ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 512.543

Азаров Дмитрий Николаевич

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП С ОДНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
профессор Д. И. Молдаванский

Иваново — 2000

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Пусть $\mathcal{K}$ – абстрактный класс групп. Говорят, что группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, если для любого элемента g группы G, отличного от 1, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из $\mathcal{K}$ такой, что $g\varphi \neq 1$. Группы, аппроксимируемые классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп и классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп называются соответственно финитно аппроксимируемыми и аппроксимируемыми конечными p-группами.

Класс всех групп, аппроксимируемых классом $\mathcal{K}$, будем обозначать через ${}_R\mathcal{K}$. В частности, через ${}_R\mathcal{F}$ и ${}_R\mathcal{F}_p$ будем обозначать класс всех финитно аппроксимируемых групп и класс всех групп, аппроксимируемых конечными p-группами.

К числу наиболее важных аппроксимационных свойств группы, наряду с аппроксимируемостью классом $\mathcal{K}$, относится также и аппроксимируемость классом $\mathcal{K}$ относительно сопряженности. Говорят, что группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ относительно сопряженности, если для любых не сопряженных между собой элементов x и y группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу B из $\mathcal{K}$ такой, что элементы $x\varphi$ и $y\varphi$ не сопряжены в группе B. Группа, аппроксимируемая относительно сопряженности классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп называется группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Хорошо известно, что свободная группа финитно аппроксимируема. Более того, свободная группа аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ относительно сопряженности для любого простого числа p (см. напр. [5] с. 47).

Многие апппроксимационные свойства групп наследуются свободными произведениями групп. К числу таких свойств относятся финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, а также финитная аппроксимируемость относительно сопряженности (см. напр. [21],[16]).

Наряду с изучением аппроксимационных свойств обычных свободных произведений, на протяжении последних четырех десятилетий велись достаточно интенсивные исследования аппроксимационных свойств свободных произведений групп с объединенной подгруппой. Эти исследования в немалой степени стимулировались тем обстоятельством, что свободное произведение с объединением двух групп, обладающих данным аппроксимационным свойством, может, вообще говоря, и не обладать этим свойством даже в случае, когда данное свойство наследуется обычными свободными произведениями групп.

Пусть

$$G = (A * B;\ H, K, \varphi)$$

– свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Наиболее продуктивным направлением изучения аппроксимационных свойств группы G оказалось исследование этих свойств при определенных ограничениях, накладываемых на свободные сомножители A и B, объединяемые подгруппы H и K и изоморфизм φ. Из нескольких десятков результатов, относящихся к этому направлению и доказанных в разное время, мы здесь приводим только некоторые утверждения, наиболее значимые для дальнейшего изложения.

В 1963г. Г.Баумслаг [9] доказал, что $G \in {}_R\mathcal{F}$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. $A, B \in {}_R\mathcal{F}$ и $|H| < \infty$.

2. A, B – конечно порожденные нильпотентные группы и H – циклическая.

3. A, B – свободные группы и H – циклическая.

В 1980г. Д.Дайер [14] доказала, что финитная аппроксимируемость относительно сопряженности групп A и B наследуется группой G в случае, когда $|H| < \infty$. В той же работе устанавливается, что условия 2 и 3 достаточны для финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы G.

В [13] Д.Дайер установила, что $G \in {}_R\mathcal{F}$, если A, B – почти полициклические группы и H – циклическая.

Критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с произвольной объединенной подгруппой найден в [19].

В 1964 г. Хигмен [17] получил критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечных p-групп с объединенной подгруппой. В [15] получено достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением.

Различные аппроксимационные свойства свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой исследовались также в [2], [10]-[12], [21]-[24].

В работе Ширвани [20] рассматривается свободное произведение любого (возможно, бесконечного) числа групп с одной объединенной подгруппой. Для такого свободного произведения доказывается критерий финитной аппроксимируемости при условии, что свободные сомножители удовлетворяют нетривиальному тождеству.

Многие из перечисленных выше результатов, относящихся к свободному произведению двух групп с объединенной подгруппой, могут быть без труда распространены на случай древесного произведения конечного числа групп. Тем не менее, вопросы, касающиеся аппроксимационных свойств древесного произведения любого числа групп, изучены в значительно меньшей мере по сравнению с аналогичными вопросами для случая свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Нам представляется весьма актуальным изучение различных аппроксимационных свойств свободного произведения любого числа групп с одной объединенной подгруппой, как наиболее важного частного случая древесного произведения групп.

Цель работы и ее научная новизна

Пусть $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ – некоторое семейство групп. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ H_λ – подгруппа группы G_λ. Предположим также, что для каждой пары $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu} : H_\lambda \to H_\mu$, причем для любых $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ выполняются следующие условия: $\varphi_{\lambda\lambda} = id_{H_\lambda}$, $\varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}$, $\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}$. Пусть

$$G = (G_\lambda(\lambda \in \Lambda);\ h\varphi_{\lambda\mu} = h\ (h \in H_\lambda,\ \lambda, \mu \in \Lambda))$$

– группа, порождаемая элементами всех групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ и определяемая определяющими соотношениями этих групп, а также всевозможными соотношениями вида: $h\varphi_{\lambda\mu} = h$, где $h \in H_\lambda,\ \lambda, \mu \in \Lambda$. Хорошо известно, что каждая группа G_λ естественным образом вложима в группу G, и если отождествить G_λ с соответствующей подгруппой группы G, то для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$

$$G_\lambda \cap G_\mu = H_\lambda = H_\mu.$$

Обозначим через H подгруппу группы G, совпадающую с каждой из этих подгрупп H_λ. Будем говорить, что група G является свободным произведением групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной подгруппой H (и считать, когда это удобно, группы G_λ подгруппами группы G).

Целью данной работы является изучение некоторых аппроксимационных свойств группы G и, в первую очередь, аппроксимируемости группы G некоторыми классами конечных групп. Наряду с финитной аппроксимируемостью, а также аппроксимируемостью конечными p-группами в работе рассматривается и более универсальное свойство – аппроксимируемость классом $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ всех конечных $\mathcal{P}$-групп, где $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел. Кроме того, исследуется нильпотентная аппроксимируемость группы G и финитная аппроксимируемость относительно сопряженности. Все перечисленные аппроксимационные свойства группы G исследуются при определенных ограничениях, накладываемых на свободные сомножители G_λ и объединяемую подгруппу H.

Ряд результатов данной работы представляет собой обобщения некоторых из перечисленных выше теорем Г.Баумслага, Д.Дайер и Хигмена, относящихся к случаю свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, на случай свободного произведения G любого (возможно, бесконечного) числа групп G_λ с одной объединенной подгруппой H. Вместе с тем, многие из доказанных в работе результатов, касающихся аппроксимационных свойств группы G, являются новыми даже для случая свободного произведения двух групп с объединанной подгруппой.

Краткое описание работы

Пусть, как и выше, G – свободное произведение групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной подгруппой H.

В первой главе работы предполагается, что H – конечная подгруппа. При этом ограничении для группы G получены критерии финитной аппроксимируемости, аппроксимируемости конечными p-группами, а также критерий финитной аппроксимируемости относительно сопряженности.

Одна из приведенных выше теорем Г.Баумслага утверждает, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с объединенной конечной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой. Аналогичный результат получен Д.Дайер для финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Следующие две теоремы, доказанные в первой главе, обобщают эти результаты:

Пусть $|H| < \infty$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ, тривиально *пересекающая* H_λ, *и такая, что индексы* $[G_\lambda : U_\lambda]$ *ограничены в совокупности.*

Пусть $|H| < \infty$ *и все* G_λ *финитно аппроксимируемы относительно сопряженности. Группа* G *финитно аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *существует нормальная подгруппа* U_λ *конечного индекса группы* G_λ *такая, что индексы* $[G_\lambda : U_\lambda]$ *ограничены и для любых элементов* $h, k \in H$, *не сопряженных в* G, *элементы* hU_λ *и* kU_λ *не сопряжены в* G_λ/U_λ *при любом* $\lambda \in \Lambda$.

Как отмечалось выше Хигменом получен критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечных p-групп с объединенной подгруппой. В первой главе доказывается критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения G любого числа групп $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$ с одной объединенной конечной подгруппой H. В основе этого результата лежит следующая конструкция, предложенная Д.И.Молдаванским:

Пусть p-простое число. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ U_λ – нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G_λ. Семейство $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ называется p-совместимым, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует последовательность

$$U_\lambda = U_{\lambda o} < U_{\lambda 1} < \cdots < U_{\lambda j_\lambda} = G_\lambda$$

нормальных подгрупп группы G_λ с факторами порядка p такая, что для любых $\mu, \nu \in \Lambda$ изоморфизм $\varphi_{\mu\nu}$ переводит множество пересечений

$$U_{\mu o} \cap H_\mu, \cdots, U_{\mu j_\mu} \cap H_\mu$$

на множество пересечений

$$U_{\nu o} \cap H_\nu, \cdots, U_{\nu j_\nu} \cap H_\nu.$$

Упомянутый выше критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами имеет следующий вид:

Пусть $|H| < \infty$ *и для каждого* $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$. *Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *существует нормальная подгруппа* U_λ *конечного индекса группы* G_λ *такая, что* $U_\lambda \cap H = 1$, *индексы* $[G_\lambda : U_\lambda]$ *ограничены и семейство* $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *p-совместимо.*

Во второй главе на свободные сомножители G_λ и объединяемую подгруппу H накладываются следующие ограничения:

(а) Все G_λ – конечно порожденные нильпотентные группы, причем полициклические ранги групп G_λ и порядки их конечных частей ограничены в совокупности.

(б) Объединяемая подгруппа H является бесконечной циклической и строго содержится во всех свободных сомножителях G_λ, причем $|\Lambda| \geq 2$.

При этих ограничениях во второй главе получены критерий аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{F}_\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел, а также критерий аппроксимируемости группы G конечными нильпотентными группами. Формулировкам этих результатов предпошлем некоторые предварительные замечания и обозначения.

Пусть выполняются условия (а) и (б). Для каждого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через n_λ индекс подгруппы H в своем изоляторе в группе G_λ. Хорошо известно, что n_λ – конечное число (см. напр. [8], лемма 4.5). Обозначим через Q_G подгруппу аддитивной группы рациональных чисел, порождаемую всеми дробями вида $1/n_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$. Пусть Π – множество всех простых чисел p таких, что группа p-ичных дробей Q_p содержится в Q_G. В случае, когда множество Π не пусто, через m будем обозначать порядок подгруппы H по модулю пересечения всех нормальных подгрупп конечного Π-индекса группы G. Как показано во второй главе, m – конечное число.

Далее, через h обозначим один из порождающих элементов подгруппы H. Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел. Через $Q_\mathcal{P}$ будем обозначать группу $\mathcal{P}$-ичных дробей.

Сформулируем теперь критерий аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами, являющийся центральным результатом второй главы.

Пусть выполняются огранчиения (а) и (б). Если $\Pi \neq \oslash$, *то группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда* $Q_G < Q_\mathcal{P}$ *и для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *нормальное замыкание элемента* h^m *в группе* G_λ *является группой без* Π*-кручения. Если же* $\Pi = \oslash$, *то группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда* $Q_G < Q_\mathcal{P}$.

В частном случае, когда $\mathcal{P}$ – множество всех простых чисел, данный результат представляет собой критерий финитной аппроксимируемости группы G и обобщает приведенную выше теорему Г.Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклической объединенной подгруппой.

