Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2008 С. 56 – 62

Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Получены критерии аппроксимируемости конечными π-группами (π — непустое множество простых чисел) и конечными нильпотентными группами для свободного произведения с одной циклической объединенной подгруппой любого семейства конечно порожденных нильпотентных групп без кручения с ограниченными полициклическими рангами.

Free products with one amalgamated cyclic subgroup of a family of finitely generated nilpotent torsion free groups with bounded polycyclic ranks are considered. For such groups the necessary and sufficient conditions to be residually a finite π-group (where π is a non-empty set of primes) and to be residually a finite nilpotent group are obtained.

Ключевые слова: свободное произведение групп с объединенной подгруппой, аппроксимируемость групп.

УДК 512.543.

Введение

Пусть $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, полициклические ранги которых ограничены, и пусть G — свободное произведение групп G_λ ($\lambda \in \Lambda$) с одной объединенной неединичной циклической подгруппой H, порожденной элементом h. Будем предполагать, что H строго содержится в каждом свободном множителе G_λ и что число свободных множителей не меньше двух. Не исключается, что это число бесконечно.

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через n_λ будем обозначать индекс подгруппы H в своем изоляторе в группе G_λ, т. е. n_λ — наибольшее среди всех целых положительных чисел n, для которых уравнение $x^n = h$ разрешимо в группе G_λ. Через $\mathbb{Q}_G$ обозначим подгруппу аддитивной группы $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, порожденную всеми дробями вида $1/n_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$, а через $\mathbb{Q}_\pi$ — группу π-ичных дробей, где π — непустое множество простых чисел.

В 1994 г. Д. Дониз [7] доказал, что если подгруппа H изолирована в каждой группе G_λ, то G аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p. Годом раньше этот результат был получен Кимом [10] для случая, когда Λ — конечное множество. Обобщая этот результат, Ким и Танг [11] в 1997 г. доказали, что в случае конечного множества Λ аппроксимируемость группы G конечными p-группами равносильна тому, что все n_λ являются p-числами. Финитная аппроксимируемость группы G в случае конечного множества Λ была доказана еще в 1963 г. Г. Баумслагом [6]. Все эти результаты перекрываются следующей теоремой, доказанной в § 1.

Теорема 1. *Группа G аппроксимируется конечными π-группами тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}_G$ является собственной подгруппой группы $\mathbb{Q}_\pi$.*

Первоначально теорема 1 была сформулирована авторами в других терминах — на языке делимости целых чисел. Идея использования рациональных чисел в формулировке этой теоремы принадлежит А. Л. Шмелькину.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из теоремы 1.

Следствие 1. *Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}_G \neq \mathbb{Q}$.*

Следствие 2. *Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда числа n_λ ограничены и являются степенями числа p.*

Следствие 3. *Пусть Λ — конечное множество. Группа G аппроксимируется конечными π-группами тогда и только тогда, когда все n_λ являются π-числами.*

Наряду с теоремой 1 будет доказана также

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны между собой.*

1. *Группа G аппроксимируется конечными нильпотентными группами.*
2. *Все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p и при этом выполняется хотя бы одно из условий:*
   а) числа n_λ ограничены;
   б) подгруппа H содержится в центре группы G.
3. *Существуют простые числа p и q такие, что G аппроксимируется объединением класса конечных p-групп и класса конечных q-групп.*

§ 1. Доказательства теорем

Сохраняя все обозначения, введенные выше, вместо $\mathbb{Q}_{\{p\}}$ будем писать $\mathbb{Q}_p$.

Лемма 1. *Пусть s — целое положительное число, p — простое число такое, что $\mathbb{Q}_p \nsubseteq \mathbb{Q}_G$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что G_λ/U_λ – конечные p-группы ограниченных порядков и для каждого $\lambda \in \Lambda$ порядок элемента hU_λ группы G_λ/U_λ равен p^s.*

Доказательство. Из ограничений, наложенных на группы G_λ, следует, что каждая из них обладает нормальным рядом с бесконечными циклическими факторами, причем длины этих рядов ограничены некоторым числом r. Поэтому ступени нильпотентности c_λ групп G_λ также ограничены этим числом r и для любого натурального числа n индекс степенной подгруппы G_λ^n в группе G_λ не превосходит n^r.

