Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 5 (2002)

УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП С ОБЪЕДИНЁННОЙ ПОДГРУППОЙ КОРНЕВЫМ КЛАССОМ ГРУПП

Доказано, что свободное произведение групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само аппроксимируется классом $\mathcal{K}$. С помощью этого результата получено достаточное условие аппроксимируемости корневым классом для свободного произведения G групп A и B с объединёнными подгруппами H и K и склеивающим изоморфизмом φ. Для частного случая, когда $A = B$, $H = K$ и φ — тождественное отображение, доказано, что группа G аппроксимируется корневым классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда группа A аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ и подгруппа H группы A является $\mathcal{K}$-отделимой.

1. Введение

Следуя К. Грюнбергу [4], абстрактный класс групп $\mathcal{K}$, содержащий хотя бы одну неединичную группу, называют корневым, если выполняются следующие условия:

1) если $A \in \mathcal{K}$ и $B \leqslant A$, то $B \in \mathcal{K}$;

2) если $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$, то $A \times B \in \mathcal{K}$;

3) если $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ – субнормальная последовательность и $A/B, \quad B/C \in \mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \leqslant C$ и $A/D \in \mathcal{K}$.

В настоящей работе исследуется аппроксимируемость свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если для любого элемента g группы G, отличного от 1, существует гомоморфизм φ группы G на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\varphi \neq 1$. К числу наиболее исследованных аппроксимационных свойств группп относятся финитная аппроксимируемость, т. е. аппроксимируемость классом всех конечных групп, а также аппроксимируемость классом всех конечных p-групп и классом всех разрешимых групп. Все эти три класса являются корневыми. Поэтому результаты об аппроксимируемости группы произвольным корневым классом имеют достаточно общий характер.

В работе [4] доказано следующее утверждение.

Для того, чтобы любое свободное произведение групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само было $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой, необходимо и достаточно, чтобы любая свободная группа была $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.

Наш первый результат утверждает, что на самом деле указанное условие выполняется для любого корневого класса:

Теорема 1. *Любая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом.*

Это теорема позволяет переформулировать результат Грюнберга следующим образом:

Теорема 2. *Любое свободное произведение групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само аппроксимируется классом $\mathcal{K}$.*

С помощью теоремы 2 и теоремы Х. Нейман (см., напр., [2], с. 122) легко устанавливается следующий результат:

Теорема 3. *Свободное произведение G групп A и B с объединенной подгруппой H аппроксимируется корневым классом $\mathcal{K}$, если группы A и B аппроксимируются классом $\mathcal{K}$ и существует гомоморфизм группы G на группу из $\mathcal{K}$ инъективный на подгруппе H.*

Заметим, что теорема 3 является обобщением теоремы 2. Заметим еще, что если объединяемая подгруппа H конечна, то сформулированное в ней достаточное условие аппроксимируемости группы G корневым классом $\mathcal{K}$ будет также и необходимым.

Другим достаточно жестким ограничением, позволяющим получить простой критерий аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{K}$ свободного произведения G групп A и B с объединенной подгруппой H, является совпадение свободных сомножителей A и B. Если $A = B$ и склеивающий изоморфизм φ является тождественным отображением, то группу G будем обозначать через $A \underset{H}{*} A$.

Теорема 4. *Группа $G = A \underset{H}{*} A$ аппроксимируется корневым классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда группа A аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ и подгруппа H группы A является $\mathcal{K}$-отделимой.*

В [5] этот результат получен для частного случая, когда $\mathcal{K}$ есть класс всех конечных p-групп. Напомним, что подгруппа H группы A называется $\mathcal{K}$-отделимой, если для любого элемента a группы A, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из $\mathcal{K}$ такой, что $a\varphi \notin H\varphi$.

Заметим, что теоремы 3 и 4 могут быть естественным образом распространены на случай свободного произведения любого семейства групп с одной объединенной подгруппой.

2. Доказательства теорем

Лемма. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. Тогда:*

1) если группа G обладает субнормальным рядом с факторами из класса $\mathcal{K}$, то $G \in \mathcal{K}$;

2) если $F \trianglelefteq G$, $G/F \in \mathcal{K}$ и F аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, то и группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$;

3) если $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $G/A \in \mathcal{K}$ и $G/B \in \mathcal{K}$, то $G/(A \cap B) \in \mathcal{K}$.

В самом деле, из определения корневого класса следует, что корневой класс замкнут относительно расширений. Поэтому имеет место первое утверждение леммы. Второе и третье утверждения леммы также легко проверяются с помощью определения корневого класса.

Для доказательства теоремы 1 заметим, что любой корневой класс $\mathcal{K}$ содержит неединичную циклическую группу (ввиду условия 1 из определения корневого класса). Если $\mathcal{K}$ содержит бесконечную циклическую группу, то в силу леммы $\mathcal{K}$ содержит любую группу, обладающую субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами, и потому все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения принадлежат классу $\mathcal{K}$. Если же $\mathcal{K}$ содержит конечную неединичную циклическую группу, то он содержит группу простого порядка p, и поэтому в силу леммы класс $\mathcal{K}$ содержит все группы, обладающие субнормальным рядом с факторами порядка p, т. е. все конечные p-группы входят в $\mathcal{K}$.

Таким образом, любой корневой класс содержит все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения или все конечные p-группы для некоторого простого числа p. Поэтому для завершения доказательства теоремы 1 остается напомнить, что все свободные группы аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, а также конечными p-группами (см., напр., [3], с. 347, и [1], с. 121).