В другом частном случае, когда $\mathcal{P} = \{p\}$ – одноэлементное множество, сформулированный результат позволяет доказать следующий простой критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами:

Пусть выполняются условия (а) и (б). И пусть p – простое число. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда числа n_λ ограничены и являются степенями числа p.

Далее, через F_N будем обозначать класс всех конечных нильпотентных групп. Во второй главе доказан следующий критерий аппроксимируемости группы G классом F_N:

Пусть выполняются ограничения (а) и (б). Тогда следующие три условия равносильны:

1. $G \in {}_R\mathcal{F}_N$.

2. Существует простое число p такое, что все n_λ являются степенями числа p и подгруппа, высекаемая в H пересечением всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G, лежит в центре группы G.

3. Существуют простые числа p и q такие, что $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$.

В третьей главе предполагается, что все G_λ – свободные группы и $H = (h)$ – неединичная циклическая подгруппа. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через n_λ обозначим наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^{n_\lambda} = h$ разрешимо в группе G_λ.

Как доказал Г.Баумслаг, свободное произведение двух свободных групп с циклической объединенной подгруппой финитно аппроксимируемо. Следующее утверждение, доказанное в третьей главе, в некоторой степени дополняет этот результат Г.Баумслага:

Пусть $|\Lambda| < \infty$, все G_λ – свободные группы и H – неединичная циклическая подгруппа. Тогда группа G аппроксимируется конечными разрешимыми группами. Более того, группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами, где $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел, содержащее все простые делители произведения всех чисел n_λ $(\lambda \in \Lambda)$.

Это утверждение можно рассматривать и как результат, обобщающий и дополняющий следующую теорему, доказанную Гилденхъюзом [15]:

Пусть F – свободное произведение свободных групп A и B с бесконечной циклической объединенной подгруппой $H = (h)$, m и n – наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = h$ разрешимы в группах A и B соответственно. Если числа

m и n являются степенями одного и того же простого числа p, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Найденное Гилденхъюзом достаточное условие аппроксимируемости группы F конечными p-группами не является необходимым. Это вытекает из следующего критерия аппроксимируемости группы G конечными p-группами и нильпотентными группами, доказанного в третьей главе:

Пусть все G_λ – свободные группы, H – неединичная циклическая группа и Λ – конечное множество. Тогда

1. Если все n_λ, за исключением, быть может, одного, равны 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p.

2. Если же среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда все n_λ являются степенями числа p.

3. Группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для некоторого простого числа p.

Сформулируем теперь центральные результаты третьей главы, доказанные для свободного произведения любого числа свободных групп с циклическим объединением. Через $\gamma_n(G_\lambda)$, как обычно, будем обозначать n-й член нижнего центрального ряда группы G_λ.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная группа конечного ранга и ранги групп G_λ ограничены в совокупности. И пусть H – неединичная циклическая подгруппа. Тогда

1. Если все n_λ, за исключением, быть может, одного, равны 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение

$$x^{p^s} = h\gamma_n(G_\lambda) \qquad (*)$$

не разрешимо в группе $G_\lambda/\gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$.

2. Если среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда все n_λ являются степенями числа p и существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение $(*)$ не разрешимо в группе $G_\lambda/\gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$.

3. Если хотя бы одна из групп G_λ не циклическая, то $G \in {}_R\mathcal{F}_N$ тогда и только тогда, когда $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для некоторого простого числа p.

4. Пусть все G_λ – циклические и хотя бы для двух $\lambda, \mu \in \Lambda$ $G_\lambda \neq H \neq G_\mu$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_N$ тогда и только тогда, когда все n_λ являются степенями одного и того же простого числа.

В четвертой главе получен следующий критерий аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ группы G при условии, что все G_λ – абелевы группы:

Пусть все G_λ – абелевы группы, $|\Lambda| \geq 2$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \neq H$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и

$$\bigcap_{n \in \overline{\mathcal{P}}} H_n = 1,$$

где $\overline{\mathcal{P}}$ – множество всех целых положительных $\mathcal{P}$-чисел, H_n – подгруппа группы H, порожденная множеством

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda^n \cap H).$$

Кроме того, в четвертой главе доказывается следующий результат:

Пусть Λ – конечное множество и H – циклическая подгруппа. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1. Все G_λ являются конечными расширениями ограниченных разрешимых групп.

2. Все G_λ являются конечными расширениями групп, аппроксимируемых ограниченными разрешимыми группами без кручения.

Понятие ограниченной разрешимой группы введено А.И.Мальцевым [7]. Так как любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой, то приведенное утверждение обобщает и дополняет отмеченный выше результат Д.Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух почти полициклических групп с циклической объединенной подгруппой.

Здесь мы привели только некоторые результаты, доказанные в работе. Полные списки этих результатов, а также необходимые комментарии приводятся в начале каждой главы.

В работе используются некоторые хорошо известные свойства свободных произведений групп с объединенной подгруппой, связанные с понятием несократимой записи элемента (см. напр. [18], [6] с. 207-236). Ссылки на другие используемые результаты приводятся по мере необходимости.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на:

1) Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Д.К.Фаддеева (Санкт-Петербург, 1997г.)
2) Алгебраическом семинаре под руководством А.Л.Шмелькина и А.Ю.Ольшанского (МГУ, 1997г.)
3) Семинаре по теории групп под руководством Д.И.Молдаванского (ИвГУ, 1994 – 1999гг.)

Публикации

Основные результаты работы опубликованы в статьях [25] – [32].

Объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, шестнадцати параграфов и списка литературы. Диссертация содержит 102 страницы машинописного текста.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук профессору Д.И.Молдаванскому за руководство и помощь при работе над диссертацией.

ГЛАВА 1

О свободном произведении групп с одной объединенной конечной подгруппой.

§*1. Основные результаты первой главы.*

Пусть G – свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Г.Баумслаг [9] доказал, что $G \in {}_R\mathcal{F}$, если $A, B \in {}_R\mathcal{F}$ и $|H| < \infty$. Д.Дайер [14] доказала, что группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности, если группы A и B обладают тем же свойством и $|H| < \infty$. В работе Хигмена [17] получен критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами для случая, когда A и B – конечные p-группы. Формулировка этого критерия будет приведена ниже. В этой главе мы докажем несколько утверждений, обобщающих и дополняющих перечисленные выше результаты.

Пусть $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство групп и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $H_\lambda \leqslant G_\lambda$. Предположим, что для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu} : H_\lambda \to H_\mu$, причем

$$\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}, \quad \varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}, \quad \varphi_{\lambda\lambda} = id_{H_\lambda}$$

для любых $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$. Пусть

$$G = \langle G_\lambda \ (\lambda \in \Lambda); \quad h\varphi_{\lambda\mu} = h \ (h \in H_\lambda,\ \lambda, \mu \in \Lambda)\rangle$$

– свободное произведение групп G_λ с одной объединенной подгруппой H.

Пусть Ω – непустое подмножество множества Λ. Рассмотрим группу

$$G_\Omega = \langle G_\lambda \ (\lambda \in \Omega); \quad h\varphi_{\lambda\mu} = h \ (h \in H_\lambda,\ \lambda, \mu \in \Omega)\rangle.$$

Хорошо известно, что группа G_Ω естественным образом вложима в группу G. Поэтому будем считать, что $G_\Omega \leqslant G$ во всех случаях, когда это необходимо.

Рассмотрим сначала случай, когда все группы G_λ конечны и их порядки ограничены в совокупности. В этом случае группа G обладает рядом простых аппроксимационных свойств, которые могут быть доказаны с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ – непустой класс групп. И пусть все группы G_λ конечны, причем их порядки ограничены.*

1. Если для любого непустого конечного подмножества Ω множества Λ $\quad G_\Omega \in {}_R\mathcal{K}$, то $G \in {}_R\mathcal{K}$.

2. Если для любого непустого конечного подмножества Ω множества Λ $\quad G_\Omega$ аппроксимируется относительно сопряженности классом $\mathcal{K}$, то группа G обладает тем же свойством.

3. Если для любого непустого конечного подмножества Ω множества Λ все конечно порожденные подгруппы группы G_Ω $\quad \mathcal{K}$-отделимы, то все конечно порожденные подгруппы группы G также $\mathcal{K}$-отделимы.

Напомним, что подгруппа X группы F называется $\mathcal{K}$-отделимой, если для любого элемента $a \in F \backslash X$ существует гомоморфизм φ группы F на группу из $\mathcal{K}$ такой, что $a\varphi \notin X\varphi$.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 3. Следующее утверждение является непосредственным следствием этой теоремы и отмеченного выше результата Д.Дайер.

Следствие 1.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ конечна, причем порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Тогда группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.*

По-видимому, это утверждение хорошо известно [20].

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимируемости группы G конечными p-группами в случае, когда все G_λ – конечные p-группы ограниченных порядков.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\quad G_\lambda$ – конечная p-группа и пусть

$$1 = G_{\lambda 0} \leqslant G_{\lambda 1} \leqslant \ldots \leqslant G_{\lambda j_\lambda} = G_\lambda$$

– некоторый главный ряд группы G_λ, т.е. нормальный ряд с факторами порядка p. Будем обозначать этот ряд символом $\mathcal{R}_\lambda$. Семейство главных рядов $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ будем называть совместимым, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu}$ переводит множество пересечений

$$G_{\lambda 0} \cap H_\lambda,\ G_{\lambda 1} \cap H_\lambda, \ldots,\ G_{\lambda j_\lambda} \cap H_\lambda$$

на множество пересечений

$$G_{\mu 0} \cap H_\mu,\ G_{\mu 1} \cap H_\mu, \ldots,\ G_{\mu j_\mu} \cap H_\mu.$$

Сформулируем отмеченный выше результат Хигмена.

Пусть G_1 и G_2 – конечные p-группы, $H_1 \leqslant G_1$, $H_2 \leqslant G_2$ и $\varphi : H_1 \to H_2$ – изоморфизм. И пусть $G = (G_1 {*} G_2;\ H_1 = H_2, \varphi)$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда существуют главные ряды $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ групп G_1 и G_2 соответственно такие, что семейство $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ совместимо.

Этот результат переносится на случай любого числа свободных сомножителей следующим образом.

Теорема 2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечная p-группа, причем порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует главный ряд $\mathcal{R}_\lambda$ группы G_λ такой, что семейство $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо.*

Доказательство этой теоремы приведено в § 3. Отметим ряд важных следствий из теоремы 2.

Следствие 2.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечная p-группа, причем порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Если объединяемая подгруппа H является циклической или лежит в центре группы G, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.*

Следствие 2.2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечная нильпотентная группа и порядки групп G_λ ограничены в совокупности. И пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел, содержащее все простые делители порядков групп G_λ. Если объединяемая подгруппа H является циклической или лежит в центре группы G, то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.*

Следствие 2.3. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – нильпотентная группа и объединяемая подгруппа H является циклической или лежит в центре группы G. И пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел. Если $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.*

Следствие 2.1. непосредственно вытекает из теоремы 2. Доказательства следствий 2.2. и 2.3. приведены в § 3.

Рассмотрим теперь случай, когда свободные сомножители G_λ являются произвольными группами и $|H| < \infty$. В этом случае критерий финитной аппроксимируемости группы G имеет следующий вид:

Теорема 3. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}$ и $|H| < \infty$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$*

существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ, тривиально пересекающая H_λ, и такая, что индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены в совокупности.

