УДК 512.543

Д. Н. Азаров

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

1. Введение

Пусть A и B – группы, h и k – элементы групп A и B соответственно, имеющие один и тот же порядок, и

$$G = (A * B\ ;\ h = k)$$

– свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Г.Баумслаг [4] доказал, что группа G финитно аппроксимируема, если A и B – свободные группы или A и B – конечно порожденные нильпотентные группы. В данной работе доказывается ряд утверждений, обобщающих эти результаты.

Теорема. *Если группы A и B являются конечными расширениями групп, аппроксимируемых конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то группа G финитно аппроксимируема.*

Следствие 1. *Если группы A и B почти свободны, то группа G финитно аппроксимируема.*

Следствие 2. *Если группы A и B конечно порождены и почти нильпотентны, то группа G финитно аппроксимируема.*

Следствие 3. *Если группы A и B сверхразрешимы, то группа G финитно аппроксимируема.*

Доказательство теоремы приведено в п. 2. Здесь мы поясним следствия 1, 2, 3.

Хорошо известно, что свободная группа аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Поэтому следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы.

Докажем следствие 2. Пусть группы A и B конечно порождены и почти нильпотентны. Баумслаг [4] доказал, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечным объединением финитно аппроксимируемо. Поэтому если подгруппы H и K конечны, то группа G финитно аппроксимируема. Если же H и K бесконечны, то A и B – бесконечные конечно порожденные почти нильпотентные группы. Поскольку конечно порожденная нильпотентная группа почти вся без кручения (см., напр., [1, с.150]), то группы A и B являются конечными расширениями конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. В силу теоремы группа G финитно аппроксимируема.

Следствие 3 непосредственно вытекает из следствия 2, поскольку любая сверхразрешимая группа конечно порождена и почти нильпотентна (см., напр., [3, лемма 1.9]).

2. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 1. *Пусть F – конечное расширение конечной p-группы P, $v \in P$, $|v| = p^r$, $0 \leq k \leq r$. Тогда существует гомоморфизм τ группы F на некоторую группу такой, что $|v\tau| = p^k$.*

Доказательство. Если $k = 0$, то в качестве гомоморфизма τ можно взять естественный гомоморфизм $F \to F/P$. Пусть теперь $k > 0$. Поскольку $p^{k-1} < |v|$, то элемент

$$w = v^{p^{k-1}}$$

отличен от 1. Пусть $1 = P_0 \leq P_1 \leq \ldots \leq P_c = P$ – верхний центральный ряд группы P. Тогда $w \in P_i \backslash P_{i-1}$, где $1 \leq i \leq c$. Поскольку P_{i-1} – характеристическая подгруппа группы P и P инвариантна в F, то P_{i-1} инвариантна в F. Введем обозначения:

$$\overline{F} = F/P_{i-1},\ \overline{P} = P/P_{i-1},\ \overline{P}_i = P_i/P_{i-1},\ \overline{w} = wP_{i-1},\ \overline{v} = vP_{i-1}.$$

Так как P инвариантна в F, то $\overline{P}$ инвариантно в $\overline{F}$. Поскольку $\overline{P}_i$ совпадает с центром группы $\overline{P}$, то $\overline{P}_i$ характеристична в $\overline{P}$ и, следовательно, $\overline{P}_i$ инвариантна в $\overline{F}$. Поскольку $w \in P_i \backslash P_{i-1}$, то $\overline{w}$ – неединичный элемент конечной p-группы $\overline{P}_i$ и, следовательно, $|\overline{w}| = p^j$, $j \geq 1$. Тогда $\overline{w}^p \in M$ и $\overline{w} \notin M$, где

$$M = \{x \in \overline{P}_i |\ x^{p^{j-1}} = 1\}.$$

Поскольку $\overline{P}_i$ – абелева группа, то M – характеристическая подгруппа группы $\overline{P}_i$, которая, в свою очередь, инвариантна в $\overline{F}$. Следовательно, подгруппа M инвариантна в $\overline{F}$. Из определения элемента w следует, что

$$\overline{w}M = (\overline{v}M)^{p^{k-1}}.$$

Отсюда и из условий $\overline{w}^p \in M$, $\overline{w} \notin M$ следует, что

$$(\overline{v}M)^{p^k} = M, \quad (\overline{v}M)^{p^{k-1}} \neq M.$$

Отсюда и из того, что $\overline{v}M$ – элемент конечной p-группы $\overline{P}/M$, следует, что $|\overline{v}M| = p^k$. Пусть τ – произведение естественного гомоморфизма $F \to \overline{F}$ и естественного гомоморфизма $\overline{F} \to \overline{F}/M$. Тогда $v\tau = \overline{v}M$ и, следовательно, $|v\tau| = p^k$.

