Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 512.543

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С ОДНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Д. Н. Азаров

Введение

Пусть $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство групп, и пусть H_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — подгруппа группы G_λ. Предположим также, что для каждой пары $(\lambda,\mu) \in \Lambda^2$ существует изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu} : H_\lambda \to H_\mu$, причем для любых $\lambda,\mu,\nu \in \Lambda$ выполняются следующие условия: $\varphi_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{H_\lambda}$, $\varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}$, $\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}$. Пусть

$$G = \langle G_\lambda\ (\lambda \in \Lambda);\ h\varphi_{\lambda\mu} = h\ (h \in H_\lambda,\ \lambda,\mu \in \Lambda)\rangle$$

— группа, порождаемая элементами всех групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ и определяемая определяющими соотношениями этих групп, а также всевозможными соотношениями вида $h\varphi_{\lambda\mu} = h$, где $h \in H_\lambda$ и $\lambda,\mu \in \Lambda$. Хорошо известно, что каждая группа G_λ естественным образом вложима в группу G, и если отождествить G_λ с соответствующей подгруппой группы G, то для любых $\lambda,\mu \in \Lambda$

$$G_\lambda \cap G_\mu = H_\lambda = H_\mu.$$

Обозначим через H подгруппу группы G, совпадающую с каждой из этих подгрупп H_λ. Будем говорить, что группа G является *свободным произведением групп* G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *с одной объединенной подгруппой* H (и считать, когда это удобно, группы G_λ подгруппами группы G).

В работе Г. Баумслага [1] доказано, что свободное произведение двух групп с объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой, если сомножители конечны (теорема 2) или сомножители финитно аппроксимируемы, а объединяемая подгруппа конечна (теорема 3). Доказанные в § 1 условия финитной аппроксимируемости группы G (теоремы 1.1, 1.2) являются обобщением этих утверждений.

В § 2 исследуется вопрос аппроксимируемости группы G конечными p-группами. Некоторые аппроксимационные свойства группы G сформулированы на языке главных рядов. Определение главного ряда группы T в случае, когда T — конечная p-группа, принимает следующий вид: последовательность $1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \dots \leqslant T_n = T$ нормальных подгрупп конечной p-группы T называется *главным рядом*, если все ее факторы T_i/T_{i-1} $(i = 1,\dots,n)$ имеют порядок p. Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная p-группа, и пусть

$$1 = G_{\lambda,0} \leqslant G_{\lambda,1} \leqslant \dots \leqslant G_{\lambda,j_\lambda} = G_\lambda$$

— некоторый главный ряд группы G_λ; будем обозначать его символом $\mathfrak{R}_\lambda$. Семейство рядов $(\mathfrak{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ будем называть *совместимым*, если для любых $\lambda,\mu \in \Lambda$ изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu}$ отображает множество пересечений

$$\{G_{\lambda,0} \cap H_\lambda, G_{\lambda,1} \cap H_\lambda, \dots, G_{\lambda,j_\lambda} \cap H_\lambda\}$$

на множество пересечений

$$\{G_{\mu,0} \cap H_\mu, G_{\mu,1} \cap H_\mu, \ldots, G_{\mu,j_\mu} \cap H_\mu\}.$$

Критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечных p-групп с объединенной подгруппой, полученный Г. Хигменом [2], в этих терминах может быть сформулирован следующим образом.

Пусть G_1 и G_2 — конечные p-группы, $H_1 \leqslant G_1$, $H_2 \leqslant G_2$ и $\varphi : H_1 \to H_2$ — изоморфизм. Группа $G = \langle G_1 * G_2; H_1 = H_2, \varphi \rangle$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда существуют такие главные ряды $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ групп G_1 и G_2 соответственно, что семейство $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ совместимо.

Доказанные в § 2 теоремы 2.1 и 2.2 являются обобщениями этого утверждения.

Доказанные обобщения теорем Баумслага и Хигмена применяются для получения условий финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения конечно порожденных абелевых групп с одной объединенной подгруппой.

§ 1. Финитная аппроксимируемость свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой

Пусть, как и выше, G — свободное произведение групп G_λ ($\lambda \in \Lambda$) с одной объединенной подгруппой H. Следующие две теоремы являются обобщением отмеченных ранее результатов Баумслага.