Так как $\mathbb{Q}_p \nsubseteq \mathbb{Q}_G$, то найдется k такое, что p^k не делит никакое n_λ. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ уравнение $x^{p^k} = h$ не разрешимо в G_λ, и потому в G_λ не разрешимо уравнение $x^{p^{k+s}} = h^{p^s}$, откуда в силу результата А. И. Мальцева [5, лемма 2] $h^{p^s} \notin G_\lambda^{p^{(k+s)c_\lambda}}$, и поскольку $c_\lambda \leqslant r$, то $h^{p^s} \notin G_\lambda^{p^{(k+s)r}}$. Отсюда и из элементарных свойств конечных p-групп следует, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ, содержащая $G_\lambda^{p^{(k+s)r}}$ и такая, что $|hU_\lambda| = p^s$. Очевидно, что G_λ/U_λ — конечные p-группы и их порядки ограничены, так как

$$|G_\lambda/U_\lambda| \leqslant |G_\lambda/G_\lambda^{p^{(k+s)r}}| \leqslant p^{(k+s)r^2}.$$

Лемма 2. *Свободное произведение произвольного семейства конечных p-групп ограниченных порядков с одной объединенной циклической подгруппой аппроксимируется конечными p-группами.*

Доказательство этого утверждения, основанное на результатах Хигмана [9], содержится в [1] (следствие 2.1.1).

Лемма 3. *Пусть p — простое число такое, что $\mathbb{Q}_p \nsubseteq \mathbb{Q}_G$. Тогда для любого неединичного элемента g из H существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $g\varphi \neq 1$.*

Доказательство. Фиксируем натуральное число s. Так как $\mathbb{Q}_p \nsubseteq \mathbb{Q}_G$, то по лемме 1 для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что G_λ/U_λ — конечные p-группы ограниченных порядков и для всех $\lambda \in \Lambda$ $|hU_\lambda| = p^s$. Это последнее обстоятельство позволяет продолжить естественные гомоморфизмы $G_\lambda \to G_\lambda/U_\lambda$ до гомоморфизма ρ группы G на свободное произведение P групп G_λ/U_λ с циклическим объединением $H\rho$. По лемме 2 P аппроксимируется конечными p-группами, и поскольку $|h\rho| = |hU_\lambda| = p^s$, то существует гомоморфизм σ группы P на конечную p-группу такой, что $|h\rho\sigma| = p^s$. Таким образом, для любого натурального числа s существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, переводящий h в элемент порядка p^s. Но это утверждение, как легко видеть, равносильно лемме 3.

Лемма 4. *Пусть $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство конечных нильпотентных π-групп ограниченных порядков, P — свободное произведение групп P_λ с одной объединенной циклической подгруппой C. Тогда P аппроксимируется конечными π-группами.*

Доказательство. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — все простые делители порядков групп P_λ. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ и для каждого $i = 1, \ldots, s$ через $P_{\lambda i}$ обозначим силовскую p_i-подгруппу группы P_λ, а через $\pi_{\lambda i}$ — проекцию P_λ на P_{λ_i}. При фиксированном i проекции $\pi_{\lambda i}$ можно продолжить до гомоморфизма π_i группы P на свободное произведение P_i групп $P_{\lambda i}$ с циклическим объединением $C\pi_i$.

Так как $P_{\lambda i}$ — конечные p_i-группы ограниченных порядков, то по лемме 2 P_i аппроксимируется конечными p_i-группами. Поэтому существует гомоморфизм σ_i группы P_i на конечную p_i-группу, инъективный на $C\pi_i$. Тогда подгруппа $N = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \pi_i\sigma_i$ имеет конечный π-индекс в группе P и тривиально пересекает подгруппу C. В силу последнего обстоятельства N является свободным произведением свободной подгруппы F и некоторых подгрупп группы P вида $N \cap a^{-1}P_\lambda a$, где $a \in P$, и поэтому N аппроксимируется конечными π-группами. Отсюда и из того, что N имеет конечный π-индекс в P, следует, что и P аппроксимируется конечными π-группами.

Лемма 5. *Пусть A — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $B = (b)$ — неединичная циклическая подгруппа группы A, n — индекс подгруппы B в своем изоляторе X в группе A. И пусть n является π-числом. Тогда для каждого элемента $a \in A \backslash B$ и для каждого простого числа $p \in \pi$ существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы A такая, что $a \notin BN$ и порядок элемента b по модулю подгруппы N является степенью числа p.*

Доказательство. Пусть $X = (x)$. Тогда $b = x^n$. Поскольку A аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p [8], то в группе A существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса такая, что $|xN| = n$. Тогда $N \cap X = B$ и поэтому если $a \in X \backslash B$, то $a \notin N = BN$ и $|bN| = 1 = p^0$. Если же $a \notin X$, то существование подгруппы N с требуемыми свойствами следует из того, что изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы отделима в классе конечных p-групп для любого простого числа p (см. [4]).

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 1, рассмотрим отдельно три случая: $\mathbb{Q}_G \subset \mathbb{Q}_\pi$, $\mathbb{Q}_G = \mathbb{Q}_\pi$ и $\mathbb{Q}_G \nsubseteq \mathbb{Q}_\pi$.