Предложение 2. *Пусть A – конечное расширение группы C, $t \in C$, $T = (t)$, $|T| = \infty$, p – простое число. Если для каждого неединичного элемента x подгруппы T существует гомоморфизм φ группы C на конечную p-группу такой, что $x\varphi \neq 1$, то для любого целого $k \geq 0$ существует гомоморфизм σ группы A на конечную группу такой, что $|t\sigma| = p^k$.*

Доказательство. Пусть k – неотрицательное целое число. Тогда элемент
$$x = t^{p^k}$$
отличен от 1 и, следовательно, существует гомоморфизм φ группы C на конечную p-группу, ядро которого не содержит элемент x. Тогда подгруппа
$$C_1 = \bigcap_{a \in A} a^{-1}\ (ker\,\varphi)\ a$$
является нормальной подгруппой конечного индекса группы A, причем C/C_1 – конечная p-группа. Введем обозначения: $F = A/C_1$, $P = C/C_1$, $v = tC_1$. Тогда F – конечное расширение конечной p-группы P и $v \in P$. Пусть $|v| = p^r$. Так как $x \notin ker\,\varphi$ и $C_1 \leq ker\,\varphi$, то $x \notin C_1$ и, следовательно,
$$v^{p^k} = t^{p^k}\ C_1 = xC_1 \neq C_1.$$
Поэтому $0 \leq k < r$. По предложению 1 существует гомоморфизм τ группы F на конечную группу такой, что $|v\tau| = p^k$. Пусть σ – произведение естественного гомоморфизма $A \to F$ и гомоморфизм τ. Тогда $t\sigma = v\tau$ и, следовательно, $|t\sigma| = p^k$.

Предложение 3. *Пусть A – конечное расширение группы C, $t \in C$, $T = (t)$, $|T| = \infty$. Если для каждого неединичного элемента $x \in T$ и для любого простого числа p существует гомоморфизм φ группы C на конечную p-группу такой, что $x\varphi \neq 1$, то для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм ρ группы A на конечную группу такой, что $|t\rho| = n$.*

Доказательство. Запишем число n в виде
$$n = p_1^{k_1}\ \dots\ p_l^{k_l},$$
где $p_1, \ \dots\ , p_l$ – различные простые числа, $k_i \geq 0$, $i = 1, \ \dots\ , l$. По предложению 2 для каждого $i = 1, \dots, l$ существует гомоморфизм σ_i группы A на конечную группу такой, что $|t\sigma_i| = p_i^{k_i}$. Пусть
$$N = \bigcap_{i=1}^{l} ker\,\sigma_i.$$

Тогда A/N – конечная группа. Пусть $\rho : A \to A/N$ – естественный гомоморфизм. Очевидно, что $|t\rho| = n$.

Предложение 4. *Пусть* A *– конечное расширение группы* C, $h \in A,\ H = (h),\ |H| = \infty,\ T = (t) = H \cap C,\ m = [H\ :\ T]$. *Если для любого* $x \in T \backslash 1$ *и для любого простого числа* p *существует гомоморфизм* φ *группы* C *на конечную* p*-группу такой, что* $x\varphi \neq 1$, *то для любого целого положительного числа* l, *делящегося на* m, *существует нормальная подгруппа* X *конечного индекса группы* A *такая, что* $|hX| = l$.

<u>Доказательство.</u> Запишем число l в виде $l = mn$. По предложению 3 существует гомоморфизм ρ группы A на конечную группу такой, что $|t\rho| = n$, т. е. $[T\ :\ T \cap \ker\ \rho] = n$. Пусть $X = \ker\ \rho \cap C$. Тогда X – нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Поскольку $T \leqslant C$, то $T \cap \ker\ \rho = T \cap C \cap \ker\ \rho = T \cap X$ и, следовательно, $[T : T \cap X] = n$. Поскольку $X \leqslant C$, то $H \cap X = H \cap C \cap X = T \cap X, [H : H \cap X] = [H : T \cap X] = [H : T]\ [T : T \cap X] = mn = l$, т. е. $|hX| = l$.