Эта теорема обобщает отмеченный выше результат Г.Баумслага. Ее простое доказательство приведено в § 4. Приведем пример, иллюстрирующий теорему 3. Пусть G – свободное произведение конечных циклических групп $G_1,\ G_2,\ G_3, \ldots$ четных порядков с объединением H порядка 2. С помощью теоремы 3 легко видеть, что $G \in {}_R\mathcal{F}$, если $|G_k| = 2 \cdot 3^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и $G \notin {}_R\mathcal{F}$, если для всех k $|G_k| = 2^k$.

Отметим три следствия из теоремы 3.

Следствие 3.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечная простая группа и $H \neq 1$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда порядки групп G_λ ограничены.*

Следствие 3.2. *Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и является расщепляющимся расширением конечной подгруппы H_λ, то $G \in {}_R\mathcal{F}$.*

Следствие 3.3. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и H_λ – нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ. Если индексы $[G_\lambda : H_\lambda]$ ограничены, то $G \in {}_R\mathcal{F}$.*

Следствие 3.1. непосредственно вытекает из теоремы 3. Несложные доказательства следствий 3.2. и 3.3. приведены в [25].

Перейдем теперь к вопросу об аппроксимируемости группы G конечными p-группами при условии, что $|H| < \infty$. При этом нам потребуется ряд дополнительных понятий, которые неоднократно будут использоваться в этой и последующих главах.

Первое из этих понятий восходит к Г.Баумслагу [9]. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ U_λ – нормальная подгруппа группы G_λ. Семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ называется совместимым, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ $(U_\lambda \cap H_\lambda)\varphi_{\lambda\mu} = U_\mu \cap H_\mu$. Пусть $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ – совместимое семейство. Символом G_U будем обозначать свободное произведение с одной объединенной подгруппой групп G_λ/U_λ, склеивающие изоморфизмы которого индуцируются изоморфизмами $\varphi_{\lambda\mu}$. Очевидно, что естественные гомоморфизмы $G_\lambda \to G_\lambda/U_\lambda$ можно однозначно продолжить до гомоморфизма группы G на группу G_U. Этот гомоморфизм будем обозначать через ρ_U.

Эта конструкция бывает весьма полезной при изучении аппроксимационных свойств группы G. Рассмотрим теперь одну модификацию понятия совместимого семейства, предложенную Д.И.Молдаванским.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\;U_\lambda$ – нормальная подгруппа группы G_λ и семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо. И пусть p – простое число. Семейство U будем называть p-совместимым, если для каждого $\lambda \in$ $\in \Lambda$ существует последовательность

$$U_\lambda = U_{\lambda 0} \leqslant U_{\lambda 1} \leqslant \ldots \leqslant U_{\lambda j_\lambda} = G_\lambda$$

нормальных подгрупп группы G_λ, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $|U_{\lambda i+1}/U_{\lambda i}| = p \quad (\lambda \in \Lambda,\ i = 0, 1, \ldots,\ i_\lambda - 1)$;

2. Для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu}$ отображает множество пересечений

$$U_{\lambda 0} \cap H_\lambda,\ U_{\lambda 1} \cap H_\lambda, \ldots,\ U_{\lambda i_\lambda} \cap H_\lambda$$

на множество пересечений

$$U_{\mu 0} \cap H_\mu,\ U_{\mu 1} \cap H_\mu, \ldots,\ U_{\mu j_\mu} \cap H_\mu.$$

Заметим, что если $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ – p-совместимое семейство, то свободные множители G_λ/U_λ группы G_U являются конечными p-группами и обладают семейством совместимых рядов. Отсюда и из теоремы 2 легко получить следующий результат, доказанный в § 4 :

Теорема 4. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\;G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$ и $|H| < \infty$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ, тривиально пересекающая H_λ такая, что семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $\;p$-совместимо и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены.*

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел.

Теорема 5. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\;G_\lambda$ – нильпотентная группа, причем $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. И пусть H – конечная циклическая или конечная центральная подгруппа группы G. Тогда следующие четыре условия равносильны:*

1. $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$;

2. $G \in {}_R\mathcal{F}$;

3. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа V_λ конечного индекса группы G_λ, тривиально пересекающая H, такая, что индексы $[G_\lambda : V_\lambda]$ ограничены;

4. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного $\mathcal{P}$-индекса группы G_λ, тривиально пересекающая H, такая, что индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены.

Следствие 5.1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda G_\lambda$ – конечно порожденная нильпотентная группа, причем $\tau(G_\lambda)$ – $\mathcal{P}$-группа. И пусть H – конечная циклическая или конечная центральная подгруппа группы G. Тогда условия 1, 2, 3 и 4 из формулировки теоремы 5 равносильны.*

Следствие 5.2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечно порожденная нильпотентная группа и полициклические ранги групп G_λ ограничены. И пусть конечные части $\tau(G_\lambda)$ групп G_λ являются $\mathcal{P}$-группами ограниченных порядков.*

Если $|H| < \infty$, то $G \in {}_R\mathcal{F}$.

Если H – конечная циклическая или конечная центральная подгруппа группы G, то $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Доказательства теоремы 5 и следствия 5.2 приведены в § 4. Следствие 5.1 непосредственно вытекает из теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема относительно сопряженности и $|H| < \infty$. Группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что выполняются следующие условия:*

1. Индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены;

2. Для любых элементов $h, k \in H$, не сопряженных в G, элементы hU_λ и kU_λ не сопряжены в группе G_λ/U_λ при любом $\lambda \in \Lambda$.

Эта теорема обобщает отмеченный выше результат Д.Дайер. Ее доказательство приведено в § 4.

В [1] построен пример, показывающий, что класс всех финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп (сокр. ФАС-групп) не замкнут относительно конечных расширений. Здесь мы приведем еще один пример такого рода – пример свободного произведения конечных групп с одной объединенной подгруппой, которое финитно аппроксимируемо и, более того, является почти ФАС-группой, но не ФАС-группой.

Для каждого целого положительного числа $n \geq 2$ введем обозначения:

$$D_n = \langle\, a_n, b_n;\ a_n^4 = b_n^2 = 1,\ b_n^{-1} a_n b_n = a_n^{-1} \,\rangle,$$
$$U_n = \langle\, c_n; c_n^{2^n} = 1 \,\rangle,\ G_n = D_n \times U_n,\ h_n = a_n c_n^{2^{n-2}}.$$

Пусть G – свободное произведение групп G_n $(n \geq 2)$ с одной объединенной подгруппой $H = (h)$, склеивающие соотношения которого имеют вид: $h_k = h = h_l$, где $k, l = 2, 3, \ldots$ Поскольку $U_n \cap H = 1$ и $[G_n : U_n] = |D_n| = 8$, то $G \in {}_R\mathcal{F}$ в силу теоремы 3.

Пусть $\overline{G}$ – свободное произведение групп U_n $(n \geq 2)$ со склеивающими соотношениями вида:

$$c_k^{2^{k-2}} = c_l^{2^{l-2}} \quad (k, l = 2, 3, \ldots).$$

Проекции $G_n \to U_n$ можно продолжить до гомоморфизма $\rho : G \to \overline{G}$. Поскольку элементы $h\rho$ и $h^{-1}\rho$ различны и лежат в центре группы $\overline{G}$, то они не сопряжены в $\overline{G}$. Поэтому h и h^{-1} не сопряжены в G. Тем не менее, эти элементы сопряжены по модулю любой нормальной подгруппы N конечного индекса группы G. В самом деле, пусть $N \trianglelefteq G$ и $[G : N] < \infty$. Поскольку порядки групп U_n не ограничены, то для достаточно большого n $U_n \cap N \neq 1$, т.е.

$$c_n^{2^{n-1}} \in N.$$

Отсюда и из равенства

$$b_n^{-1} h b_n h = b_n^{-1} a_n c_n^{2^{n-2}} b_n a_n c_n^{2^{n-2}} = b_n^{-1} a_n b_n a_n c_n^{2^{n-1}} = c_n^{2^{n-1}}$$

следует, что h и h^{-1} сопряжены по модулю N. Таким образом G – не ФАС-группа.

Пусть $D = \langle\, a, b,\ a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1} a b = a^{-1} \,\rangle$. Отображение $a_n \to a, b_n \to b, c_n \to 1$ можно продолжить до гомоморфизма $G \to D$. Пусть M – ядро этого гомоморфизма. Тогда $[G : M] = |D| = 8$ и $G_n \cap M = U_n$ для всех n. По теореме Х.Нейман ([5] с. 122) M раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп группы G вида

$$g^{-1} G_n g \cap M = g^{-1}(G_n \cap M) g = g^{-1} U_n g,$$

где $g \in G$. Поэтому M – свободное произведение циклических групп и, следовательно, M – ФАС-группа. Отсюда, учитывая конечность индекса $[G : M]$, заключаем, что G – почти ФАС-группа.

§2. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с одной объединенной подгруппой корневым классом групп.

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу. Следуя Грюнбергу [16], будем называть $\mathcal{K}$ корневым классом, если выполняются следующие условия:

1. Если $A \in \mathcal{K}$ и $B \leqslant A$, то $B \in \mathcal{K}$.
2. Если $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$, то $A \times B \in \mathcal{K}$.
3. Если $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ – субнормальный ряд и $A|B, B|C \in \mathcal{K}$, то существует подгруппа D такая, что $D \leqslant C,\ D \trianglelefteq A$ и $A|D \in \mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел. Легко проверить, что класс всех конечных $\mathcal{P}$-групп является корневым. В частности, класс всех конечных групп и класс всех конечных p-групп являются корневыми. Класс всех конечных разрешимых $\mathcal{P}$-групп также является корневым классом.

Замечание 1. *Пусть $\mathcal{K}$ – непустой класс групп, обладающий свойством 3 из определения корневого класса и $B \in {}_R\mathcal{K}$. Если A – расширение группы B при помощи $\mathcal{K}$-группы, то $A \in {}_R\mathcal{K}$ (см.напр. [16] лемма 1.5.).*

Замечание 2. *Пусть $\mathcal{K}$ – класс групп, удовлетворяющий условию 3 из определения корневого класса. Если группа A обладает субнормальным рядом с $\mathcal{K}$-факторами, то $A \in \mathcal{K}$.*

Замечание 3. *Пусть $\mathcal{K}$ – класс групп, обладающий свойствами 1 и 3 из определения корневого класса, причем $\mathcal{K}$ содержит неединичную группу B. Тогда $\mathcal{K}$ содержит все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения или все конечные p-группы для некоторого простого числа p. В самом деле, с точностью до изоморфизма $Z \leqslant B$ или $Z_p \leqslant B$. Поэтому $Z \in \mathcal{K}$ или $Z_p \in \mathcal{K}$. Согласно замечания 2 любая группа, обладающая субнормальным рядом с Z-факторами (Z_p-факторами) принадлежит $\mathcal{K}$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.*

Хорошо известно, что свободная группа аппроксимируется конечными p-группами и конечно порожденными нильпотентными группами без кручения (см.напр. [3] с.121 и [6] с.347). Отсюда и из замечания 3 вытекает следующее утверждение:

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. Любая свободная группа аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами.*

Сформулируем еще одно простое утверждение принадлежащее Грюнбергу.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. И пусть*

$$A = *_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

– свободное произведение групп $A_\lambda \in {}_R\mathcal{K}$. Тогда $A \in {}_R\mathcal{K}$.

