Математические заметки

том 64 выпуск 1 июль 1998

УДК 512.543

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Д. Н. Азаров

Пусть G – свободное произведение свободных групп с циклическим объединением. В этой заметке доказывается критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами. Устанавливаются также другие аппроксимационные свойства группы G.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно, $G = (A * B; h = k)$ – свободное произведение групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Г. Баумслаг [1] доказал, что группа G финитно аппроксимируема. В работе Дж. Дайер [2] доказывается, что группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Браннер, Бернс и Солитер [3] доказали, что все конечно порожденные подгруппы этой группы финитно отделимы. В данной заметке рассматриваются другие аппроксимационные свойства группы G. В частности, устанавливается критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами.

Теорема 1. *Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно и $G = (A * B; h = k)$. Пусть m и n – наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно. Если одно из чисел m или n равно 1, то для любого простого числа p группа G аппроксимируется конечными p-группами. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда числа m и n являются степенями числа p.*

Заметим, что достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными p-группами было получено Гильденхьюзом [4]. Используя обозначения из теоремы 1, результат Гильденхьюза можно сформулировать следующим образом: если числа m и n являются степенями простого числа p, то группа G аппроксимируется конечными p-группами.

Пусть π – множество простых чисел. Напомним, что конечная группа называется *π-группой*, если множество всех простых делителей ее порядка содержится в множестве π.

Следующая теорема дополняет отмеченный выше результат Баумслага.

Теорема 2. *Пусть* A, B, h, k, m, n *такие же, как и в теореме* 1. *Если множество простых чисел* π *непусто и содержит все простые делители чисел* m *и* n, *то группа* G *аппроксимируется конечными разрешимыми* π*-группами.*

Поскольку конечная p-группа является нильпотентной, из аппроксимируемости данной группы конечными p-группами следует ее нильпотентная аппроксимируемость. Для рассматриваемой нами группы G имеет место и обратное утверждение.

Теорема 3. *Пусть* A, B, h, k *такие же, как и в теореме* 1. *Группа* G *аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируется конечными* p*-группами для подходящего простого числа* p.

Доказательства теорем 1, 2 и 3 приведены в п. 3. В п. 2 изложены некоторые предварительные утверждения.

2. Предварительные сведения. В работе Стиба [5, лемма 1] доказывается, что для любого неединичного элемента c свободной группы F и для любого положительного целого числа l существует гомоморфизм группы F на конечную группу, переводящий элемент c в элемент порядка l. Почти дословное повторение доказательства этой леммы позволяет получить следующее более общее утверждение.

Предложение 1. *Пусть группа* F *аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения,* c – *неединичный элемент группы* F. *Тогда для каждого положительного целого числа* l *существует гомоморфизм* φ *группы* F *на конечную нильпотентную группу* V *такой, что* $|c\varphi| = l$. *Более того, если некоторое непустое множество простых чисел* π *содержит все простые делители числа* l, *то можно считать, что группа* V *является конечной нильпотентной* π*-группой.*

Пусть F – произвольная группа, π – непустое множество простых чисел. Подгруппа H группы F называется π*-отделимой*, если для любого элемента $x \in F \setminus H$ найдутся число $p \in \pi$ и гомоморфизм φ группы F на конечную p-группу, отделяющий x от H, т.е. такой, что $x\varphi \notin H\varphi$.

Предложение 2. *Пусть* F – *свободная группа,* H – *неединичная циклическая подгруппа группы* F *с порождающим элементом* h, m – *наибольшее положительное число такое, что уравнение* $x^m = h$ *разрешимо в группе* F. *Пусть* π – *непустое множество простых чисел. Подгруппа* H *является* π*-отделимой тогда и только тогда, когда множество* π *содержит все простые делители числа* m.

Доказательство. Необходимо доказать только достаточность. Пусть множество простых чисел π содержит все простые делители числа m. Покажем, что для произвольного элемента $x \in F \setminus H$ существует простое число $p \in \pi$ и гомоморфизм группы F на конечную p-группу, отделяющий x от H.

