из чисел p или q не делит порядок группы P.

Отсюда и из того, что $a^p, b^q \in (a^p, b^q, c)$, следует, что один из элементов $a\sigma$ или $b\sigma$ принадлежит подгруппе $(a^p, b^q, c)\sigma$. Поэтому один из элементов $u_n\sigma$ или $v_n\sigma$ можно рассматривать как простой коммутатор веса n элементов группы $(a^p, b^q, c)\sigma$. Отсюда и из того, что ступень нильпотентности группы $(a^p, b^q, c)\sigma$ меньше, чем n, следует, что $u_n\sigma = 1$ или $v_n\sigma = 1$. В любом случае $w_n\sigma = 1$. Отсюда и из того, что группа (a, b, c) аппроксимируется конечными группами примарных порядков, следует $w_n = 1$, что невозможно.

Таким образом, подгруппа H p'-изолирована в G_μ.

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda \neq \mu$. Покажем, что H – p'-изолированная подгруппа группы G_λ. Допустим противное. Тогда найдутся простое число $r \neq p$ и элемент $d \in G_\lambda \backslash H$ такие, что $d^r \in H$.

Рассмотрим последовательность простых коммутаторов

$$t_1 = d, \quad t_2 = a^{-1}t_1^{-1}at_1, \quad t_3 = a^{-1}t_2^{-1}at_2, \ \ldots .$$

Очевидно, что $t_k \neq 1$ для всех $k \geqslant 1$.

Поскольку $(a^p, d) \leqslant G_\lambda$ и $(a, d^r) \leqslant G_\mu$, то группы (a^p, d) и (a, d^r) нильпотентны. Будем далее предполагать, что k – фиксированное число, большее ступеней нильпотентности каждой из этих групп.

Пусть σ – гомоморфизм группы (a, d) на конечную группу P примарного порядка. Тогда одно из чисел p или r не делит порядок группы P. Отсюда и из того, что $a^p \in (a^p, d)$ и $d^r \in (a, d^r)$, заключаем, что $a\sigma \in (a^p, d)\sigma$ или $d\sigma \in (a, d^r)\sigma$. Поэтому элемент $t_k\sigma$ можно рассматривать как простой коммутатор веса k элементов одной из групп $(a^p, d)\sigma$ или $(a, d^r)\sigma$. Поскольку ступени нильпотентности этих групп меньше, чем k, то $t_k\sigma = 1$. Отсюда и из того, что группа (a, d) аппроксимируется конечными группами примарных порядков, следует, что $t_k = 1$, что невозможно.

Таким образом, подгруппа H p'-изолирована во всех G_λ.

Список использованной литературы

1. *Азаров Д.Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 3 – 8.
2. *Baumslag G.* On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure and Appl. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193 – 209.