Доказательство. Поскольку для каждого $\lambda \in \Lambda \quad A_\lambda \in {}_R\mathcal{K}$, то группа A аппроксимируется сводными произведениями $\mathcal{K}$-групп. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда все A_λ – $\mathcal{K}$-группы. Кроме того, без потери общности можно считать, что Λ – конечное множество.

Пусть F – декартова подгруппа группы A. Тогда F – свободная группа. По предложению 1 $F \in {}_R\mathcal{K}$. Таким образом, группа A является расширением группы $F \in {}_R\mathcal{K}$ при помощи группы

$$A/F \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

которая, очевидно, принадлежит $\mathcal{K}$. Ввиду замечания 1 $A \in {}_R\mathcal{K}$.

Предложение 2 хорошо известно [16]. Его простое доказательство приведено для полноты изложения.

Пусть, как и выше, G – свободное произведение групп $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной подгруппой H.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. И пусть $G_\lambda \in {}_R\mathcal{K}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Если существует гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на H, то $G \in {}_R\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть существует гомоморфизм σ группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на H. И пусть $N = Ker\sigma$. Тогда $G/N \in \mathcal{K}$ и $N \cap H = 1$. Поскольку N пересекается тривиально с любой подгруппой группы G, сопряженной с H, то по теореме Х.Нейман ([5] с.122.) группа N является свободным произведением свободной подгруппы

F группы G и некоторых подгрупп группы G вида $g^{-1}G_\lambda g \cap N$, где $g \in G,\ \lambda \in \Lambda$. Поскольку

$$g^{-1}G_\lambda g \cap N \leqslant g^{-1}G_\lambda g \cong G_\lambda$$

и $G_\lambda \in {}_R\mathcal{K}$,то $(g^{-1}G_\lambda g \cap N) \in {}_R\mathcal{K}$. Кроме того, по предложению 1 $F \in {}_R\mathcal{K}$. Таким образом, все свободные сомножители группы N аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами. По предложению 2 $N \in {}_R\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что $G/N \in \mathcal{K}$ с учетом замечания 1 заключаем, что $G \in {}_R\mathcal{K}$.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп, $N \trianglelefteq G$ и $G/N \in \mathcal{K}$. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\quad U_\lambda = G_\lambda \cap N$. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо и группа $G_U \in {}_R\mathcal{K}$.*

Доказательство. Очевидно, что естественный гомоморфизм $\varepsilon\ :\ G \to G/N$ проходит через гомоморфизм $\rho_U\ :\ G \to G_U$, т.е. $\varepsilon = \rho_U\sigma$, где σ – гомоморфизм группы G_U на группу G/N.

Гомоморфизм σ инъективен на подгруппе $H\rho_U$. В самом деле, пусть $\bar{h} \in H\rho_U$ и $\bar{h}\sigma = 1$. Тогда $\bar{h} = h\rho_U$ для некоторого $h \in H$ и

$$h\varepsilon = h\rho_U\sigma = \bar{h}\sigma = 1,$$

т.е. $h \in N$ и, следовательно, $h \in U_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Поэтому $h\rho_U = 1$, т.е. $\bar{h} = 1$.

Таким образом, группа G_U обладает гомоморфизмом σ на $\mathcal{K}$-группу G/N, инъективным на объединяемой подгруппе $H\rho_U$. Кроме того, для любого $\lambda \in \Lambda$

$$G_\lambda/U_\lambda = G_\lambda/G_\lambda \cap N \cong G_\lambda N/N \leqslant G/N \in \mathcal{K}$$

и, следовательно, свободные множители G_λ/U_λ группы G_U являются $\mathcal{K}$-группами. По предложению 3 $G_U \in {}_R\mathcal{K}$.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. Группа $G \in \in {}_R\mathcal{K}$, если выполняются два условия:*

1. Для любого $h \in H\backslash 1$ существует гомоморфизм σ групп G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $h\sigma \neq 1$.

2. Для любого $\lambda \in \Lambda$ и для любого $x \in G_\lambda\backslash H$ существует гомоморфизм σ группы G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.

Доказательство. Пусть выполняются условия 1 и 2. И пусть $g \in G,\ g \neq 1$. Покажем, что существует гомоморфизм σ группы G на

$\mathcal{K}$-группу такой, что $g\sigma \neq 1$. Условие 1 позволяет ограничиться рассмотрением случая, когда $g \notin H$.

Пусть $g = x_1 x_2 \ldots x_r$ – несократимая запись элемента g. Поскольку $g \notin H$, то слоги x_k не лежат в H, причем, если $r > 1$, то соседние слоги лежат в различных свободных множителях G_λ.

Ввиду условия 2 для каждого $k = 1, \ \ldots, r$ существует гомоморфизм σ_k группы G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $x_k\sigma_k \notin H\sigma_k$. Пусть

$$N = \bigcap_{k=1}^{r} Ker\ \sigma_k.$$

Поскольку

$$G/N \leqslant \prod_{k=1}^{r} G/Ker\ \sigma_k,$$

то $G/N \in \mathcal{K}$. Поскольку все гомоморфизмы σ_k проходят через естественный гомоморфизм $\varepsilon \ : \ G \to G/N$, то $x_k\varepsilon \notin H\varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, r$.

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через U_λ пересечение $G_\lambda \cap N$. Поскольку $G/N \in \mathcal{K}$, то по предложению 4 семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и $G_{_U} \in {}_R\mathcal{K}$.

Поскольку гомоморфизм $\varepsilon \ : \ G \to G/N$ проходит через гомоморфизм $\rho_{_U}$, то $x_k\rho_{_U} \notin H\rho_{_U}$ для всех $k = 1, \ldots, r$. Поэтому все сомножители в записи

$$g\rho_{_U} = x_1\rho_{_U} \ldots x_r\rho_{_U}$$

лежат в свободных множителях G_λ/U_λ группы $G_{_U}$ и не входят в объединяемую подгруппу $H\rho_{_U}$. Причем, если $r > 1$, то соседние сомножители в этой записи лежат в различных свободных сомножителях группы $G_{_U}$. Поэтому $g\rho_{_U} \neq 1$. Отсюда и из того, что $G_{_U} \in {}_R\mathcal{K}$, следует, что существует гомоморфизм ρ группы G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\rho_{_U}\rho \neq 1$.

Предложение доказано.

§3. О свободном произведении конечных групп с одной объединенной подгруппой

В этом параграфе будут доказаны теоремы 1 и 2, а также некоторые следствия из этих теорем.

Пусть, как и выше,

$$G = \langle\ G_\lambda\ (\lambda \in \Lambda);\ h\varphi_{\lambda\mu} = h\ (h \in H_\lambda,\ \lambda,\ \mu \in \Lambda)\ \rangle$$

– свободное произведение групп G_λ с одной объединенной подгруппой H. Мы сохраняем все обозначения, введенные в § 1.

Предложение 6. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечная группа и порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Тогда для любого конечного подмножества Γ множества Λ существуют конечное подмножество Ω множества Λ, содержащее Γ, и гомоморфизм σ группы G на группу G_Ω такие, что выполняются следующие условия:*

1. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ ограничение гомоморфизма σ на G_λ является изоморфизмом группы G_λ на подходящую подгруппу G_α группы G_Ω, где $\alpha \in \Omega$.

2. Гомоморфизм σ тождественно отображает подгруппу G_Γ группы G на подгруппу G_Γ группы G_Ω.

Доказательство. Пусть G_0 – фиксированная подгруппа семейства $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и пусть $h_{01}, \ldots,\ h_{0t}$ – множество всех элементов объединяемой подгруппы H_0 группы G_0. Введем обозначения:

$$h_{\lambda i} = h_{0i}\ \varphi_{0\lambda} \qquad (\lambda \in \Lambda,\ 1 \leqslant i \leqslant t).$$

Тогда для любых $\lambda,\ \mu \in \Lambda$

$$h_{\lambda i}\ \varphi_{\lambda\mu} = h_{\mu i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

Поэтому

$$G = \langle\ G_\lambda\ (\lambda \in \Lambda);\ h_{\lambda i} = h_{\mu i}\ (\lambda, \mu \in \Lambda, 1 \leqslant i \leqslant t)\ \rangle$$

и, если $\Phi \subseteq \Lambda$, то

$$G_\Phi = \langle\ G_\lambda\ (\lambda \in \Phi);\ h_{\lambda i} = h_{\mu i}\ (\lambda, \mu \in \Phi, 1 \leqslant i \leqslant t)\ \rangle.$$

Пусть Γ – конечное подмножество множества Λ. Рассмотрим семейство групп $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\setminus\Gamma}$. Поскольку порядки групп G_λ ограничены, то это семейство разбивается на конечное число классов изоморфности $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_j}$, $j = 1,\ \ldots, s$. Пусть D_j – изоморфная копия групп семейства $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_j}$. Для каждого $\lambda \in \Lambda_j$ зафиксируем изоморфизм $\tau_\lambda \ : \ G_\lambda \to D_j$.

Элементы λ и μ из $\Lambda\backslash\Gamma$ назовем эквивалентными, если они принадлежат одному и тому же Λ_j и для любого $i = 1, \ \dots, t$ справедливо равенство:

$$h_{\lambda i}\tau_\lambda = h_{\mu i}\tau_\mu.$$

Введенное отношение эквивалентности разбиввает множество $\Lambda\backslash\Gamma$ на конечное число классов эквивалентности $\Delta_1, \ \dots, \Delta_m$. Зафиксируем систему представителей $\delta_1, \ \dots, \delta_m$ классов $\Delta_1, \ \dots, \Delta_m$ соответственно. Введем обозначения:

$$\Delta = \{\delta_1, \ \dots, \delta_m\}, \quad \Omega = \Gamma \cup \Delta.$$

Тогда Ω – конечное подмножество множества Λ, содержащее Γ. Покажем, что существует гомоморфизм σ группы G на группу

$$G_\Omega = \langle G_\alpha \ (\alpha \in \Omega); \quad h_{\alpha i} = h_{\beta i} \ (\alpha, \ \beta \in \Omega, \ 1 \leqslant i \leqslant t)\rangle,$$

удовлеторяющий условиям 1 и 2.

Каждому индексу $\lambda \in \Lambda$ поставим в соответствие элемент $\alpha \in \in \Omega$ и изоморфизм $\sigma_\lambda \ : \ G_\lambda \to G_\alpha$ следующим образом: если $\lambda \in \in \Gamma$, то полагаем $\alpha = \lambda$ и через σ_λ будем обозначать тождественный автоморфизм группы G_λ. Ясно, что в этом случае

$$h_{\lambda i}\sigma_\lambda = h_{\lambda i} = h_{\alpha i} \quad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda\backslash\Gamma$. Тогда $\lambda \in \Delta_k$ для подходящего числа $k = 1, \ \dots, m$. Это означает, что элементы λ и δ_k эквивалентны, т.е. они лежат в одном и том же классе изоморфности Λ_j и изоморфизмы $\tau_\lambda \ : \ G_\lambda \to D_j$ и $\tau_{\delta_k} \ : \ G_{\delta_k} \to D_j$ связаны соотношениями:

$$h_{\lambda i}\tau_\lambda = h_{\delta_k i}\tau_{\delta_k} \quad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

Поставим в соответствие элементу λ элемент $\alpha = \delta_k$ и через σ_λ будем обозначать изоморфизм группы G_λ на группу G_α вида

$$\sigma_\lambda = \tau_\lambda\tau_{\delta_k}^{-1} = \tau_\lambda\tau_\alpha^{-1}.$$

Из последних двух равенств имеем:

$$h_{\lambda i}\sigma_\lambda = h_{\delta_k i} = h_{\alpha i} \quad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

Таким образом, каждому $\lambda \in \Lambda$ сопоставлен элемент $\alpha \in \Omega$ и изоморфизм $\sigma_\lambda : G_\lambda \to G_\alpha$ такой, что выполняются условия:

(i) Если $\lambda \in \Gamma$, то σ_λ – тождественный автоморфизм группы G_λ.