Теорема 1.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является конечной, причем порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Тогда группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.*

Теорема 1.2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является финитно аппроксимируемой и объединяемая подгруппа конечна. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены в совокупности.*

По-видимому, финитная аппроксимируемость группы G из теоремы 1.1 хорошо известна [3].

Отметим ряд следствий из теоремы 1.2.

Следствие 1.2.1. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная простая группа и $H \neq 1$. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда порядки групп G_λ ограничены в совокупности.*

Следствие 1.2.2. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная циклическая группа и $H \neq 1$. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя p порядка группы H порядки силовских p-подгрупп групп G_λ ограничены в совокупности.*

Следствие 1.2.3. *Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и является расщепляющимся расширением конечной группы H_λ, то группа G финитно аппроксимируема.*

Следствие 1.2.4. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная порожденная финитно аппроксимируемая группа, H_λ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ. Если индексы $[G_\lambda : H_\lambda]$ ограничены в совокупности, то группа G финитно аппроксимируема.*

Следуя Г. Баумслагу [1], семейство $S = (A_i)_{i \in J}$ нормальных подгрупп некоторой группы A назовем ***фильтрацией***, если

$$\bigcap_{i \in J} A_i = 1.$$

Теорема 1.3. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная абелева группа и K_i для каждого $i \in N$ — подгруппа объединенной подгруппы H, порожденная множеством*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda^i \cap H).$$

Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейство $(K_i)_{i \in N}$ является фильтрацией. В частности, если H — конечная группа, то группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует целое положительное число n такое, что $G_\lambda^n \cap H_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Следствие 1.3.1. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — свободная абелева группа конечного ранга, F_λ — изолятор подгруппы H_λ в группе G_λ. Если существуют простое число p и целое положительное число s такие, что $[F_\lambda : H_\lambda]$ для любого $\lambda \in \Lambda$ не делится на p^s, то группа G финитно аппроксимируема.*

Если H — бесконечная циклическая группа, то группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда существуют простое число p и целое положительное число s такие, что $[F_\lambda : H_\lambda]$ для любого $\lambda \in \Lambda$ не делится на p^s.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.1. Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная группа и порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Тогда семейство $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ разбивается на конечное число классов изоморфности $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_1}, \ldots, (G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_s}$. Пусть D_j — изоморфная копия групп семейства $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j}$ $(j = 1, \ldots, s)$. Для каждого $\lambda \in \Lambda_j$ зафиксируем изоморфизм $\tau_\lambda : G_\lambda \to D_j$.

Пусть G_0 — фиксированная группа семейства $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Для элементов подгруппы H_0 группы G_0 введем обозначения $h_{01}, \ldots, h_{0t}$. Обозначим элемент $h_{0i}\varphi_{0\lambda}$ через $h_{\lambda i}$ $(\lambda \in \Lambda, i = 1, \ldots, t)$. Тогда $h_{\lambda i}\varphi_{\lambda\mu} = h_{\mu i}$ для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$. Элементы λ, μ из Λ назовем *эквивалентными*, если существует число $j \in \{1, \ldots, s\}$ такое, что λ, $\mu \in \Lambda_j$ и для любого $i = 1, \ldots, t$ имеет место равенство $h_{\lambda i}\tau_\lambda = h_{\mu i}\tau_\mu$. Введенное отношение эквивалентности разбивает множество Λ на конечное число классов эквивалентности $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$. Пусть $\Omega = \{(\delta_k, \delta_l) | k, l = 1, \ldots, m\}$, $\delta_1, \ldots, \delta_m$ — фиксированная система представителей классов $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ соответственно.

Пусть $\Delta \subseteq \Lambda^2$. Будем обозначать через $\Phi(\Delta)$ множество всех соотношений вида $h_{\lambda i} = h_{\mu i}$, где $(\lambda, \mu) \in \Delta$, $i = 1, \ldots, t$.

Тогда

$$G = \langle G_\lambda(\lambda \in \Lambda);\ \Phi(\Omega) \cup \Phi(\Delta_1^2) \cup \cdots \cup \Phi(\Delta_m^2) \rangle,$$

т. е.

$$G = \langle P_1, \ldots, P_m;\ \Phi(\Omega) \rangle,$$

где

$$P_k = \langle G_\lambda(\lambda \in \Delta_k);\ \Phi(\Delta_k^2) \rangle, \quad k = 1, \ldots, m.$$

В работе [4] показано, что свободное произведение двух групп с конечной объединенной подгруппой будет финитно аппроксимируемым относительно сопряженности, если этим свойством обладают сомножители. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что группы $P_1, \ldots, P_m$ финитно аппроксимируемы относительно сопряженности.