1. $\mathbb{Q}_G \subset \mathbb{Q}_\pi$. Это означает, что все n_λ — π-числа и существует $p \in \pi$ такое, что $\mathbb{Q}_p \nsubseteq \mathbb{Q}_G$. Мы фиксируем число p с таким свойством. Так как $\mathbb{Q}_p \nsubseteq \mathbb{Q}_G$, то по лемме 3 для любого элемента $g \in H \setminus \{1\}$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу (которая является и π-группой поскольку $p \in \pi$) такой, что $g\varphi \neq 1$. Поэтому для доказательства аппроксимируемости группы G конечными π-группами остается найти такой гомоморфизм φ для элемента $g \in G \backslash H$. Для такого элемента g несократимая запись имеет вид $g = x_1 \cdots x_n$ $(n \geqslant 1)$, где x_i принадлежат свободным сомножителям, но не входят в объединяемую подгруппу H. Обозначим через Ω множество всех $\lambda \in \Lambda$ таких, что G_λ содержит хотя бы один из элементов $x_1 \dots x_n$. Так как все n_λ — π-числа и $p \in \pi$, то по лемме 5 для каждого $\lambda \in \Omega$ существует нормальная подгруппа N_λ конечного π-индекса группы G_λ такая, что $|hN_\lambda|$ — степень числа p и для каждого $i = 1, \dots, n$ из того, что $x_i \in G_\lambda$, следует, что $x_i \notin HN_\lambda$. Обозначим через p^s максимальный порядок элементов hN_λ по всем $\lambda \in \Omega$. По лемме 1 для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что G_λ/U_λ — конечные p-группы ограниченных порядков и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $|hU_\lambda| = p^s$. Пусть

$$V_\lambda = \begin{cases} U_\lambda \cap N_\lambda, \text{если} \lambda \in \Omega, \\ U_\lambda, \text{если} \lambda \in \Lambda \backslash \Omega. \end{cases}$$

Тогда G_λ/V_λ — конечные π-группы ограниченных порядков и $|hV_\lambda| = p^s$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Поэтому естественные гомоморфизмы $G_\lambda \to G_\lambda/V_\lambda$ можно продолжить до гомоморфизма ρ группы G на свободное произведение P групп G_λ/V_λ с одной объединенной подгруппой $H\rho$. По лемме 4 P аппроксимируется конечными π-группами. Так как $V_\lambda \subseteq N_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Omega$, то для каждого $i = 1, \dots, n$ из того, что $x_i \in G_\lambda$, следует, что $x_i \notin HV_\lambda$. Поэтому произведение $x_1\rho \cdots x_n\rho$ будет несократимой записью элемента $g\rho$. Таким образом, $g\rho$ — неединичный элемент группы P, аппроксимируемой конечными π-группами. Поэтому существует гомоморфизм σ группы P на конечную π-группу такой, что $g\rho\sigma \neq 1$.

2. $\mathbb{Q}_G = \mathbb{Q}_\pi$. Это означает, что для каждого $p \in \pi$ и для каждого натурального k некоторое n_λ делится на p^k, и поэтому уравнение

$$x^{p^k} = h \qquad (*)$$

разрешимо в G. Пусть σ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную π-группу K. Тогда $|K| = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$, где $p_i \in \pi$. Из разрешимости уравнения $(*)$ следует, что для каждого $i = 1, \dots, r$ найдется элемент $g_i \in G$ такой, что $g_i^{p_i^{s_i}} = h$. Полагаем $n = |K|$, $n_i = n/p_i^{s_i}$ $(i = 1, \dots, r)$. Тогда $(h\sigma)^{n_i} = (g_i^{p_i^{s_i}}\sigma)^{n_i} = (g_i\sigma)^n = 1$ для каждого $i = 1, \dots, r$. Отсюда и из того, что числа $n_1, \dots, n_r$ взаимно просты, следует, что $h\sigma = 1$. Поэтому G не аппроксимируется конечными π-группами.