Пусть $G_F(H)$ – централизатор подгрупны H группы F. Возможны следующие случаи:

1) $x \notin G_F(H)$;
2) $x \in G_F(H) \setminus H$.

В случае 1) коммутатор $[x, h]$ отличен от 1. Зафиксируем число $p \in \pi$. Поскольку свободная группа F аппроксимируется конечными p-группами, существует гомоморфизм группы F на конечную p-группу, ядро которого не содержит $[x, h]$. Очевидно, что этот гомоморфизм отделяет x от H.

В случае 2), очевидно, подгруппа $G_F(H)$ является циклической. Пусть c – ее порождающий элемент. Тогда $h = c^m$, $x = c^k$, где k – целое число. Поскольку $x \notin H$, то k не делится на m. Поэтому число k не делится на некоторый делитель числа m вида p^s, где p – простое число, s – целое положительное число. По предложению 1 существует гомоморфизм φ группы F на конечную p-группу такой, что $|c\varphi| = p^s$. Так как m делится на p^s и k не делится на p^s, то $h\varphi = 1$ и $x\varphi \neq 1$. Таким образом, $x\varphi \notin H\varphi$, т.е. элемент x отделяется от подгруппы H некоторым гомоморфизмом группы F на конечную p-группу. Причем, поскольку p делит m и множество π содержит все простые делители числа m, то $p \in \pi$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть π – непустое множество простых чисел, $\mathscr{P}$ – класс конечных разрешимых π-групп. Пусть группа F аппроксимируется $\mathscr{P}$-группами и $\overline{F}$ – расширение группы F с помощью $\mathscr{P}$-группы. Тогда группа $\overline{F}$ аппроксимируется $\mathscr{P}$-группами.*

Доказательство. Легко проверить, что если $1 \leqslant K \leqslant H \leqslant G$ – произвольный субнормальный ряд и $G/H, H/K \in \mathscr{P}$, то существует нормальная подгруппа L группы G такая, что $L \leqslant K$ и $G/L \in \mathscr{P}$. (В качестве подгруппы L можно взять пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с K.) По лемме 1.5 из [6] группа $\overline{F}$ аппроксимируется $\mathscr{P}$-группами.

Пусть A и B – произвольные группы, h и k – элементы групп A и B соответственно, причем порядки этих элементов равны. Пусть, далее, $G = (A * B; h = k)$ – свободное произведение этих групп с циклическим объединением. Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая конструкция, восходящая к Баумслагу. Пусть M и N – нормальные подгруппы групп A и B соответственно, причем порядки элементов h и k по модулю этих подгрупп совпадают. Тогда можно рассмотреть свободное произведение с объединением $G_{MN} = (A/M * B/N; hM = kN)$ и гомоморфизм $\rho_{MN}\colon G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$.

Предложение 4. *Пусть группы A и B аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, $H = (h)$ и $K = (k)$ – бесконечные циклические подгруппы групп A и B соответственно. Пусть, далее, π – непустое множество простых чисел. Если подгруппы H и K π-отделимы в группах A и B соответственно, то группа $G = (A * B; h = k)$ аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами.*

Доказательство. Заметим, что сомножители A и B аппроксимируются конечными p-группами для любого простого числа p, поскольку эти группы по условию аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.

Пусть g – неединичный элемент группы G. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы G на конечную разрешимую π-группу такой, что $g\varphi \neq 1$. Рассмотрим несократимую запись элемента g:

$$g = x_1 x_2 \cdots x_r.$$

Предположим сначала, что $r = 1$. Тогда без потери общности можно считать, что $g \in A$. Зафиксируем число $p \in \pi$. Так как группа A аппроксимируется конечными

p-группами, существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент g. Поскольку группа B аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения и порядок элемента hM группы A/M является степенью числа p, то по предложению 1 существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы B такая, что $|kN| = |hM|$. Группа G_{MN} является свободным произведением конечных p-групп с циклическим объединением и, следовательно, аппроксимируется конечными p-группами в силу теоремы Хигмена [7]. Поскольку $g\rho_{MN} \neq 1$, существует гомоморфизм ρ группы G_{MN} на конечную p-группу такой, что $g\rho_{MN}\rho \neq 1$.