Поскольку множество Δ_k содержится в подходящем множестве Λ_j, то для любых λ, $\mu \in \Delta_k$ заданы изоморфизмы $\tau_\lambda : G_\lambda \to D_j$ и $\tau_\mu : G_\mu \to D_j$, причем $h_{\lambda i}\tau_\lambda = h_{\mu i}\tau_\mu$, $i = 1, \ldots, t$. Рассмотрим изоморфизм $\tau_{\lambda\mu} = \tau_\lambda \tau_\mu^{-1}$. Очевидно, что $h_{\lambda i}\tau_{\lambda\mu} = (h_{\lambda i}\tau_\lambda)\tau_\mu^{-1} = h_{\mu i}$, где $i = 1, \ldots, t$, λ, $\mu \in \Delta_k$.

Пусть a, b — несопряженные элементы из P_k. Тогда существует конечное подмножество Γ_k множества Δ_k такое, что элементы a и b принадлежат подгруппе

$$\overline{P}_k = \langle G_\lambda \ (\lambda \in \Gamma_k); \ h_{\lambda i} = h_{\mu i} \ (\lambda, \mu \in \Gamma_k, \ i = 1, \ldots, t)\rangle,$$

порожденной в группе P_k подгруппами G_λ $(\lambda \in \Gamma_k)$.

Зафиксируем элемент $\gamma \in \Gamma_k$. Если $\lambda \in \Delta_k \setminus \Gamma_k$, то обозначим изоморфизм $\tau_{\lambda\gamma}$ через ρ_λ. Если $\lambda \in \Gamma_k$, то обозначим через ρ_λ тождественное отображение группы G_λ. Можно считать, что для каждого $\lambda \in \Delta_k$ отображение ρ_λ является вложением группы G_λ в группу $\overline{P}_k$. Если $\lambda \in \Gamma_k$, то $h_{\lambda i}\rho_\lambda = h_{\lambda i} = h_{\gamma i} = h_{\gamma i}\rho_\gamma$. Если $\lambda \in \Delta_k \setminus \Gamma_k$, то $h_{\lambda i}\rho_\lambda = h_{\lambda i}\tau_{\lambda\gamma} = h_{\gamma i} = h_{\gamma i}\rho_\gamma$. В любом случае $h_{\lambda i}\rho_\lambda = h_{\gamma i}\rho_\gamma$, $\lambda \in \Delta_k$, $i = 1, \ldots, t$. Поэтому для любых $\lambda, \mu \in \Delta_k$ выполняется равенство $h_{\lambda i}\rho_\lambda = h_{\mu i}\rho_\mu$. Следовательно, вложения ρ_λ можно продолжить до гомоморфизма $\rho : P_k \to \overline{P}_k$. Так как ограничение гомоморфизма ρ на $\overline{P}_k$ является тождественным отображением, то элементы $a\rho$ и $b\rho$ не сопряжены в $\overline{P}_k$. Согласно [4] группа $\overline{P}_k$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Поэтому существует гомоморфизм σ группы $\overline{P}_k$ на конечную группу такой, что $a\rho\sigma$ и $b\rho\sigma$ не сопряжены.

Таким образом, группы P_k финитно аппроксимируемы относительно сопряженности, и теорема 1.1 доказана.

Напомним еще одно понятие, восходящее к Г. Баумслагу [1]. Пусть U_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — нормальная подгруппа группы G_λ. Семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ называется *совместимым* , если для любых λ, $\mu \in \Lambda$ имеет место равенство $(U_\lambda \cap H_\lambda)\varphi_{\lambda\mu} = U_\mu \cap H_\mu$. Пусть $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — совместимое семейство. Символом G_U будем обозначать свободное произведение с одной объединенной подгруппой групп G_λ / U_λ $(\lambda \in \Lambda)$, склеивающие изоморфизмы которого индуцируются изоморфизмами $\varphi_{\lambda\mu}$. Очевидно, что естественные гомоморфизмы $G_\lambda \to G_\lambda / U_\lambda$ можно однозначно продолжить до гомоморфизма $G \to G_U$. Этот гомоморфизм будем обозначать через ρ_U.

Перейдем к доказательству теоремы 1.2. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и объединяемая подгруппа H конечна.