(ii) $h_{\lambda i}\sigma_\lambda = h_{\alpha i} \qquad (\lambda \in \Lambda,\ 1 \leqslant i \leqslant t)$.

Будем теперь рассматривать изоморфизмы σ_λ как вложения групп G_λ в группу G_Ω. Пусть $\lambda, \mu \in \Lambda$. Рассмотрим изоморфизмы

$$\sigma_\lambda : G_\lambda \to G_\alpha, \quad \sigma_\mu : G_\mu \to G_\beta \qquad (\alpha, \beta \in \Omega).$$

В силу условия (ii)

$$h_{\lambda i}\sigma_\lambda = h_{\alpha i}, \quad h_{\mu i}\sigma_\mu = h_{\beta i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

Отсюда и из того, что в группе G_Ω выполняются соотношения $h_{\alpha i} = h_{\beta i}$ следует, что

$$h_{\lambda i}\sigma_\lambda = h_{\mu i}\sigma_\mu \quad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

Поэтому вложения σ_λ групп G_λ в группу G_Ω можно продолжить до гомоморфизма $\sigma : G \to G_\Omega$.

Поскольку ограничение гомоморфизма σ на G_λ совпадает с изоморфизмом $\sigma_\lambda : G_\lambda \to G_\alpha$, где $\alpha \in \Omega$, то выполняется условие 1. Справедливость условия 2 вытекает из условия (i).

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\mathcal{K}$ – непустой класс групп. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ конечна, причем порядки групп G_λ ограничены.

Докажем первое утверждение теоремы 1. Предположим, что для каждого конечного подмножества Ω множества Λ $G_\Omega \in {}_R\mathcal{K}$. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{K}$.

Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Обозначим через Γ конечное подмножество множества Λ такое, что $g \in G_\Gamma$. По предложению 6 существует конечное подмножество Ω множества Λ, содержащее Γ, и гомоморфизм $\sigma : G \to G_\Omega$, отображающий тождественно подгруппу G_Γ группы G на подгруппу G_Γ группы G_Ω. Поскольку $g \in G_\Gamma$, то $g\sigma = g \neq 1$. Отсюда и из того, что $G_\Omega \in {}_R\mathcal{K}$ следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_Ω на $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\sigma\rho \neq 1$. Таким образом, $G \in {}_R\mathcal{K}$.

Докажем второе утверждение теоремы 1. Пусть для любого конечного подмножества Ω множества Λ группа G_Ω аппроксимируется

$\mathcal{K}$-группами относительно сопряженности. Покажем, что группа G обладает тем же свойством.

Пусть x и y – несопряженные элементы группы G. И пусть Γ – конечное подмножество множества Λ такое, что $x, y \in G_\Gamma$. По предложению 6 существует конечное подмножество Ω множества Λ, содержащее Γ, и гомоморфизм $\sigma : G \to G_\Omega$, отображающий тождественно подгруппу G_Γ группы G на подгруппу G_Γ группы G_Ω. Поскольку $G_\Omega \leqslant G$, то гомоморфизм σ можно рассматривать как эндоморфизм группы G, тождественный на G_Γ. Поскольку $x, y \in G_\Gamma$, то $x\sigma = x$, $y\sigma = y$. Поэтому $x\sigma$ и $y\sigma$ не сопряжены в G. И, тем более, они не сопряжены в G_Ω. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_Ω на $\mathcal{K}$-группу такой, что $x\sigma\rho$ и $y\sigma\rho$ не сопряжены. Таким образом, группа G аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами относительно сопряженности.

Подобным образом доказывается и третье утверждение теоремы.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется еще два предложения.

Предложение 7. *Пусть G_1 и G_2 – конечные p-группы, $H_1 \leqslant G_1$, $H_2 \leqslant G_2$, $\varphi : H_1 \to H_2$ – изоморфизм и $G = (G_1 * G_2;\ H_1 = H_2, \varphi)$. Пусть $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ – главные ряды групп G_1 и G_2 такие, что семейство $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ совместимо. Тогда существует последовательность $Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \ \ldots \ \leqslant Z_r = G$ нормальных подгрупп группы G такая, $|Z_{i+1}/Z_i| = p \quad (0 \leqslant i < r)$ и ряд $\mathcal{R}_\lambda$ получается из ряда*

$$G_\lambda \cap Z_0 \leqslant G_\lambda \cap Z_1 \leqslant \ \ldots \ \leqslant G_\lambda \cap Z_r$$

удалением повторяющихся членов $(\lambda = 1, 2)$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим последовательности

$$1 = U_{10} \leqslant \ \ldots \ \leqslant U_{1t} = G_1, \quad 1 = U_{20} \leqslant \ \ldots \ \leqslant U_{2t} = G_2$$

нормальных подгрупп групп G_1 и G_2 такие, что ряды $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ получаются из этих последовательностей удалением повторяющихся членов и для любого $i = 0, \ \ldots, t$ имеет место равенство $(U_{1i} \cap H_1)\varphi = U_{2i} \cap H_2$. Тогда семейство $U_i = (U_{1i}, U_{2i})$ совместимо и, более того, p – совместимо. Поэтому свободные множители группы G_{U_i} обладают семейством совместимых рядов и в силу теоремы Хигмена $G_{U_i} \in {}_R\mathcal{F}_p \quad (0 \leqslant i \leqslant t)$. Отсюда следует, что существует нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G_{U_i}, тривиально пересекающая ее свободные множители G_1/U_{1i} и G_2/U_{2i}. Пусть X_i – полный прообраз этой подгруппы относительно гомоморфизма $\rho_{U_i}\ :\ G \to G_{U_i}$. Тогда

$$X_i \cap G_1 = U_{1i}, \quad X_i \cap G_2 = U_{2i}.$$

Введем обозначения:

$$Y_k = \bigcap_{i=k}^{t} X_i \qquad (0 \leqslant k \leqslant t).$$

Тогда $Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant\ \ldots\ \leqslant Y_t$ и

$$Y_k \cap G_1 = U_{1k}, \quad Y_k \cap G_2 = U_{2k}.$$

Кроме того, все факторы последовательности $Y_0 \leqslant\ \ldots\ \leqslant Y_t = G$ являются конечными p-группами. Исключая из последовательности $Y_0 \leqslant\ \ldots\ \leqslant Y_t$ повторяющиеся члены и уплотняя ее факторы, получим искомую последовательность $Z_0 \leqslant\ \ldots\ \leqslant Z_r = G$.

Предложение 8. *Пусть Λ – конечное множество и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\;G_\lambda$ – конечная p-группа. Если свободные сомножители G_λ обладают семейством совместимых рядов $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.*

Докажем это предложение индукцией по числу n элементов множества Λ. Для $n = 2$ данное утверждение совпадает с теоремой Хигмена. Пусть $n \geqslant 3$ и доказываемое утверждение справедливо, если Λ содержит меньшее число элементов.

Элементы множества Λ будем обозначать числами $1, \ldots, n$. Предположим, что группы $G_1, \ldots, G_n$ обладают семеством совместимых рядов $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$. Тогда свободные множители G_1 и G_2 подгруппы $G_0 = G_{\{1,2\}}$ группы G обладают совместимыми рядами $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. По предложению 7 существует последовательность $Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \ldots \leqslant Z_r = G_0$ нормальных подгрупп группы G_0 с факторами порядка p, такая, что ряд $\mathcal{R}_\lambda$ получается из ряда

$$G_\lambda \cap Z_0 \leqslant G_\lambda \cap Z_1 \leqslant \ldots \leqslant G_\lambda \cap Z_r$$

удалением повторяющихся членов ($\lambda = 1, 2$). Отсюда следует, что множество пересечений членов последовательности $Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant\ \ldots\ \leqslant Z_r$ с подгруппой H совпадает с множеством пересечений членов любого ряда $\mathcal{R}_\lambda$ с подгруппой H. Поэтому семейство

$$U = \{U_0 = Z_0,\ U_3 = 1, \ldots,\ U_n = 1\}$$

является p-совместимым семейством нормальных подгрупп свободных сомножителей $G_0, G_3, \ldots, G_n$ группы G. Поэтому свободные множители группы G_U обладают семейством совместимых рядов. По индуктивному предположению $G_U \in {}_R\mathcal{F}_p$. И, следовательно, существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную p-группу инъективный на $H\rho_U$. Поскольку гомоморфизм ρ_U инъективен на H, то мы получаем гомоморфизм $\sigma = \rho_U \rho$ группы G на конечную p-группу, инъективный на H. По предложению 3 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

<u>Доказательство теоремы 2.</u>

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечная p-группа и порядки групп G_λ ограничены. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда группы G_λ обладают семейством совместимых рядов.

По предложению 6 существует конечное подмножество Ω множества Λ и гомоморфизм σ группы G на группу G_Ω такой, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ ограничение гомоморфизма σ на G_λ является изоморфизмом группы G_λ на подходящий свободный множитель G_α группы G_Ω.

Предположим сначала, что $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Поскольку $G_\Omega \leqslant G$, то $G_\Omega \in {}_R\mathcal{F}_p$. Отсюда следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_Ω на конечную p-группу P, инъективный на всех сомножителях G_α группы G_Ω. Поэтому гомоморфизм $\sigma\rho : G \to P$ инъективен на всех свободных сомножителях G_λ группы G. Пусть $N = Ker\sigma\rho$. Тогда N – нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \cap N = 1$. Рассмотрим в группе G последовательность нормальных подгрупп

$$N = N_0 \leqslant N_1 \leqslant \ldots \leqslant N_k = G$$

с факторами порядка p. Эта последовательность высекает в каждой G_λ некоторую последовательность нормальных подгрупп, исключая из которой повторяющиеся члены, получим главный ряд $\mathcal{R}_\lambda$ группы G_λ. Очевидно, что семейство рядов $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо.

Наоборот, предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует главный ряд $\mathcal{R}_\lambda$ группы G_λ такой, что семейство $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо. Тогда в силу предложения 8 $G_\Omega \in {}_R\mathcal{F}_p$. Следовательно, существует гомоморфизм ρ группы G_Ω на конечную p-группу P, инъективный на $H\sigma$. Поскольку гомоморфизм σ, в свою очередь, инъективен на H, то мы получаем гомоморфизм $\sigma\rho$ группы G на конечную p-группу P, инъективный на H. По предложению 3 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

<u>Доказательство следствия 2.2.</u>

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ – конечная нильпотентная группа и порядки групп G_λ ограничены в совокупности. И пусть множество простых чисел $\mathcal{P}$ содержит все простые делители порядков групп G_λ. И пусть, наконец, объединяемая подгруппа H является циклической, или лежит в центре группы G.

Покажем, что G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.

