УДК 512.543

Д. Н. Азаров, А. В. Розов

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА С НОРМАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Для свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами получено необходимое и достаточное условие финитной аппроксимируемости.

Ключевые слова: разрешимая группа конечного ранга, свободное произведение групп с объединенными подгруппами, финитно аппроксимируемая группа.

The necessary and sufficient condition of residual finiteness for free product of soluble groups of finite rank with normal amalgamated subgroups is obtained.

Key words: soluble group of finite rank, free product of groups with amalgamated subgroups, residually finite group.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$P = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости группы P состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости, накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Примерами таких ограничений могут служить конечность подгрупп H и K, их цикличность, а также нормальность подгрупп H и K в группах A и B

соответственно. Г. Баумслаг [2] доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а объединенные подгруппы H и K конечны, то группа P финитно аппроксимируема.

Среди разрешимых групп существует много примеров финитно аппроксимируемых групп. Классическими примерами такого рода являются все полициклические группы. Их финитная аппроксимируемость была установлена К. Гиршем [4]. Накладывая на группы A и B условие полицикличности, Дж. Дайер [3] доказала финитную аппроксимируемость группы P при условии, что объединенные подгруппы H и K являются циклическими. В своей фундаментальной работе [2] Г. Баумслаг получил следующий результат.

Теорема 1. *Свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Приведенный ниже пример показывает, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Для такого свободного произведения здесь будет доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть P — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются разрешимыми группами конечного ранга, то группа P тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Напомним, что подгруппа H группы A называется финитно отделимой, если для каждого элемента a группы A, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы A на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Хорошо известно, что полициклические группы финитно аппроксимируемы и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [5, п. 1.3.10]). Поэтому доказанная Г. Баумслагом теорема 1 является непосредственным следствием теоремы 2.

Заметим теперь, что свободное произведение P двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами H и K не обязано быть финитно аппроксимируемой группой даже в случае, когда A и B абелевы. Действительно, существуют финитно аппроксимируемые абелевы группы конечного ранга, в которых не все подгруппы финитно отделимы. Примером такого рода может служить аддитивная группа Q_p p-ичных дробей, где p — простое число. В этой группе подгруппа $\mathbb{Z}$ целых чисел не является финитно отделимой. Поэтому свободное произведение двух экземпляров группы Q_p с объединенной подгруппой $\mathbb{Z}$ не будет финитно аппроксимируемой группой.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Группа конечного ранга может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.*

Это утверждение, даже в более общем виде, доказано в работе [1].

Лемма 2. *Пусть G — группа конечного ранга. И пусть H — подгруппа конечного индекса группы G. Тогда в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что $N \subseteq H$.*

Доказательство. Пусть G — группа конечного ранга, H — подгруппа группы G и индекс $[G : H]$ конечен. Обозначим индекс $[G : H]$ через n. По лемме 1 в группе G существует только конечное число подгрупп индекса n. Пусть N — пересечение всех таких подгрупп. Тогда $N \subseteq H$ и очевидно, что N имеет конечный индекс в группе G. Так как любой автоморфизм φ группы G переставляет между собой ее подгруппы индекса n, то φ оставляет на месте их пересечение. Поэтому N — характеристическая подгруппа группы G. Лемма доказана.

Напомним, что элемент a группы G называется полным, если для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется полной, если все ее элементы являются полными.

Следуя Д. Робинсону и Дж. Ленноксу [5], группу G будем называть редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп.

Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована. Для разрешимых групп конечного ранга имеет место и обратное утверждение.

Лемма 3. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Эта лемма, даже в более общем виде, доказана в [5, п. 5.3.2].

Лемма 4. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то группа G финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, H — конечная подгруппа группы G и фактор-группа G/H финитно аппроксимируема. Покажем, что G финитно аппроксимируема.

Так как фактор-группа G/H финитно аппроксимируема, то она редуцирована. Покажем, что G редуцирована.