Предположим теперь, что $r > 1$. Пусть для определенности

$$x_1, x_3, \ldots \in A \setminus H, \qquad x_2, x_4, \ldots \in B \setminus K.$$

Поскольку подгруппы H и K π-отделимы в сомножителях A и B соответственно, то существуют нормальные подгруппы A_1 и B_1 групп A и B такие, что A/A_1 и B/B_1 – конечные нильпотентные π-группы и

$$x_1, x_3, \ldots \notin HA_1, \qquad x_2, x_4, \ldots \notin KB_1. \tag{1}$$

Пусть l – наименьшее общее кратное чисел $|hA_1|$ и $|kB_1|$. Так как все простые делители числа l принадлежат множеству π, то по предложению 1 существуют нормальные подгруппы A_2 и B_2 групп A и B соответственно такие, что A/A_2 и B/B_2 – конечные нильпотентные π-группы и $|hA_2| = l = |kB_2|$.

Пусть $M = A_1 \cap A_2, N = B_1 \cap B_2$. Тогда $|hM| = l = |kn|$. Теперь можно рассмотреть свободное произведение с объединением

$$\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{h} = \overline{k}), \qquad \text{где} \ \ \overline{A} = A/M, \ \ \overline{B} = B/N, \ \ \overline{h} = hM, \ \ \overline{k} = kN, \ \ \overline{G} = G_{MN}.$$

Из (1) следует, что

$$x_1, x_3, \ldots \notin HM, \qquad x_2, x_4, \ldots \notin KN.$$

Поэтому элемент $g\rho_{MN}$ имеет в группе $\overline{G}$ несократимую запись длины $r > 1$ и, следовательно, отличен от 1.

Покажем, что группа $\overline{G}$ аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами. Заметим, что $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – конечные нильпотентные π-группы. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ – множество всех простых делителей их порядков. Обозначим через U_i и V_i подгруппы групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно, порожденные теми силовскими подгруппами этих групп, порядки которых не делятся на p_i, $i = 1, \ldots, s$. Поскольку порядки $\overline{h}$ и $\overline{k}$ по модулю подгрупп U_i и V_i совпадают, можно рассмотреть свободное произведение с объединением $\overline{G}_i = \overline{G}_{U_i V_i}$ и гомоморфизм $\rho_i = \rho_{u_i v_i} \colon \overline{G} \to \overline{G}_i$. По теореме Хигмена [7] группа $\overline{G}_i$ аппроксимируется конечными p_i-группами, поэтому существует гомоморфизм σ_i группы $\overline{G}_i$ на конечную p_i-группу, инъективный на сомножителях $\overline{A}/U_i$ и $\overline{B}/V_i$. Пусть

$$F = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \rho_i \sigma_i.$$

Тогда

$$\overline{A} \cap F = \bigcap_{i=1}^{s} (\overline{A} \cap \operatorname{Ker} \rho_i \sigma_i) = \bigcap_{i=1}^{s} U_i = 1, \qquad \overline{B} \cap F = \bigcap_{i=1}^{s} (\overline{B} \cap \operatorname{Ker} \rho_i \sigma_i) = \bigcap_{i=1}^{s} V_i = 1.$$

По теореме Х. Нейман (см., например, [8, с. 122]) подгруппа F группы $\overline{G}$ является свободной. Легко заметить, что $\overline{G}/F$ – конечная нильпотентная π-группа. Так как свободная группа F аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами, то по предложению 3 группа $\overline{G}$ также обладает этим свойством.

Поскольку элемент $g\rho_{MN}$ группы $\overline{G}$ отличен от 1, существует гомоморфизм ρ группы $\overline{G}$ на конечную разрешимую π-группу такой, что $g\rho_{MN}\rho \neq 1$.

3. Доказательства теорем. Теорема 2 непосредственно вытекает из предложений 2 и 4.