Если группа G финитно аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что $N \cap H = 1$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа $U_\lambda = G_\lambda \cap N$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_λ, $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены.

Пусть теперь U_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ, $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо и по теореме 1.1 группа G_U финитно аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм σ группы G_U на конечную группу, инъективный на подгруппе $H\rho_U$. Так как гомоморфизм ρ_U инъективен на H, то и гомоморфизм $\rho_U\sigma$ инъективен на H, т. е. его ядро M пересекается тривиально с любой подгруппой группы G, сопряженной с H. Из условия и теоремы Нейман (см., например, [5 с. 122]) следует, что группа M является свободным произведением финитно аппроксимируемых групп. Поскольку группа G является конечным расширением группы M, то группа G финитно аппроксимируема. Теорема доказана.

Из доказанных теорем непосредственно вытекают следствия 1.2.1 и 1.2.2. Докажем следствие 1.2.3. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и является расщепляющимся расширением конечной группы H_λ с помощью подгруппы K_λ группы G_λ. Обозначим через n порядок объединяемой подгруппы. Тогда $[G_\lambda : K_\lambda] = n$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть U_λ — пересечение всех подгрупп группы G_λ, сопряженных с K_λ. Тогда U_λ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ, тривиально пересекающая H_λ, и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены числом n^n. По теореме 1.2 группа G финитно аппроксимируема.

Докажем следствие 1.2.4. Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа, H_λ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ и индексы $[G_\lambda : H_\lambda]$ ограниченны. Пусть g — неединичный элемент группы G. Группа G/H является свободным произведением конечных групп и потому финитно аппроксимируема. Отсюда следует, что если $g \notin H$, то существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий g в элемент, отличный от 1. Пусть теперь $g \in H$. Поскольку группа H финитно аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа U конечного индекса s группы H, не содержащая g. Так как H имеет конечный индекс в конечно порожденной группе G_λ, группа H конечно порождена. Поэтому существует конечное число подгрупп индекса s группы H (см., например, [6, с. 252]). Пусть V — пересечение всех подгрупп группы H индекса s. Тогда V — характеристическая подгруппа группы H конечного индекса. Поскольку $H \trianglelefteq G$, имеем $V \trianglelefteq G$. Группа G/V является свободным произведением групп G_λ/V с одной объединенной подгруппой. Поскольку $[G_\lambda : V] = [G_\lambda : H][H : V]$, $[H : V] < \infty$ и индексы $[G_\lambda : H]$ ограничены в совокупности, порядки групп G_λ/V ограничены. По теореме 1.1 группа G/V финитно аппроксимируема. Так как $g \notin V$, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент g в элемент, отличный от 1. Следствие 1.2.4 доказано.

Для доказательства теоремы 1.3 нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная абелева группа. Если экспоненты групп G_λ ограничены в совокупности, то группа G финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть экспоненты групп G_λ ограничены числом m. Разложим группу G_λ в прямое произведение циклических подгрупп: $G_\lambda = A_1 \times \cdots \times A_r$. Пусть π_i — проекция группы G_λ на подгруппу A_i $(i = 1, \ldots, r)$. Для каждого элемента $h \in H_\lambda \setminus 1$ существует число $i_h \in \{1, \ldots, r\}$ такое, что $h\pi_{i_h} \neq 1$. Пусть

$$U_\lambda = \bigcap_{h \in H_\lambda \setminus 1} \ker \pi_{i_h}.$$

Тогда $H_\lambda \cap U_\lambda = 1$ и $[G_\lambda : U_\lambda] < m^{|H|}$. По теореме 1.2 группа G финитно аппроксимируема.

Докажем теорему 1.3. Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная абелева группа. Для каждого натурального числа i рассмотрим подгруппу K_i объединенной подгруппы H, порожденную множе-

ством
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda^i\cap H_\lambda).$$

Если группа G финитно аппроксимируема, то семейство $(K_i)_{i\in N}$ является фильтрацией, поскольку любая нормальная подгруппа индекса i группы G содержит K_i.