Теорема 2 непосредственно вытекает из теоремы 1 и из теоремы Грюнберга, сформулированной выше.

Докажем теперь теорему 3. Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем группы A и B

аппроксимируются корневым классом $\mathcal{K}$. И пусть существует гомоморфизм σ группы G на группу из $\mathcal{K}$, инъективный на H. Если $N = \operatorname{Ker}\sigma$, то $G/N \in \mathcal{K}$ и $N \cap H = 1$. По теореме Х. Нейман группа N является свободным произведением некоторой свободной группы и подгрупп вида $g^{-1}Ag \cap N$ $g^{-1}Bg \cap N$, очевидно, аппроксимируемых классом $\mathcal{K}$. Таким образом, в силу теоремы 1 группа N является свободным произведением групп, аппроксимируемых классом $\mathcal{K}$, и потому сама аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ в силу теоремы 2. Отсюда и из того, что $G/N \in \mathcal{K}$ на основании леммы заключаем, что группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$. Теорема 3 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4. Пусть $G = A \underset{H}{*} A$. Каждой нормальной подгруппе N группы A сопоставим свободное произведение $G_N = A/N \underset{HN/N}{*} A/N$ и гомоморфизм $\varepsilon_N : G \to G_N$, продолжающий естественный гомоморфизм $A \to A/N$. Очевидно, что группа G_N является расширением свободной группы с помощью группы A/N. Поэтому если A/N принадлежит классу $\mathcal{K}$, то группа G_N аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ в силу леммы и теоремы 1. Таким образом, для доказательства аппроксимируемости группы G корневым классом $\mathcal{K}$ достаточно доказать, что группа G аппроксимируется группами G_N такими, что $A/N \in \mathcal{K}$.

Предположим, что группа A аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ и подгруппа H группы A является $\mathcal{K}$-отделимой. Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. И пусть несократимая запись элемента g имеет вид $g = a_1 a_2 \cdots a_s$. Рассмотрим отдельно два случая.

1. $s > 1$. В этом случае $a_i \in A \setminus H$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$. Из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H следует, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ в группе A существует нормальная подгруппа N_i такая, что $A/N_i \in \mathcal{K}$ и $a_i \notin HN_i$. Пусть $N = \bigcap_{i=1}^{s} N_i$. По лемме $A/N \in \mathcal{K}$ и, кроме того, ясно, что для всех $i = 1, 2, \ldots, s$, $a_i \notin HN$, т. е. $a_i N \notin HN/N$. Это означает, что для всех $i = 1, 2, \ldots, s$, $a_i\varepsilon_N \notin H\varepsilon_N$. Поэтому запись $g\varepsilon_N = (a_1\varepsilon_N)(a_2\varepsilon_N) \cdots (a_s\varepsilon_N)$ несократима, причем ее длина $s > 1$. Следовательно, $g\varepsilon_N \neq 1$.

2. $s = 1$, т. е. $g \in A$. Поскольку группа A аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа N такая, что $A/N \in \mathcal{K}$ и $g \notin N$, т. е. $gN \neq N$. Это означает, что $g\varepsilon_N \neq 1$.

Таким образом, в любом случае для элемента $g \neq 1$ в группе A существует нормальная подгруппа N такая, что $A/N \in \mathcal{K}$ и гомоморфизм $\varepsilon_N : G \to G_N$ переводит элемент g в элемент, отличный от единицы. Иными словами, группа G аппроксимируется группами

G_N такими, что $A/N \in \mathcal{K}$. Следовательно, группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$.

Обратно, предположим, что группа G аппроксимируется корневым классом $\mathcal{K}$. Очевидно, что тем же свойством обладает и ее подгруппа A. Остается доказать, что H — $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы A. Пусть γ — автоморфизм группы G, переставляющий естественным образом ее свободные сомножители. И пусть $a \in A \setminus H$. Будем далее считать, что элемент a принадлежит одному из двух свободных сомножителей группы G. Тогда $a\gamma \neq a$. Поскольку группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, найдется нормальная подгруппа N группы G такая, что $G/N \in \mathcal{K}$ и $aN \neq (a\gamma)N$. Пусть $M = N \cap N\gamma$. Тогда

$$M\gamma = N\gamma \cap N\gamma^2 = N\gamma \cap N = M,$$

и потому в фактор-группе G/M можно рассмотреть автоморфизм $\overline{\gamma}$, индуцированный автоморфизм γ. Так как $aN \neq (a\gamma)N$ и $M \leqslant N$, то $aM \neq (a\gamma)M$. С другой стороны, $(a\gamma)M = (aM)\overline{\gamma}$. Таким образом, $aM \neq (aM)\overline{\gamma}$. Так как γ действует тождественно на H, то $\overline{\gamma}$ действует тождественно на HM/M. Отсюда и из того, что $aM \neq (aM)\overline{\gamma}$, следует, что $aM \notin HM/M$, т. е. $a\varepsilon \notin H\varepsilon$, где ε — естественный гомоморфизм группы G на G/M, причем ясно, что $G/M \in \mathcal{K}$. Тем самым доказана $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H группы A.

Заметим, в заключение, что необходимость в теореме 4 имеет место и при более слабом ограничении на класс $\mathcal{K}$, а именно, когда $\mathcal{K}$ — класс, удовлетворяющий условиям 1 и 2 из определения корневого класса.

Список использованной литературы

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М., 1982. 288 с.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М., 1980. 447 с.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М., 1974. 455 с.
4. *Grunberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3), 1957. Vol. 7. P. 29 – 62.
5. *Kim G., McCarron J.* Of amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra, 1993. Vol. 162. P. 1 – 11.