Пусть A, B – группы, $h \in A,\ k \in B,\ |h| = |k|,\ G = (A * B;\ h = k)$. Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая конструкция, восходящая к Г.Баумслагу. Пусть M и N – нормальные подгруппы групп A и B соответственно, причем $|hM| = |kN|$. Тогда можно рассмотреть свободное произведение с объединением

$$G_{MN} = (A/M * B/N;\ hM = kN)$$

и гомоморфизм

$$\rho_{MN} : G \to G_{MN},$$

продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$.

Предложение 5. *Пусть* A *и* B *– конечные расширения групп* C *и* D *соответственно,* $h \in A,\ k \in B,\ H = (h),\ K = (k),\ |H| = |K| = \infty$, $T = H \cap C,\ V = K \cap D$ *и выполняются следующие четыре условия:*

1. Группы A *и* B *финитно аппроксимируемы.*

2. Подгруппы H *и* K *финитно отделимы в группах* A *и* B *соответственно.*

3. Для любого $x \in T \setminus 1$ *и для любого простого числа* p *существует гомоморфизм* φ *группы* C *на конечную* p*-группу такой, что* $x\varphi \neq 1$.

4. Для любого $y \in V \setminus 1$ *и для любого простого числа* p *существует гомоморфизм* ψ *группы* D *на конечную* p*-группу такой, что* $y\psi \neq 1$.

Тогда группа $G = (A \star B;\ h = k)$ *финитно аппроксимируема.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $m = [H : T],\ n = [K : V]$. Из условий 3 и 4 и предложения 4 следует, что если целое положительное число l делится на m и n, то существуют нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B такие, что $|hX| = l = |kY|$.

Пусть g – нееденичный элемент группы G. Покажем, что существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий g в элемент, отличный от единицы. Рассмотрим несократимую запись элемента g

$$g = x_1 x_2 \dots x_r.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $r = 1$. Без потери общности можно считать, что $g \in A$. Поскольку группа A финитно аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа A_1 конечного индекса группы A такая, что $g \notin A_1$. Пусть $l = |hA_1|mn$. Тогда существуют нормальные подгруппы A_2 и N конечного индекса групп A и B соответственно такие, что $|hA_2| = l = |kN|$. Пусть $M = A_1 \cap A_2$. Тогда M – нормальная подгруппа конечного индекса группы A и $|hM| = l = |kN|$. Поэтому можно рассмотреть свободное произведение G_{MN} и гомоморфизм $\rho_{MN} \ : \ G \to G_{MN}$. Поскольку $g \in A \setminus A_1$ и $M \leqslant A_1$, то $g\rho_{MN} \neq 1$. Группа G_{MN} является свободным произведением конечных групп с объединением и, следовательно, финитно аппроксимируема [1]. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_{MN} на конечную группу такой, что $g\rho_{MN}\rho \neq 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $r > 1$. Пусть для определенности

$$x_1,\ x_3,\ \dots \in A \setminus H, \quad x_2,\ x_4,\ \dots \in B \setminus K.$$

Поскольку подгруппы H и K групп A и B финитно отделимы, то существуют нормальные подгруппы A_1 и B_1 конечного индекса групп A и B такие, что

$$x_1,\ x_3,\ \dots \notin HA_1, \quad x_2,\ x_4,\ \dots \notin KB_1.$$

Пусть $l = |hA_1|\ |kB_1|mn$. Тогда существуют нормальные подгруппы A_2 и B_2 конечного индекса групп A и B соответственно такие, что $|hA_2| = l = |kB_2|$. Пусть $M = A_1 \cap A_2,\ N = B_1 \cap B_2$. Тогда $|hM| = l = |kN|$ и

$$x_1,\ x_3,\ \dots \notin HM, \quad x_2,\ x_4,\ \dots \notin KN.$$

Поэтому $g\rho_{MN} \neq 1$. Так как группа G_{MN} финитно аппроксимируема, то существует гомоморфизм ρ группы G_{MN} на конечную группу такой, что $g\rho_{MN}\rho \neq 1$.