Пусть $p_1, \ldots, p_n$ – подмножество множества $\mathcal{P}$, состоящее из всех простых делителей порядков групп G_λ. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ и для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через $U_{\lambda i}$ нормальную подгруппу группы G_λ, состоящую из всех элементов группы G_λ, порядки которых не делятся на p_i. Очевидно, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ семейство $U_i = (U_{\lambda i})_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо и $H \cap Ker \rho_{U_i}$ – множество всех элементов из H, порядки которых не делятся на p_i. Поэтому

$$\bigcap_{i=1}^{n} (H \cap Ker\ \rho_{U_i}) = 1.$$

Поскольку группа G_{U_i} представляет собою свободное произведение конечных p_i-групп ограниченных порядков с циклической или центральной объединенной подгруппой $H\rho_{U_i}$, то по следствию 2.1. $G_{U_i} \in {}_R\mathcal{F}_{p_i}$. Следовательно, найдется гомоморфизм σ_i группы G_{U_i} на конечную p_i группу, инъективный на $H\rho_{U_i}$, т.е. такой, что

$$H \cap Ker\ \rho_{U_i} = H \cap Ker\ \rho_{U_i}\sigma_i.$$

Из последних двух равенств получаем:

$$\bigcap_{i=1}^{n} (H \cap Ker\ \rho_{U_i}\sigma_i) = 1.$$

Поэтому $H \cap N = 1$, где

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} Ker\ \rho_{U_i}\sigma_i.$$

Очевидно, что G/N – конечная разрешимая (точнее нильпотентная) $\mathcal{P}$-группа. Поскольку $H \cap N = 1$, то естественный гомоморфизм ε

группы G на конечную разрешимую $\mathcal{P}$-группу G/N инъективен на H. По предложению 3 группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.

<u>Доказательство следствия 2.3.</u>

Пусть все G_λ – нильпотентные группы и H – центральная или циклическая подгруппа группы G. И пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – множество простых чисел. Покажем, что G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.

Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Тогда найдется нормальная подгруппа N конечного $\mathcal{P}$-индекса группы G такая, что $g \notin N$. Пусть $U_\lambda = G_\lambda \cap N \quad (\lambda \in \Lambda)$. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и группа $G_{_U}$ является свободным произведением конечных нильпотентных $\mathcal{P}$-групп ограниченных порядков с центральной или циклической объединенной подгруппой. По следствию 2.2. $G_{_U}$ аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами. Поскольку $g \notin N$, то $g\rho_{_U} \neq 1$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы $G_{_U}$ на конечную разрешимую $\mathcal{P}$-группу такой, что $g\rho_{_U}\rho \neq 1$.

Таким образом, группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.

§4. О свободном произведении групп с одной объединенной подгруппой.

В этом параграфе будут доказаны теоремы 3-6. Пусть, как и выше, G – свободное произведение групп G_λ с одной объединенной подгруппой H.

<u>Доказательство теоремы 3.</u>

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}$ и $|H| < \infty$. Если $G \in {}_R\mathcal{F}$, то сущестует нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что $N \cap H = 1$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа $U_\lambda = G_\lambda \cap N$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы $G_\lambda, \quad U_\lambda \cap H_\lambda = 1$, причем индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены.

Наоборот, пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и по следствию 1.1. $G_{_U} \in {}_R\mathcal{F}$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы $G_{_U}$ на конечную группу, инъективный на $H\rho_{_U}$.

Поскольку $H \cap U_\lambda = 1$, то гомоморфизм ρ_{U} инъективен на H и мы получаем гомоморфизм $\sigma = \rho_{U}\rho$ группы G на конечную группу, инъективный на H. По предложению 3 $G \in {}_R\mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $|H| < \infty$, p-простое число и для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Тогда существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что $N \cap H = 1$. Пусть $U_\lambda = G_\lambda \cap N$ ($\lambda \in \Lambda$). Тогда U_λ – нормальная подгрупа группы G_λ, $U_\lambda \cap H_\lambda = 1$, индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены и семейство $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ p-совместимо.

Обратно, пусть для каждого $\lambda \in \Lambda \quad U_\lambda$ – нормальная подгруппа группы G_λ, тривиально пересекающая H_λ, индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены и семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ p-совместимо. Тогда свободные множители группы G_{U} являются конечными p-группами ограниченных порядков и обладают семейством совместимых рядов. По теореме 2 $G_{U} \in {}_R\mathcal{F}_p$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_{U} на конечную p-группу, инъективный на $H\rho_{U}$. Поскольку гомоморфизм ρ_{U} инъективен на H, то мы получаем гомоморфизм $\sigma = \rho_{U}\rho$ группы G на конечную p-группу, инъективный на H. По предложению 3 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Доказательство теоремы 5.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел и для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ – нильпотентная группа из ${}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. И пусть H – конечная циклическая или конечная центральная подгруппа группы G. Покажем, что условия 1,2,3 и 4 из формулировки теоремы 5 равносильны. Импликации $1 \Rightarrow 2$ и $2 \Rightarrow 3$ очевидны. Поэтому остается проверить импликации $3 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$.

Пусть выполняется условие 3, т.е. для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа V_λ конечного индекса группы G_λ такая, что $H \cap V_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : V_\lambda]$ ограничены. Обозначим через U_λ множество всех элементов из G_λ, порядки которых по модулю V_λ взаимно просты с любым числом из $\mathcal{P}$. Поскольку $H \leqslant G_\lambda$, $G_\lambda \in$ $\in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и $|H| < \infty$, то $H - \mathcal{P}$-группа. Отсюда и из условия $H \cap V_\lambda = 1$ следует, что $H \cap U_\lambda = 1$. Кроме того, очевидно, что индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены и являются $\mathcal{P}$-числами, т.е. выполняется условие 4.

Предположим теперь, что выполняется условие 4. Тогда группа G_{U}, где $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, является свободным произведением конечных нильпотентных $\mathcal{P}$-групп ограниченных порядков с циклическим или центральным объединением. По следствию 2.2. $G_{U} \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_{U} на конечную $\mathcal{P}$-группу, инъективный на $H\rho_U$. Мы получаем гомоморфизм $\rho_U\rho$ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу, инъективный на H. По предложению 3 $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

<u>Доказательство следствия 5.2.</u>

Пусть $|H| < \infty$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечно порожденная нильпотентная группа, причем полициклические ранги групп G_λ ограничены числом r. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\tau(G_\lambda)$ – конечная $\mathcal{P}$-группа, причем порядки m_λ групп $\tau(G_\lambda)$ ограничены числом m.

Очевидно, ступени нильпотентности n_λ групп G_λ ограничены числом $n = r + m$. Кроме того, каждая из групп G_λ обладает полициклическим рядом с не более чем n факторами.

Пусть $\lambda \in \Lambda$. Хорошо известно, что из любого элемента подгруппы

$$U_\lambda = G_\lambda^{m_\lambda^{n_\lambda}}$$

в G_λ извлекается корень степени m_λ ([7], лемма 2). Поэтому $U_\lambda \cap \tau(G_\lambda) = 1$ и, следовательно, $U_\lambda \cap H = 1$. Поскольку числа m_λ и n_λ ограничены, то периоды групп G_λ/U_λ ограничены. Кроме того, каждая из групп G_λ/U_λ обладает полициклическим рядом с не более чем n факторами. Поэтому порядки групп G_λ/U_λ ограничены.

Таким образом, для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ, тривиально пересекающая H такая, что индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены. По теореме 3 $G \in {}_R\mathcal{F}$. Если H – циклическая или центральная подгруппа группы G, то $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ в силу следствия 5.1.

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется несколько дополнительных утверждений.

Пусть F – группа, $x, y \in F$, $M \subseteq F$. Будем писать $x \sim {}_M y$ ($x \nsim {}_M y$) если элементы x и y сопряжены (не сопряжены) посредстом элемента из M.

Хорошо известная теорема Магнуса ([5], с.222) дает критерий сопряженности двух элементов свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Эта теорема без труда нереносится на свободное произведение G любого числа групп G_λ с одной объединенной подгруппой H.

Предложение 9. *Пусть x и y – циклически несократимые элементы группы G и $x \sim {}_G y$.*

1. Пусть для некоторого $\lambda \in \Lambda$ $x \in G_\lambda$ и $x \sim {}_{G_\lambda} h \in H$. Тогда $y \in G_\mu$ для некоторого $\mu \in \Lambda$ и существуют элементы $h_0 =$

$= h,\ h_1, \ldots,\ h_s$ *из* H *такие, что любые соседние члены последовательности* $x, h_0, h_1, \ldots,\ h_s, y$ *сопряжены в подходящих свободных сомножителях группы* G.

2. Пусть для некоторого $\lambda \in \Lambda\quad x \in G_\lambda$ *и* x *не сопряжен в* G_λ *ни с каким элементом из* H. *Тогда* $y \in G_\lambda$ *и* $x \sim {}_{G_\lambda} y$.

3. Пусть x *не лежит ни в каком свободном сомножителе группы* G, $x = x_1\ \ldots\ x_r$ *– несократимая запись элемента* x. *Тогда* $y \sim {}_H x^*$, *где* x^* *– некоторая циклическая перестановка произведения* $x_1\ \ldots\ x_r$.

Замечание. *Перечисленные в предложении 9 необходимые условия сопряженности элементов* x *и* y *являются, очевидно, и достаточными.*

Предложение 10. *Пусть* H *– конечная подгруппа и для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *группа* G_λ *финитно аппроксимируема относительно сопряженности. И пусть* $x, y \in G$, *причем* $x \nsim {}_G y$ *и хотя бы один из этих элементов не сопряжен ни с каким элементом из* H. *Если* $G \in {}_R\mathcal{F}$, *то существует гомоморфизм* σ *группы* G *на конечную группу* B *такой, что* $x\sigma \nsim {}_B y\sigma$.

<u>Доказательство.</u> Без потери общности можно считать, что x и y – циклически несократимые элементы, причем x не сопряжен в G ни с каким элементом из H. Рассмотрим циклически несократимые записи

$$x = x_1\ \ldots\ x_r, \quad y = y_1\ \ldots\ y_s$$

элементов x и y. Поскольку $x \notin H$, то все x_i не принадлежат H.

Предположим, что $G \in {}_R\mathcal{F}$ и $x \nsim {}_G y$. Покажем, что $x\sigma \nsim {}_B y\sigma$ для некоторого гомоморфизма σ группы G на конечную группу B.

Поскольку $H \leqslant G, \quad G \in {}_R\mathcal{F}$ и $|H| < \infty$, то существует нормальная подгруппа N группы G такая, что выполняются условия:

(а) $x_i \notin NH \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$;

(б) Если $y \notin H$, то $y_i \notin NH \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$;

Пусть $U_\lambda = G_\lambda \cap N \quad (\lambda \in \Lambda)$. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и свободные сомножители группы G_U являются конечными группами ограниченных порядков. По следствию 1.1. группа G_U финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Поскольку $Ker\ \rho_U \leqslant N$, то ввиду условий (а) и (б) $x_i\rho_U \notin H\rho_U$ и, если $y \notin H$, то $y_i\rho_U \notin H\rho_U$. Поэтому элементы $x\rho_U$ и $y\rho_U$ группы G_U имеют циклически несократимые записи

$$x\rho_U = x_1\rho_U\ \ldots\ x_r\rho_U, \quad y\rho_U = y_1\rho_U\ \ldots\ y_s\rho_U,$$

длины которых равны r и s.

Рассмотрим ряд случаев.

1. $r \neq s$, т.е. $x\rho_U$ и $y\rho_U$ имеют разные длины. По предложению 9 $x\rho_U \not\sim_{G_U} y\rho_U$. Поскольку группа G_U финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу B такой, что $x\rho_U\rho \not\sim_B y\rho_U\rho$. Гомоморфизм $\sigma = \rho_U\rho$ является искомым.