Доказательство теоремы 1. Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно, $G = (A * B; h = k)$. Пусть m и n – наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда одно из чисел m или n равно 1. Пусть для определенности $m = 1$. Обозначим через b элемент группы B такой, что $b^n = k$. Тогда группу G можно разложить в свободное произведение вида

$$G = (C * B; t = b), \qquad \text{где} \quad C = (A, t; h = t^n).$$

Баумслаг [9] доказал, что если элемент f свободной группы F порождает свой централизатор в этой группе, то группа $L = (F, r; f = r^k)$ аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.

Поскольку $m = 1$, элемент h порождает свой централизатор в группе A. Поэтому в силу отмеченного выше результата Баумслага группа C аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Свободная группа B также обладает этим свойством.

Пусть p – простое число. Хорошо известно, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируется конечными p-группами. Поэтому группы C и B аппроксимируются конечными p-группами.

Заметим, что подгруппа (t) группы C совпадает со своим централизатором. Поэтому если $x \in C \setminus (t)$, то $[x, t] \neq 1$. Поскольку группа C аппроксимируется конечными p-группами, существует гомоморфизм группы C на конечную p-группу, ядро которого не содержит коммутатор $[x, t]$. Этот гомоморфизм отделяет x от (t). Следовательно, подгруппа (t) группы C p-отделима.

Очевидно, что подгруппа (b) группы B совпадает со своим централизатором. Как и выше, легко убедиться, что подгруппа (b) p-отделима.

Таким образом, свободные множители C и B группы G аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения и объединяемые подгруппы (t) и (b) p-отделимы в соответствующих сомножителях. По предложению 4 группа G аппроксимируется конечными p-группами.

Рассмотрим теперь случай, когда числа m и n отличны от 1. Если числа m и n являются степенями простого числа p, то по теореме 2 группа G аппроксимируется конечными p-группами. Пусть теперь одно из этих чисел, скажем m, не является степенью простого числа p. Обозначим через q простой делитель числа m, отличный от p. Тогда существует элемент a группы A такой, что $a^q = h$. Обозначим через b элемент группы B, для которого $b^n = k$. При любом гомоморфизме группы G на конечную p-группу коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Поскольку этот коммутатор отличен от 1, группа G не аппроксимируется конечными p-группами. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Сохраним обозначения из теоремы 1. Очевидно, что группу G можно разложить в свободное произведение вида $G = (A_1 * B_1; h = k) * F$, где A_1, B_1, F – свободные группы, причем A_1 и B_1 конечно порождены.

Предположим, что группа G аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда группа $D = (A_1 * B_1; h = k)$ аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами, которые, в свою очередь, финитно аппроксимируемы. Поэтому группа D аппроксимируется конечными нильпотентными группами.

Обозначим через m и n наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A_1 и B_1 соответственно.

Покажем, что группа D аппроксимируется конечными p-группами для подходящего простого числа p. Допустим противное. Тогда по теореме 1 числа m и n отличны от 1 и не являются степенями одного и того же простого числа. Иными словами, найдутся различные простые числа p и q, делящие числа m и n соответственно. Пусть a и b – элементы групп A_1 и B_1 такие, что $a^p = h$, $b^q = k$. Тогда при любом гомоморфизме группы D на конечную нильпотентную группу отличный от 1 коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Это противоречит доказанной выше аппроксимируемости группы D конечными нильпотентными группами.

Таким образом, группа D аппроксимируется конечными p-группами для подходящего простого числа p. Поскольку $G = D * F$, где группа F свободна, то группа G также аппроксимируется конечными p-группами. Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Д.И. Молдаванскому за ряд ценных замечаний и советов при написании этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
[2] Dyer J. Separating conjugates in amalgamated free products and HNN-extensions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. V. 29. №1. P. 35–51.
[3] Brunner A., Burns R., Solitar D. The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation // Contemp. Math. 1984. V. 33. P. 90–115.
[4] Gildenhuys D. One-relator groups that are residually of prime power order // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1975. V. 19. P. 385–409.
[5] Stebe P. Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.
[6] Gruenberg K.W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
[7] Higman G. Amalgams of p-group // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
[8] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
[9] Baumslag G. On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. №5. P. 491–506.

Ивановский государственный университет

Поступило
12.07.96