Докажем обратное утверждение. Пусть $(K_i)_{i\in N}$ — фильтрация. Из очевидной финитной аппроксимируемости группы G/H следует, что для любого элемента $g\in G\setminus H$ существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент g в элемент, отличный от 1. Рассмотрим теперь случай, когда $g\in H\setminus 1$. Поскольку семейство $(K_i)_{i\in N}$ является фильтрацией, то существует натуральное число n такое, что $g\notin K_n$. Для каждого $\lambda\in\Lambda$ рассмотрим подгруппу $U_\lambda=G_\lambda^nK_n$ группы G_λ. Легко проверить, что $U_\lambda\cap H=K_n$. Отсюда следует, что семейство $U=(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и $g\notin U_\lambda$ для любого $\lambda\in\Lambda$. Поэтому гомоморфизм $\rho_U: G\to G_U$ переводит элемент g в элемент, отличный от 1. Для завершения доказательства достаточно заметить, что группа G_U финитно аппроксимируема в силу предложения 1.1.

В заключение приведем доказательство следствия 1.3.1. Пусть G_λ для каждого $\lambda\in\Lambda$ — свободная абелева группа конечного ранга и F_λ — изолятор подгруппы H_λ в группе G_λ. Предположим, что существуют простое число p и натуральное s такие, что p^s для любого $\lambda\in\Lambda$ не делит $[F_\lambda:H_\lambda]$. Для любого натурального t и любого $\lambda\in\Lambda$
$$G_\lambda^{p^{s+t}}\cap H\subseteq H^{p^t}.$$
Поэтому
$$K_{p^{s+t}}\subseteq H^{p^t}$$
и, следовательно, семейство $(K_i)_{i\in N}$ является фильтрацией. По теореме 1.3 группа G финитно аппроксимируема.

Утверждение, обратное к доказанному, вообще говоря не верно. Тем не менее, если H — циклическая подгруппа, то из финитной аппроксимируемости группы G следует, что существует простое число p и целое s такие, что p^s для любого $\lambda\in\Lambda$ не делит $[F_\lambda:H_\lambda]$. В самом деле, предположим противное. Пусть $H=(h)$. Тогда для любого простого числа p и для любого натурального s существует $\lambda\in\Lambda$ такое, что $h\in G_\lambda^{p^s}$. Пусть N — нормальная подгруппа конечного индекса n группы G и
$$n=p_1^{s_1}\dots p_k^{s_k},$$
где p_i — простые числа. Обозначим
$$n_i=p_1^{s_1}\dots p_{i-1}^{s_{i-1}}p_{i+1}^{s_{i+1}}\dots p_k^{s_k},$$
где $i=1,\dots,k$. По предположению для каждого $i=1,\dots,k$ существует $\lambda\in\Lambda$ такое, что
$$h\in G_\lambda^{p_i^{s_i}}$$
и, следовательно, $h^{n_i}\in N$. Поскольку числа $n_1,n_2,\dots,n_k$ взаимно просты в совокупности, то $h\in N$, что противоречит финитной аппроксимируемости группы G.

§ 2. Аппроксимируемость конечными p-группами свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой

Пусть, как и выше, G — свободное произведение групп G_λ $(\lambda\in\Lambda)$ с одной объединенной подгруппой H. Следующая теорема является обобщением отмеченного выше результата Хигмена.

Теорема 2.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является конечной p-группой, причем порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует главный ряд $\mathfrak{R}_\lambda$ группы G_λ такой, что семейство $(\mathfrak{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо.*

Следствие 2.1.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является конечной p-группой и порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа H_λ лежит в центре группы G_λ или для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа H_λ является циклической, то группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

Следствие 2.1.2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ аппроксимируется конечными p-группами и подгруппа H_λ лежит в центре группы G_λ. Если все фактор-группы G_λ/H_λ являются конечными p-группами и их порядки ограничены в совокупности, то группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

Для формулировки дальнейших применений теоремы 2.1 нам потребуется понятие p-совместимого семейства подгрупп, предложенное Д. И. Молдаванским. Роль этого понятия для изучения аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений групп с объединенной подгруппой аналогична роли, которую играет понятие совместимого семейства подгрупп для изучения обычной финитной аппроксимируемости.