3. $\mathbb{Q}_G \nsubseteq \mathbb{Q}_\pi$. Это означает, что некоторое n_λ не является π-числом. Пусть q — простой делитель числа n_λ, не входящий в π. Тогда в группе G_λ найдется элемент x такой, что $x^q = h$. Очевидно, что x не входит в H, но для любого гомоморфизма φ группы G на конечную π-группу $x\varphi \in H\varphi$. Выберем еще элемент $y \in G_\mu \backslash H$, где $\mu \neq \lambda$. Легко видеть, что в последовательности коммутаторов $u_1, u_2, \dots$, где $u_1 = [x, y]$ и $u_{n+1} = [x, u_n]$, все элементы имеют несократимую запись длины больше 1 и потому отличны от 1 в группе G. С другой стороны, при любом гомоморфизме φ группы G на конечную π-группу $x\varphi \in H\varphi \subseteq G_\mu\varphi$ и поэтому $u_n\varphi$ является простым коммутатором веса n от элементов группы $G_\mu\varphi$, откуда следует, что $u_n\varphi = 1$, если n больше ступени нильпотентности группы G_μ. Поэтому G не аппроксимируется конечными π-группами. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Докажем равносильность условий 1, 2, 3 из теоремы 2. Пусть выполняется условие 1, т. е. G аппроксимируется конечными нильпотентными группами. Тогда все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p [3]. Покажем, что выполняется условие 2. Допустим противное. Тогда числа n_λ являются неограниченными степенями числа p и H не лежит в центре группы G. Поэтому $a^{-1}ha \notin H$, где $a \in G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, и уравнение

$$x^{p^k} = a^{-1}ha \qquad (**)$$

разрешимо в G для любого k. Подберем элементы $b \in G_\mu$, $c \in G_\nu$ так, чтобы $b^p = h = c^p$, где λ, μ, ν попарно различны. Тогда коммутатор $v = [a^{-1}ha, [b, c]]$ отличен от 1. Если φ — гомоморфизм группы G на конечную p-группу, то из разрешимости уравнения $(**)$ для любого k следует, что $(a^{-1}ha)\varphi = 1$, и тогда $v\varphi = 1$. Если φ — гомоморфизм группы

G на конечную q-группу, где $q \neq p$, то равенства $b^p = h = c^p$ означают, что $b\varphi$ и $c\varphi$ принадлежат $H\varphi$ и тогда $[b, c]\varphi = 1$, т. е. $v\varphi = 1$. Таким образом, $v\varphi = 1$ для любого гомоморфизма φ группы G на конечную нильпотентную группу, что противоречит условию 1.

Покажем теперь, что из условия 2 вытекает условие 3. Пусть все n_λ являются степенями числа p. Если n_λ ограничены, то по следствию 2 G аппроксимируется конечными p-группами, и в этом случае условие 3 выполняется. Если же H лежит в центре группы G, то выполнение условия 3 обеспечивается следующими двумя утверждениями.

1. Группа G/H аппроксимируется конечными p-группами как свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп G_λ/H, конечные части которых являются p-группами.

2. Если q — простое число, отличное от p, то для любого элемента $g \in H\backslash 1$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную q-группу такой, что $g\varphi \neq 1$. Это вытекает из леммы 3, которая применима в данной ситуации, поскольку все n_λ — p-числа и, следовательно, $Q_q \nsubseteq Q_G$.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается заметить, что импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

§ 2. Дополнительные замечания

Если условие отсутствия кручения в группах G_λ ослабить до требования ограниченности порядков периодических частей этих групп, имеют место следующие обобщения доказанных здесь теорем 1 и 2 (π_G обозначает множество всех простых p таких, что $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_G$):

Теорема 3. *Если множество π_G не пусто, то*

1) *элемент h имеет конечный порядок m по модулю пересечения всех нормальных подгрупп конечного π_G-индекса группы G;*

2) *группа G аппроксимируется конечными π-группами тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}_G \subset \mathbb{Q}_\pi$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ нормальное замыкание элемента h^m в группе G_λ является группой без π_G-кручения.*

Если же π_G — пустое множество, то группа G аппроксимируется конечными π-группами тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}_G \subset \mathbb{Q}_\pi$.

Теорема 4. *Следующие условия равносильны между собой:*

1. *Группа G аппроксимируется конечными нильпотентными группами.*

2. *Существует простое число p такое, что все n_λ являются степенями числа p и подгруппа, высекаемая в H пересечением всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G, лежит в центре группы G.*

3. *Существуют простые числа p и q такие, что G аппроксимируется объединением класса конечных p-групп и класса конечных q-групп.*

Доказательства теорем 3 и 4 изложены в работе [2].

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 1. С. 3—13.

2. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой. Иваново, 1999. 55 с. Деп. в ВИНИТИ. № 1371-В 99.
3. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. ИвГУ. Математика. Вып. 2. (1999). С. 5—7.
4. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 396—407.
5. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. Иваново, 1958. Т. 18. № 5. С. 49—60.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 21. № 5. P. 491—506.
7. *Doniz D.* Residual properties of free products of infinitely many nilpotent groups amalgamating cycles // J. Algebra. 1996. Vol. 179. P. 930—935.
8. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
9. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.
10. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. 1993. Vol. 162. P. 1—11.
11. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. Vol. 201. P. 317—327.