Пусть A — полная подгруппа группы G. Так как фактор-группа полной группы сама является полной, то подгруппа AH/H группы G/H является полной. Отсюда и из того, что G/H редуцирована, следует, что AH/H — единичная подгруппа, т. е. $AH = H$. Следовательно, $A \subseteq H$, и поэтому подгруппа A конечна. Отсюда и из того, что подгруппа A полная, следует, что $A = 1$. Таким образом, G — разрешимая редуцированная группа конечного ранга. Поэтому в силу леммы 2 группа G финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно,*

$$\Lambda = \{(i, j) \in I \times J : (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\}.$$

Для каждого $\lambda = (i, j)$ из Λ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K, \qquad (*)$$

то группа P финитно аппроксимируема. Если группа P финитно аппроксимируема, группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $K \neq B$, то выполняются условия (*), и в частности подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Первое утверждение леммы 5 хорошо известно как фильтрационная теорема Г. Баумслага и доказано в [2]. Второе утверждение леммы представляет собой обращение фильтрационной теоремы Г. Баумслага и доказано в [6].

3. Доказательство теоремы 2

Пусть P — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. И пусть группы A и B являются разрешимыми группами конечного ранга. Покажем, что группа P финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Так как группы A и B разрешимы, то каждая из них удовлетворяет одному из коммутаторных тождеств $\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n}) = 1$, где

$$\delta_0(x) = x,$$
$$\delta_{n+1}(x_1, \ldots, x_{2^{n+1}}) = [\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n}), \delta_n(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})].$$

Поэтому необходимость в доказываемой теореме обеспечивается вторым утверждением леммы 5.

Докажем теперь достаточность. Пусть подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно. Покажем, что группа P финитно аппроксимируема. Будем считать, что A и B — подгруппы группы P. Тогда $A \cap B = H = K$. Очевидно, что H — нормальная подгруппа группы P и фактор-группа P/H является свободным произведением подгрупп A/H и B/H. Пусть $g \in P$ и $g \neq 1$. Покажем, что существует гомоморфизм группы P на конечную группу, переводящий g в элемент, отличный от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Так как H финитно отделима в A и в B, то фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы. Поэтому группа
$$P/H = A/H * B/H$$
представляет собой свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп. Следовательно, группа P/H финитно аппроксимируема. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы P на фактор-группу P/H. Тогда $g\varepsilon$ — неединичный элемент финитно аппроксимируемой группы P/H. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы P/H на некоторую конечную группу такой, что $g\varepsilon\rho \neq 1$. Гомоморфизм $\varepsilon\rho$ является искомым.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как H финитно аппроксимируема, то в ней существует подгруппа M конечного индекса, не содержащая g. Подгруппа H наследует от группы A свойство конечности ранга. Поэтому в силу леммы 2 в группе H существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что $N \subseteq M$. Таким образом, N — характеристическая подгруппа группы H, которая, в свою очередь, нормальна в группе P. Поэтому N нормальна в P. Отсюда и из того, что $N \leqslant H$, следует, что

$$P/N = (A/N * B/N,\, H/N)$$

— свободное произведение групп A/N и B/N с объединенной подгруппой H/N. Заметим, что объединенная подгруппа H/N конечна.

Докажем, что фактор-группы A/N и B/N финитно аппроксимируемы. Введем следующие обозначения: $\overline{A} = A/N$, $\overline{H} = H/N$. Так как A — разрешимая группа конечного ранга, то ее фактор-группа $\overline{A}$ также является разрешимой группой конечного ранга. Заметим, что $\overline{H}$ — конечная нормальная подгруппа группы $\overline{A}$ и фактор-группа $\overline{A}/\overline{H} \cong A/H$ финитно аппроксимируема. Поэтому, используя лемму 4, получаем, что группа $\overline{A} = A/N$ финитно аппроксимируема. Аналогично проверяется, что и фактор-группа B/N финитно аппроксимируема.

Таким образом, фактор-группа P/N является свободным произведением финитно аппроксимируемых групп A/N и B/N с конечной объединенной подгруппой H/N. Поэтому в силу отмеченного выше результата Г. Баумслага группа P/N финитно аппроксимируема. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы P на фактор-группу P/N. Так как $Ker\varepsilon = N$, $N \subseteq M$ и $g \notin M$, то $g\varepsilon$ — неединичный элемент финитно аппроксимируемой группы P/N. Теперь искомый гомоморфизм группы P на конечную группу строится точно так же, как и в случае, когда $g \notin H$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О группах конечного общего ранга // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 100—103.
2. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
3. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Ibid. 1968. Vol. 133, № 1. P. 131—143.
4. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.
5. *Lennox J., Robinson D.* The Theory of Infinite Soluble Groups. Oxford. : Clarendon Press. 2004. 342 p.
6. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 703—706.