2. $r = s > 1$. Поскольку $x \not\sim_G y$, то

$$y \neq h^{-1}x_i \dots x_r x_1 \dots x_{i-1}h$$

для всех $h \in H$ и для всех $i = 1, \dots, r$. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}$ и $|H| < \infty$, то подгруппу N конечного индекса группы G можно подобрать так, чтобы помимо условий (а), (б) выполнялось условие:
(в) $y \not\equiv h^{-1}x_i \dots x_r x_1 \dots x_{i-1}h \pmod N$ для всех $h \in H$ и для всех $i = 1, \dots, r$.

Отсюда и из того, что $Ker\ \rho_U \leqslant N$, следует, что

$$y\rho_U \not\sim_{H\rho_U} (x\rho_U)^*,$$

где $(x\rho_U)^*$ – произвольная циклическая перестановка несократимой записи элемента $x\rho_U$. По предложению 9 $x\rho_U \not\sim_{G\rho_U} y\rho_U$. Как и в случае 1 отсюда следует, что существует гомоморфизм σ группы G на конечную группу B такой, что $x\sigma \not\sim_B y\sigma$.

3. $r = s = 1$. Пусть G_μ – свободный сомножитель группы G, содержащий x. Поскольку группа G_μ финитно аппроксимируема относительно сопряженности и x не сопряжен в G_μ ни с каким элементом из конечной подгруппы H, то существует нормальная подгруппа V_μ конечного индекса группы G_μ такая, что выполняются следующие условия:

(г) Элемент x не сопряжен в G_μ ни с каким элементом из H по модулю V_μ;

(д) Если $y \in G_\mu$, то x и y не сопряжены в G_μ по модулю V_μ;

(е) $V_\mu \cap H_\mu = 1$.

Поскольку группа $G \in {}_R\mathcal{F}$, то для каждого λ из Λ, отличного от μ, существует нормальная подгруппа V_λ конечного индекса группы G_λ такая, что $V_\lambda \cap H_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : V_\lambda]$ ограничены. Тогда семейство $V = (V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо и свободные сомножители группы G_V являются конечными группами ограниченных порядков. По следствию 1.1 группа G_V финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Поскольку ограничение гомоморфизма ρ_V на G_μ совпадает с естественным гомоморфизмом $G_\mu \to G_\mu/V_\mu$, то условия (г) и (д) могут быть записаны в следующем виде:

(ж) Элемент $x\rho_V$ не сопряжен в G_μ/V_μ ни с каким элементом из $H\rho_V$;

(з) Если $y \in G_\mu$, то $x\rho_V \nsim_{G_\mu/V_\mu} y\rho_V$.

Покажем, что $x\rho_{_V} \nsim_{G_V} y\rho_{_V}$. Допустим противное. Тогда поскольку $x\rho_{_V}$ лежит в свободном сомножителе G_μ/V_μ группы G_V и, согласно (ж) не сопряжен в этом сомножителе ни с каким элементом из объединяемой подгруппы $H\rho_{_V}$, то по предложению 9 $y\rho_{_V}$ лежит в том же сомножителе G_μ/V_μ, что и $x\rho_{_V}$, причем

$$x\rho_{_V} \sim_{G_\mu/V_\mu} y\rho_{_V}. \tag{$*$}$$

Однако, это невозможно. В самом деле, если $y \in G_\mu$, то согласно (з) $x\rho_{_V} \nsim_{G_\mu/V_\mu} y\rho_{_V}$. Пусть теперь $y \notin G_\mu$, т.е. $y \in G_\nu \backslash H$, где $\nu \in \in \Lambda$, $\nu \neq \mu$. Тогда $y\rho_{_V} \in G_\nu/V_\nu$. С другой стороны, как показано выше, $y\rho_{_V} \in G_\mu/V_\mu$. Поэтому $y\rho_{_V} \in G_\nu/V_\nu \cap G_\mu/V_\mu$, т.е. $y\rho_{_V} \in \in H\rho_{_V}$. Отсюда и из ($*$) следует, что элемент $x\rho_{_V}$ сопряжен в G_μ/V_μ с некоторым элементом из $H\rho_{_V}$ (а именно, с $y\rho_{_V}$), что противоречит условию (ж).

Итак, $x\rho_V \nsim_{G_V} y\rho_V$. Поскольку G_V финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то существует гомоморфизм ρ группы G_V на конечную группу B такой, что $x\rho_V\rho \nsim_B y\rho_V\rho$. Гомоморфизм $\sigma = \rho_V\rho$ является искомым.

Таким образом, предложение 10 доказано.

<u>Доказательство теоремы 6.</u>

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема относительно сопряженности и $|H| < \infty$. Покажем, что группа G обладает этим свойством тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что выполняются следующие условия:

1. Индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены;

2. Для любых элементов h и k из H, не сопряженных в G, элементы hU_λ и kU_λ не сопряжены в G_λ/U_λ при любом $\lambda \in \Lambda$.

Предположим сначала, что группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Поскольку $|H| < \infty$, то существует нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что для любых элементов h и k из H, не сопряженных в G, элементы hN

и kN не сопряжены в G/N. Пусть $U_\lambda = G_\lambda \cap N$ $(\lambda \in \Lambda)$. Тогда U_λ – нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ и выполняется условие 1.

Покажем, что выполняется условие 2. Допустим противное, т.е. что существуют $h, k \in H$ такие, что $h \nsim_G k$ и $hU_\lambda \sim_{G_\lambda/U_\lambda} kU_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда существует элемент $g \in G_\lambda$ такой, что $h^{-1}g^{-1}kg \in U_\lambda$. Отсюда и из включения $U_\lambda \subseteq N$ следует, что $hN \sim_{G/N} kN$, что невозможно.

Обратно, предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что выполняются условия 1 и 2.

Из условия 2 следует, что $H \cap U_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Отсюда и из ограниченности индексов $[G_\lambda : U_\lambda]$ по теореме 3 заключаем, что $G \in R_{\mathcal{F}}$. Это дает возможность применять к группе G предложение 10.

Поскольку $H \cap U_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо. Ввиду условия 1 свободные множители G_λ/U_λ группы G_U являются конечными группами ограниченных порядков. По следствию 1.1 группа G_U финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Покажем, что этим свойством обладает и группа G, т.е. что для любых несопряженных элементов x и y из G существует гомоморфизм σ группы G на конечную группу B такой, что $x\sigma \nsim_B y\sigma$. Предложение 10 позволяет ограничиться рассмотрением случая, когда элементы x и y сопряжены в G с некоторыми элементами из H. Более того, без потери общности можно считать, что $x, y \in H$.

Итак, будем считать, что $x, y \in H$ и $x \nsim_G y$. Покажем, что $x\rho_U \nsim_{G_U} y\rho_U$. Допустим противное. Тогда по предложению 9 существуют элементы $h_1, \ldots, h_s \in H$ такие, что любые соседние члены последовательности

$$x\rho_U, h_1\rho_U, \ldots, h_s\rho_U, y\rho_U$$

сопряжены в подходящем свободном сомножителе G_λ/U_λ группы G_U. Отсюда и из условия 2 следует, что любые соседние члены последовательности $x, h_1, \ldots, h_s, y$ сопряжены в G. Поэтому $x \sim_G y$, что невозможно.

Таким образом, $x\rho_U \nsim_{G_U} y\rho_U$. Поскольку группа G_U финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу B такой, что $x\rho_U\rho \nsim_B y\rho_U\rho$. Гомоморфизм $\sigma = \rho_U\rho$ является искомым.

Теорема 6 доказана.

ГЛАВА 2

О свободном произведении конечно порожденных нильпотентных групп с одной циклической объединенной подгруппой.

§5. *Основные результаты второй главы.*

Г.Баумслаг [9] доказал, что свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением является финитно аппроксимируемой группой. В этой главе мы докажем несколько теорем, обобщающих и дополняющих этот результат.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ – конечно порожденная нильпотентная группа. И пусть G – свободное произведение групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной циклической подгруппой $H = (h)$.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простх чисел. Рассмотрим вопрос об аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами. Доказанная в первой главе теорема 5 дает критерий аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами в случае, если $|H| < \infty$. Поэтому мы будем далее предполагать, что H – бесконечная циклическая подгруппа группы G.

Мы будем далее предполагать, что на группы G_λ наложены следующие дополнительные ограничения:

1^0. Множество Λ содержит более одного элемента;

2^0. Для каждого $\lambda \in \Lambda \quad H$ – собственная подгруппа группы G_λ;

3^0. Полициклические ранги $r(G_\lambda)$ групп G_λ ограничены в совокупности;

4^0. Порядки конечных частей $\tau(G_\lambda)$ групп G_λ ограничены в совокупности.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$

$$n_\lambda = [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) \ : \ H]$$

индекс подгруппы H в своем изоляторе в группе G_λ. Хорошо известно, что $n_\lambda < \infty$. Обозначим через Q_G подгруппу аддитивной группы рациональных чисел, порожденную всеми дробями вида $1/n_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Обозначим через $Q_\mathcal{P}$ группу $\mathcal{P}$-ичных дробей, т.е. множество всех рациональных чисел, порядки которых по модулю Z являются $\mathcal{P}$-числами.

Вопрос об аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами наиболее просто решается в случае, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ не имеют кручения:

Теорема 7. *Пусть все сомножители G_λ являются группами без кручения. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда Q_G – собственная подгруппа группы $Q_\mathcal{P}$.*

Следующее утверждение является непосредственным следствием этой теоремы.

Следствие 7.1. *Пусть все сомножители G_λ является группами без кручения. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $Q_G \neq Q$.*

Таким образом, числа n_λ несут полную информацию об аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами при условии, что все G_λ – группы без кручения.

Будем теперь считать, что группы G_λ могут иметь кручение.

Обозначим через Π множество всех простых чисел p таких, что группа p-ичных дробей Q_p содержится в Q_G. Если множество Π не пусто, то обозначим через m порядок элемента h по модулю пересечения всех нормальных подгрупп конечного Π-индекса группы G. Как показано в § 8 (предложение 30) m – конечное Π-число.

Теорема 8. *Если $\Pi \neq \varnothing$, то группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1. Q_G – собственная подгруппа группы $Q_\mathcal{P}$;

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ нормальное замыкание элемента h^m в G_λ является группой без Π-кручения.

Если же $\Pi = \varnothing$, то группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $Q_G \leqslant Q_\mathcal{P}$.

В последнем утверждении теоремы 8 условие $Q_G \leq Q_\mathcal{P}$ можно заменить условием $Q_G < Q_\mathcal{P}$. Кроме того, если все G_λ – группы без кручения, то условие 2 из теоремы 8 выполняется автоматически. Поэтому теорема 7 является следствием теоремы 8.

Автор благодарен А.Л.Шмелькину за предложенную им идею использовать рациональные числа в формулировке критерия финитной аппроксимируемости группы G.

Мы сейчас приведем другую равносильную формулировку теоремы 8, более удобную для доказательства.