Пусть U_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — нормальная подгруппа группы G_λ и семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо. Семейство U будем называть *p-совместимым*, если для любого $\lambda \in \Lambda$ существует последовательность

$$U_\lambda = U_{\lambda,0} \leqslant U_{\lambda,1} \leqslant \cdots \leqslant U_{\lambda,j_\lambda} = G_\lambda$$

нормальных подгрупп группы G_λ, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $|U_{\lambda,i+1}/U_{\lambda,i}| = p$ $(\lambda \in \Lambda, i = 0, 1, \dots, j_\lambda - 1)$;

2) для любых λ, $\mu \in \Lambda$ изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu}$ отображает множество пересечений

$$\{U_{\lambda,0} \cap H_\lambda, U_{\lambda,1} \cap H_\lambda, \dots, U_{\lambda,j_\lambda} \cap H_\lambda\}$$

на множество пересечений

$$\{U_{\mu,0} \cap H_\mu, U_{\mu,1} \cap H_\mu, \dots, U_{\mu,j_\mu} \cap H_\mu\}.$$

Следующее утверждение является аналогом теоремы 1.2.

Теорема 2.2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ аппроксимируется конечными p-группами и объединяемая подгруппа конечна. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$, индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены в совокупности и семейство $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ p-совместимо.*

Как и для обычной финитной аппроксимируемости, в случае свободного произведения конечно порожденных абелевых групп можно получить более конкретные условия аппроксимируемости конечными p-группами.

Теорема 2.3. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная абелева группа, аппроксимируемая конечными p-группами. Предположим, что объединяемая подгруппа H конечна. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *группа G финитно аппроксимируема;*

2) *группа G аппроксимируется конечными p-группами;*

3) *существует целое положительное число n такое, что $G_\lambda^n \cap H_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$;*

4) *существует целое положительное число k такое, что $G_\lambda^{p^k} \cap H_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$.*

Теорема 2.4. *Пусть множество Λ содержит более одного элемента. Предположим, что G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная абелева группа, аппроксимируемая конечными p-группами, и $H_\lambda \neq G_\lambda$. Пусть, далее, K_{p^i} для каждого $i \in N$ — подгруппа объединяемой подгруппы H, порожденная множеством*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (G_\lambda^{p^i} \cap H).$$

Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда семейство $(K_{p^i})_{i\in N}$ является фильтрацией и для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа H_λ p'-изолирована в G_λ.

Для доказательства теорем нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 2.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ аппроксимируется конечными p-группами и объединяемая подгруппа H конечна. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, инъективный на подгруппе H.*

Это предложение легко доказать с использованием теоремы Нейман о строении подгрупп свободного произведения с объединенной подгруппой [5].

Предложение 2.2. *Пусть G_1, G_2 — конечные p-группы, $H_1 \leqslant G_1$, $H_2 \leqslant G_2$, $\varphi : H_1 \to H_2$ — изоморфизм, G — свободное произведение групп G_1 и G_2 с подгруппами H_1 и H_2, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ — главные ряды групп G_1 и G_2 такие, что семейство $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ совместимо. Тогда существует последовательность $Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \cdots \leqslant Z_r = G$ нормальных подгрупп группы G таких, что $|Z_{i+1}/Z_i| = p$ $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$ и ряд $\mathfrak{R}_\lambda$ получается из ряда*

$$G_\lambda \cap Z_0 \leqslant G_\lambda \cap Z_1 \leqslant \cdots \leqslant G_\lambda \cap Z_r$$

удалением повторяющихся членов $(\lambda = 1, 2)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$1 = U_{10} \leqslant \cdots \leqslant U_{1t} = G_1, \quad 1 = U_{20} \leqslant \cdots \leqslant U_{2t} = G_2$$

нормальных подгрупп групп G_1, G_2 такие, что ряды $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ получаются из этих последовательностей удалением повторяющихся членов и для любого $i = 1, \ldots, t$ имеет место равенство $(U_{1i} \cap H_1)\varphi = U_{2i} \cap H_2$. Тогда для $i = 0, \ldots, t$ семейство $U_i = (U_{1i}, U_{2i})$ p-совместимо и, следовательно, сомножители группы G_{U_i} обладают семейством совместимых рядов. Ввиду результата Хигмена группа G_{U_i} аппроксимируется конечными p-группами. Тогда существует нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G_{U_i}, тривиально пересекающая сомножители G_1/U_{1i} и G_2/U_{2i}. Обозначим ее через $\overline{X}_i$. Пусть X_i — полный прообраз подгруппы $\overline{X}_i$ относительно гомоморфизма $\rho_{U_i} : G \to G_{U_i}$. Тогда $X_i \cap G_1 = U_{1i}$, $X_i \cap G_2 = U_{2i}$. Обозначим $Y_t = X_t$, $Y_{t-1} = X_{t-1} \cap X_t, \ldots, Y_0 = X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_t$. Тогда $Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \cdots \leqslant Y_t$, $Y_i \cap G_1 = U_{1i}$, $Y_i \cap G_2 = U_{2i}$ $(i = 0, \ldots, t)$. Очевидно, что все факторы последовательности $Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \cdots \leqslant Y_t = G$ являются конечными p-группами. Уплотняя эти факторы, получим искомую последовательность $Z_0 \leqslant \cdots \leqslant Z_r = G$ нормальных подгрупп группы G. Предложение доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная p-группа и порядки групп G_λ ограничены в совокупности.

Пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами. Тогда существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, тривиально пересекающая подгруппу H. Последовательность подгрупп группы G, составленная из полных прообразов членов некоторого главного ряда группы G/N (относительно естественного гомоморфизма $G \to G/N$) высекает в каждой группе G_λ последовательность подгрупп $\mathfrak{T}_\lambda$. Удаляя из последовательности $\mathfrak{T}_\lambda$ повторяющиеся члены, получаем последовательность

$$G_\lambda \cap N = T_{\lambda,0} \leqslant T_{\lambda,1} \leqslant \cdots \leqslant G_\lambda.$$

Пусть

$$1 = S_{\lambda,0} \leqslant S_{\lambda,1} \leqslant \cdots \leqslant G_\lambda$$

— главный ряд группы G_λ, проходящий через $T_{\lambda,0}$ и $T_{\lambda,0} = S_{\lambda,r_\lambda}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_\lambda$ ряд

$$1 = S_{\lambda,0} \leqslant S_{\lambda,1} \leqslant \cdots \leqslant S_{\lambda,r_\lambda} = T_{\lambda,0} \leqslant T_{\lambda,1} \leqslant \cdots \leqslant G_\lambda.$$

Легко проверить, что семейство $(\mathfrak{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ p-совместимо.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует главный ряд $\mathfrak{R}_\lambda$ группы G_λ такой, что семейство $(\mathfrak{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо.

Если Λ — конечное множество, то финитную аппроксимируемость группы G легко доказать методом математической индукции с помощью предложений 2.1 и 2.2.

Пусть теперь Λ — произвольное множество. Повторяя доказательство теоремы 1.1, разобьем множество Λ на классы эквивалентности $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ и зафиксируем систему представителей этих классов $\delta_1, \ldots, \delta_m$. Пусть, как и выше, $\Omega = \{(\delta_k, \delta_l) \mid k, l = 1, \ldots, m\}$. Тогда

$$G = \langle P_1, \ldots, P_m; \Phi(\Omega)\rangle,$$

где

$$P_k = \langle G_\lambda(\lambda \in \Delta_k);\ \Phi(\Delta_k^2)\rangle \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Как отмечалось в доказательстве теоремы 1.1, для любых λ, $\mu \in \Delta_k$ существует изоморфизм $\tau_{\lambda\mu} : G_\lambda \to G_\mu$ такой, что $h_{\lambda i}\tau_{\lambda\mu} = h_{\mu i}$ $(i = 1, \ldots, t)$. Так как

$$h_{\lambda i}\tau_{\lambda\delta_k} = h_{\delta_k i} = h_{\mu i}\tau_{\mu\delta_k},$$

изоморфизмы $\tau_{\lambda\delta_k}$ $(\lambda \in \Delta_k)$ можно продолжить до гомоморфизма $\theta_k : P_k \to G_{\delta_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Так как $\tau_{\delta_k\delta_k}$ — тождественное отображение, θ_k действует тождественно на G_{δ_k}. Можно считать, что гомоморфизмы θ_k отображают группы P_k в группу

$$S = \langle G_{\delta_1}, \ldots, G_{\delta_m}; \Phi(\Omega)\rangle$$

и продолжить до гомоморфизма $\theta : G \to S$. По условию сомножители группы S обладают семейством совместимых рядов, и в силу рассмотренного выше частного случая группа S аппроксимируется конечными p-группами. Тогда существует гомоморфизм σ группы S на конечную p-группу, инъективный на $H\theta$. Так как θ инъективен на всех G_{δ_k}, то $\theta\sigma$ инъективен на H и группа G аппроксимируется конечными p-группами по предложению 2.1. Теорема доказана.

Докажем теорему 2.2. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ аппроксимируется конечными p-группами и объединяемая подгруппа конечна.

Пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами. Тогда существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, тривиально пересекающая подгруппу H. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ положим $U_\lambda = G_\lambda \cap N$. Тогда U_λ — нормальная подгруппа группы G_λ, тривиально пересекающая H_λ, индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены и семейство $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ p-совместимо.

Обратно, пусть U_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — нормальная подгруппа группы G_λ, $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$, индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены и семейство $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ p-совместимо. Тогда сомножители группы G_U имеют ограниченные порядки и обладают семейством совместимых рядов. По теореме 2.1 группа G_U аппроксимируется конечными p-группами и, следовательно, существует гомоморфизм σ группы G_U на конечную p-группу, инъективный на $H\rho_U$. Тогда гомоморфизм $\rho_U\sigma$ инъективен на H и группа G аппроксимируется конечными p-группами в силу предложения 2.1. Теорема доказана.

Аналогично с помощью следствия 2.1.1 легко доказывается следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ аппроксимируется конечными p-группами и объединяемая подгруппа H конечна. Пусть, далее, для любого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа H_λ содержится в центре группы G_λ или объединяемая подгруппа является циклической. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что G_λ/U_λ — конечные p-группы ограниченных порядков и $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$.*

Предложение 2.4. *Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечная абелева p-группа. Если экспоненты групп G_λ ограничены в совокупности, то группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

Доказательство этого предложения легко провести по аналогии с доказательством предложения 1.1 с помощью предложения 2.3.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.3. Пусть G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная абелева группа, аппроксимируемая конечными p-группами, и объединяемая подгруппа H конечна. Импликация $2 \Rightarrow 1$ очевидна. Импликация $1 \Rightarrow 3$ имеет место в силу теоремы 1.3.

Докажем импликацию $3 \Rightarrow 4$. Предположим, что существует целое положительное число n такое, что $G_\lambda^n \cap H_\lambda = 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть $n = p^k r$, где $(p, r) = 1$. Пусть $\tau(G_\lambda)$ — конечная часть группы G_λ. Тогда

$$G_\lambda^n \cap H_\lambda = (\tau(G_\lambda))^n \cap H_\lambda = (\tau(G_\lambda))^{p^k} \cap H_\lambda = G_\lambda^{p^k} \cap H_\lambda,$$

т. е. выполняется условие 4.

Остается проверить импликацию $4 \Rightarrow 2$. Пусть существует целое положительное число k такое, что $G_\lambda^{p^k} \cap H_\lambda = 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через U_λ подгруппу $G_\lambda^{p^k}$. Семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо, и по предложению 2.4 группа G_U аппроксимируется конечными p-группами. Пусть ρ — гомоморфизм группы G_U на конечную p-группу, инъективный на $H\rho_U$. Тогда гомоморфизм $\rho_U\rho$ инъективен на H и по предложению 2.1 группа G аппроксимируется конечными p-группами.

В заключение приведем доказательство теоремы 2.4. Пусть множество Λ содержит более одного элемента. Предположим, что G_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$ — конечно порожденная абелева группа, аппроксимируемая конечными p-группами, и $H_\lambda \neq G_\lambda$. Пусть K_{p^i} $(i \in N)$ — подгруппа группы H, порожденная множеством

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda^{p^i}\cap H).$$

Пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами. Тогда семейство $(K_{p^i})_{i\in N}$ является фильтрацией, поскольку любая нормальная подгруппа индекса p^i группы G содержит K_{p^i}. Покажем, что для любого $\lambda\in\Lambda$ подгруппа H_λ p'- изолирована в G_λ. Допустим противное, т. е. пусть существуют $\lambda\in\Lambda$ и простое число $q\neq p$ такие, что некоторый элемент x из G_λ имеет порядок q по модулю H_λ. Пусть $y\in G_\mu\setminus H_\mu$, $\mu\neq\lambda$. Если σ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную p-группу V, то $x\sigma\in H_\lambda\sigma$ и, значит, $x\sigma$ принадлежит центру группы V. Поэтому $(x^{-1}y^{-1}xy)\sigma = 1$, что противоречит аппроксимируемости группы G конечными p-группами.

Достаточность легко доказать с помощью предложения 2.4 по аналогии с доказательством теоремы 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
2. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
3. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N. 3. P. 703–706.
4. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNNextensions // J. Austral. Math. Soc. 1980. Ser. A29, N. 1. P. 35–51.
5. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
6. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Гостехиздат, 1953.

г. Иваново *Статья поступила 25 августа 1995 г.*