Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 5 (2002)

УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Построен пример группы, финитно аппроксимируемой, но не финитно аппроксимируемой относительно сопряженности и являющейся свободным произведением с объединенной подгруппой двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп.

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой (финитно аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых двух различных (не сопряженных) ее элементов a и b существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу X такой, что элементы $a\varphi$ и $b\varphi$ различны (соответственно, не сопряжены в группе $X\varphi$). Очевидно, что каждая группа, финитно аппроксимируемая относительно сопряженности, является финитно аппроксимируемой. Обратное, вообще говоря, неверно: соответствующий пример фактически указан в [2]. Тем не менее, если рассматривать группы, разложимые в свободное произведение двух групп с объединенной подгруппой, то в ряде случаев условия, гарантирующие финитную аппроксимируемость (напр., конечность или конечная порожденность и абелевость сомножителей), обеспечивают и финитную аппроксимируемость относительно сопряженности. С другой стороны, в литературе (доступной авторам) отсутствуют конкретные примеры свободного произведения с объединенной подгруппой, для которых это не так. Построение соответствующего примера и является целью данной заметки.

Более точно, будут построены такие группы A и B с подгруппами $U \leqslant A$ и $V \leqslant B$ и изоморфизмом $\varphi : U \to V$, что имеют место следующие утверждения:

1. Группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности.

© Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова, 2002

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

2. Свободное произведение $G = (A * B;\ U = V, \varphi)$ групп A и B с подгруппами U и V, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, является финитно аппроксимируемой группой.

3. Группа G не является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Пусть для каждого целого $k \geqslant 1$ $F_k = \langle a_k, x_k;\ x_k^{-1} a_k x_k = a_k^{-1}, a_k^4 = 1, x_k^2 = 1\rangle$ — группа диэдра порядка 8, U_k — циклическая группа порядка 4 с порождающим u_k и $A_k = F_k \times U_k$ — прямое произведение групп F_k и U_k . Обозначим еще через H_k циклическую подгруппу группы A_k, порожденную элементом $h_k = a_k u_k$. Определим теперь группу A как свободное произведение $A = (\Pi^* A_k;\ h_1 = h_2 = \cdots)$ групп A_k с объединенными относительно очевидных изоморфизмов подгруппами H_k, а через U обозначим ее подгруппу, порожденную подгруппами $U_1, U_2, \ldots$. Так как для каждого k $H_k \cap U_k = 1$, то в силу теоремы Х. Нейман (см., напр. [5]) группа U является (обычным) свободным произведением подгрупп U_1, U_2, ...

Построим теперь группу B и ее подгруппу V. Для каждого целого числа $k \geqslant 1$ обозначим через B_k циклическую группу порядка 2^{k+1} с порождающим b_k, а через V_k — ее подгруппу, порожденную элементом $v_k = b_k^{2^{k-1}}$. Пусть $B = \Pi^* B_k$ — свободное произведение всех групп B_k, а V — ее подгруппа, порождаемая элементами v_1, v_2, ... Так как $V = \Pi^* V_k$, отображение, переводящее u_k в v_k, определяет изоморфизм φ подгруппы $U \leqslant A$ на подгруппу $V \leqslant B$.

Покажем, что для построенных групп A и B, их подгрупп U и V и изоморфизма $\varphi : U \to V$ выполнены сформулированные выше утверждения.

Утверждение 1 справедливо, так как финитная аппроксимируемость относительно сопряженности группы A следует непосредственно из теоремы 1.1 работы [1], а группы B — из теоремы Ремесленникова [3], утверждающей, что свободное произведение групп наследует это свойство от сомножителей.

Для доказательства утверждения 2 введем в рассмотрение для каждого $k \geqslant 1$ группу $G_k = (A_k * B_k;\ u_k = v_k)$ — свободное произведение групп A_k и B_k с объединенными подгруппами U_k и V_k. Легко видеть, что группа $G = (A * B;\ U = V, \varphi)$ раскладывается также в свободное произведение $G = (\Pi^* G_k;\ h_1 = h_2 = \cdots)$ групп G_k с объединенными подгруппами H_k. Обозначим через N_k нормальное замыкание в группе G_k подгруппы B_k. Тогда фактор-группа G_k/N_k изоморфна группе F_k и $H_k \cap N_k = 1$. Так как, к тому же, каждая группа G_k, являясь свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, финитно аппроксимируема [4], то выполнены все условия теоремы 1.2 из [1], из которой и следует финитная аппроксимируемость группы G.

Покажем теперь, что группа G не является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Так как для любого $k \geqslant 1$ в группе G имеет место равенство $x_k^{-1}h_1x_kh_1 = x_k^{-1}h_kx_kh_k = u_k^2 = b_k^{2^k}$, элемент $x_k^{-1}h_1x_kh_1$ входит в подгруппу B_k, причем его порядок равен двум. Поэтому произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит элемент $x_k^{-1}h_1x_kh_1$ при достаточно большом k, а это означает, что образы элементов h_1 и h_1^{-1} группы G сопряжены в каждом ее конечном гомоморфном образе. Остается понять, что в группе G эти элементы не являются сопряженными.

Пусть C — фактор-группа группы B по нормальному замыканию всех элементов $b_kb_{k+1}^{-2}$; очевидно, что C является локально циклической и потому абелевой группой. Непосредственно проверяется, что отображение порождающих a_k, x_k, u_k и b_k группы G в группу C, тождественное на b_k и переводящее элементы a_k и x_k в единицу, а u_k в $b_k^{2^{k-1}}$, определяет гомоморфизм группы G в группу C, инъективный на подгруппе H_1. Очевидно, что образы элементов h_1 и h_1^{-1} относительно этого гомоморфизма не сопряжены в группе C.

Список использованной литературы

1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 3 – 13.
2. *Горяга А. В.* Пример конечного расширения ФАС-группы, не являющегося ФАС-группой // Там же. 1986. Т. 27. С. 203 – 205.
3. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Там же. 1971. Т. 12. С. 1085 – 1099.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193 – 209.
5. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503 – 554.