Предложение доказано.

А.И.Мальцев [2, теорема 2] доказал, что все подгруппы ограниченной разрешимой группы финитно отделимы. Поскольку конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является ограниченной, то из отмеченного результата Мальцева вытекает следующее утверждение.

Предложение 6. *Все подгруппы конечно порожденной нильпотентной группы финитно отделимы.*

Следующее утверждение легко устанавливается.

Предложение 7. *Пусть A – конечное расширение группы C. Если все циклические подгруппы группы C финитно отделимы, то и все циклические подгруппы группы A финитно отделимы.*

Предложение 8. *Пусть A – конечное расширение группы C, аппроксимируемой конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Тогда все циклические подгруппы группы A финитно отделимы.*

Доказательство. Ввиду предложения 7 достаточно лишь проверить, что все циклические подгруппы группы C финитно отделимы. Пусть $T = (t) \leqslant C$ и $x \in C \backslash T$. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы C на конечную группу такой, что $x\varphi \notin T\varphi$. Если $T = 1$, то существование такого гомоморфизма φ следует из очевидной финитной аппроксимируемости группы C. Пусть теперь $T \neq 1$. Тогда $|T| = \infty$, поскольку C, очевидно, является группой без кручения.

Пусть Ω – семейство нормальных подгрупп группы C, не содержащих t, фактор-группы по которым являются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Покажем, что существует $N \in \Omega$ такая, что $xN \notin TN/N$. Допустим противное. Тогда если $M,\ N \in \Omega$, то $L = M \cap N$ также принадлежит Ω и существуют целые числа m, n и l такие, что

$$xM = t^m M,\ xN = t^n N,\ xL = t^l L \tag{1}$$

Поскольку $L \leqslant M$ и $L \leqslant N$, то

$$xM = t^l M,\ xN = t^l N. \tag{2}$$

Из (1) и (2) заключаем, что

$$t^m M = t^l M,\ t^l N = t^n N.$$

Поскольку $|tM| = |tN| = \infty$, то $m = l = n$.

Таким образом, существует целое число s такое, что для любой подгруппы N из Ω $xN = t^s N$. Поскольку группа C аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то пересечение всех подгрупп из Ω тривиально. Следовательно, $x = t^s$, что невозможно.

Таким образом, существует подгруппа $N \in \Omega$ такая, что $xN \notin TN/N$. Так как C/N – конечно порожденная нильпотентная группа, $xN \in C/N$ и $TN/N \leqslant C/N$, то по предложению 6 существует гомоморфизм ψ группы C/N на конечную группу такой, что $(xN)\psi \notin (TN/N)\psi$. Пусть φ – произведение естественного гомоморфизма $C \to C/N$ и гомоморфизма ψ. Тогда $x\varphi = (xN)\psi$, $T\varphi = (TN/N)\psi$ и, следовательно, $x\varphi \notin T\varphi$.

Таким образом, все циклические подгруппы группы C финитно отделимы.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть A и B – конечные расширения групп C и D, аппроксимируемые конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, $h \in A$, $k \in B$, $H = (h)$, $K = (k)$, $|H| = |K|$. Покажем, что группа $G = (A \star B;\ h = k)$ финитно аппроксимируема. Если $|H| = |K| < \infty$, то финитная аппроксимируемость группы G следует из очевидной финитной аппроксимируемости сомножителей.

Пусть теперь $|H| = |K| = \infty$. Для доказательства финитной аппроксимируемости группы G нам остается проверить выполнение условий 1,2,3,4 предложения 5. Поскольку группы C и D аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то они аппроксимируются конечными p-группами для каждого простого числа p. Отсюда следует выполнение условий 3 и 4. Выполнение условий 1 и 2 обеспечивается предложением 8.

По предложению 5 группа G финитно аппроксимируема.

Список использованной литературы

1. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М., 1972. 288 с.
2. *Мальцев А.И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен.зап. Иван.гос.пед. ин-та. 1958. Т.18. № 5. 49 – 60.
3. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика: Периодический сборник иностранных статей. 1968. Т.12. № 1. С. 3 – 36.
4. *Baumslag G.* On the residual finitenees of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193 – 209.