Теорема 9. *Если* $\Pi \neq \varnothing$, *то группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

1. Все n_λ *являются* $\mathcal{P}$*-числами;*

2. Π *– собственное подмножество множества* $\mathcal{P}$*;*

3. Для любого $\lambda \in \Lambda$ *нормальное замыкание элемента* h^m *в группе* G_λ *является группой без* Π*-кручения.*

Если же $\Pi = \varnothing$, *то группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда все* n_λ *являются* $\mathcal{P}$*-числами.*

Доказательство теоремы 9 приведено в § 8. Равносильность формулировок теорем 8 и 9 имеет место ввиду следующих двух утверждений из формулировки предложения 26 (§ 8):

1. $Q_G \leqslant Q_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда все n_λ – $\mathcal{P}$-числа;

2. Q_G – собственная подгруппа группы $Q_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда все n_λ – $\mathcal{P}$-числа и Π – собственное подмножество множества $\mathcal{P}$.

Если числа n_λ ограничены в совокупности, то $\Pi = \varnothing$. Применяя в этой ситуации теорему 9, получаем следующее утверждение, обобщающее отмеченный выше результат Г.Баумслага.

Следствие 9.1. *Пусть числа* n_λ *ограничены в совокупности. Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда все* n_λ *являются* $\mathcal{P}$*-числами. В частности,* $G \in {}_R\mathcal{F}$.

Следствие 9.2. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ G_λ *– группа без кручения. Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда все* n_λ *–* $\mathcal{P}$*-числа и* Π *– собственное подмножество множества* $\mathcal{P}$.

Рассмотрим еще одно следствие из теоремы 9.

Теорема 10. *Если* $\Pi = \varnothing$, *то* $G \in {}_R\mathcal{F}$. *Если же* $\Pi \neq \varnothing$, *то группа* $G \in {}_R\mathcal{F}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1. Существует простое число, не входящее в Π;

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ *нормальное замыкание элемента* h^m *в группе* G_λ *является группой без* Π*-кручения.*

Следующее утверждение вытекает из теоремы 10, а также из следствия 9.2.

Следствие 10.1. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ G_λ *– группа без кручения. Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}$ *тогда и только тогда, когда существует простое число, не входящее в* Π.

Рассмотрим теперь критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами.

Теорема 11. *Пусть p – простое число. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда числа n_λ ограничены и являются степенями числа p.*

Это утверждение также является следствием теоремы 9. В самом деле, достаточность в теореме 11 имеет место в силу следствия 9.1.

Докажем необходимость. Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. По теореме 9 $\Pi \subset \{p\}$. Поэтому $\Pi = \varnothing$. По теореме 9 все n_λ – степени числа p. Они ограничены, поскольку в противном случае $Q_G = Q_p$ и, следовательно, $\Pi = \{p\}$, что невозможно.

Сформулируем теперь критерий аппроксимируемости группы G конечными нильпотентными группами. Класс всех конечных нильпотентных групп обозначим через $\mathcal{F}_N$.

Теорема 12. *Следующие три условия равносильны:*

1. $G \in {}_R\mathcal{F}_N$.

2. Существует простое число p такое, что все n_λ являются степенями числа p, и подгруппа, высекаемая в H пересечением всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G, лежит в центре группы G.

3. Существуют простые числа p и q такие, что $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$.

Следствие 12.1. *Пусть все G_λ – группы без кручения. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_N$, тогда и только тогда, когда все n_λ являются степенями одного и того же простого числа и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:*

1. Числа n_λ ограничены.

2. Подгруппа H лежит в центре группы G.

Доказательства теоремы 12 и следствия 12.1 приведены в § 9.

Вопрос об аппроксимируемости группы G конечными разрешимыми группами решается очень просто. По следствию 2.3 группа G аппроксимируется конечными разрешимыми группами тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема. Вопрос о финитной аппроксимируемости группы G решается теоремой 10.

§6. *Некоторые замечания о конечно порожденных нильпотентных группах.*

Пусть G – конечно порожденная нильпотентная группа, $\tau(G)$ – конечная часть группы G. Изолятором подгруппы H группы G называется подмножество $\mathcal{J}_G(H)$ группы G, состоящее из всех элементов

$g \in G$ таких, что $g^n \in H$ для подходящего целого положительного числа n. Хорошо известно, что $\mathcal{J}_G(H) \leqslant G$ и $[\mathcal{J}_G(H) : H] < \infty$ (см.напр. [8], лемма 4.5).

Предложение 11. *Пусть $\tau(G) = 1$ и $H = (h)$ – циклическая подгруппа группы G. Тогда $\mathcal{J}_G(H)$ – циклическая подгруппа и уравнение*

$$x^{[\mathcal{J}_G(H):H]} = h \tag{1}$$

разрешимо в группе G.

Доказательство. Поскольку $[\mathcal{J}_G(H) : H] < \infty$, то $\mathcal{J}_G(H)$ - почти циклическая группа без кручения. Отсюда следует, что $\mathcal{J}_G(H) = (g)$ – циклическая группа. Очевидно, что элемент g удовлетворяет уравнению (1).

Предложение 12. *Пусть*

$$\overline{G} = G/\tau(G),\ H \leqslant G,\ \overline{H} = H\tau(G)/\tau(G).$$

Тогда

$$\mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H}) = \mathcal{J}_G(H)/\tau(G). \tag{2}$$

Если $H \cap \tau(G) = 1$, то

$$[\mathcal{J}_G(H) : H] = [\mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H}) : \overline{H}]\ |\tau(G)|. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x\tau(G) \in \mathcal{J}_G(H)/\tau(G)$. Тогда $x \in \mathcal{J}_G(H)$, т.е. $x^n \in H$ для некоторого $n > 0$. Поэтому $(x\tau(G))^n \in \overline{H}$, т.е. $x\tau(G) \in \mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H})$.

Наоборот, пусть $x\tau(G) \in \mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H})$. Тогда $(x\tau(G))^n \in H\tau(G)/\tau(G)$, т.е. $x^n \in H\tau(G)$ для некоторого $n > 0$. Отсюда и из того, что $[H\tau(G) : H] < \infty$, следует, что $x^{nk} \in H$ $(k > 0)$, т.е. $x \in \mathcal{J}_G(H)$. Поэтому $x\tau(G) \in \mathcal{J}_G(H)/\tau(G)$.

Равенство (2) доказано.

Докажем равенство (3). Пусть $H \cap \tau(G) = 1$. Тогда $[H\tau(G) : H] = |\tau(G)|$. Отсюда и из того, что $H \leqslant H\tau(G) \leqslant \mathcal{J}_G(H)$ с учетом (2) получаем:

$$\begin{aligned}[\mathcal{J}_G(H) : H] &= [\mathcal{J}_G(H) : H\tau(G)][H\tau(G) : H] = \\ &= [\mathcal{J}_G(H)/\tau(G) : H\tau(G)/\tau(G)]|\tau(G)| = \\ &= [\mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H}) : \overline{H}]|\tau(G)|.\end{aligned}$$

Предложение 13. *Пусть $H = (h)$ – циклическая подгруппа группы G. Тогда уравнение*

$$x^{[\mathcal{J}_G(H):H]} = h^{|\tau(G)|} \tag{4}$$

разрешимо в группе G.

<u>Доказательство.</u> Опуская тривиальный случай, когда $|h| < \infty$, будем считать, что $|h| = \infty$. Заметим, что если X – подгруппа конечного индекса нильпотентной группы F, то

$$F^{[F:X]} \leqslant X. \tag{5}$$

Это включение очевидно, если $X \trianglelefteq F$. Если же подгруппа X не инвариантна, то включение (5) также имеет место, поскольку последовательность нормализаторов

$$N_0 = H \leqslant N_1 = N_G(N_0) \leqslant N_2 = N_G(N_1) \leqslant \dots$$

достигает группу G.

Введем обозначения: $\overline{G} = G/\tau(G)$, $\overline{h} = h\tau(G)$, $\overline{H} = (\overline{h}) = H\tau(G)/\tau(G)$, $n = [\mathcal{J}_G(H) : H]$, $\overline{n} = [\mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H}) : \overline{H}]$. По предложению 12 $n = \overline{n}|\tau(G)|$. По предложению 11 существует элемент $\overline{g} = g\tau(G) \in G/\tau(G)$ такой, что

$$\overline{g}^{\,\overline{n}} = \overline{h}. \tag{6}$$

Очевидно, что $g^{\overline{n}} \in H\tau(G)$. Отсюда и из того, что $[H\tau(G) : H] = |\tau(G)|$, с учетом (5) заключаем, что $g^{\overline{n}|\tau(G)|} \in H$, т.е.

$$g^{\overline{n}|\tau(G)|} = h^k \tag{7}$$

для некоторого целого числа k. Из (6) и (7) получаем:

$$\overline{g}^{\,\overline{n}|\tau(G)|} = \overline{h}^{\,k} = \overline{g}^{\,\overline{n}k}.$$

Поскольку $|\overline{g}| = \infty$, то ввиду последнего равенства $|\tau(G)| = k$. Равенство (7) принимает вид:

$$g^n = g^{\overline{n}|\tau(G)|} = h^k = h^{|\tau(G)|}.$$

Поэтому уравнение (4) разрешимо в G.

Далее, через $r(G)$ будем обозначать полициклический ранг группы G.

Предложение 14. *Пусть сумма $r(G) + |\tau(G)|$ не превосходит числа r. И пусть для элемента g группы G уравнение*

$$x^{p^s} = g \tag{8}$$

не разрешимо в группе G, где p – простое число, s – целое положительное число. Тогда существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что $|gN| = p$ и $[G : N] \leqslant p^{sr^2}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть n – ступень нильпотентности группы G. Очевидно, что $n \leqslant r(G) + |\tau(G)|$. Поэтому $n \leqslant r$. Пусть k – целое положительное число. Тогда

$$G^{k^r} \leqslant G^{k^n}.$$

Как показал А.И.Мальцев ([7], лемма 2), из любого элемента подгруппы G^{k^n} (и, в частности, из любого элемента подгруппы G^{k^r}) в группе G извлекается корень степени k. Поэтому из любого элемента подгруппы

$$L = G^{p^{sr}}$$

в группе G извлекается корень степени p^s. Поскольку уравнение (8) не разрешимо в G, то $g \notin L$.

Таким образом, L – нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G, не содержащая g. Поэтому найдется нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что $L \leqslant N$ и $|gN| = p$. Поскольку $L \leqslant N \leqslant G$, то

$$(G/N)^{p^{sr}} = 1. \tag{$*$}$$

Из неравенства $r(G) + |\tau(G)| \leqslant r$ следует, что G обладает полициклическим рядом с не более чем r факторами. Очевидно, что группа G/N обладает тем же свойством. Отсюда и из $(*)$ следует, что $[G : N] \leqslant p^{sr^2}$.

Предложение 15. *Пусть $H \leqslant G$, p и q – различные простые числа, $a, b, \in G \backslash H$, $a^p \in H$ и $b^q \in H$. Тогда $ba^{-1} \notin H$.*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим цепочку нормализаторов

$$N_0 = H \leqslant N_1 = N_G(N_0) \leqslant N_2 = N_G(N_1) \leqslant \ldots$$

Хорошо известно, что $N_r = G$ для некоторого r.
Пусть $a \in N_k \backslash N_{k-1}, b \in N_l \backslash N_{l-1}$. Рассмотрим два случая:

1. $k = l$. Тогда $a, b \in N_k \backslash N_{k-1}$. Отсюда и из того, что $a^p, b^q \in \in H \leqslant N_{k-1}$, следует, что элементы aN_{k-1} и bN_{k-1} группы N_k/N_{k-1} имеют порядки p и q. Поскольку $p \neq q$, то $aN_{k-1} \neq bN_{k-1}$. Поэтому $ab^{-1} \notin N_{k-1}$ и, тем более, $ab^{-1} \notin H$.

2. $k \neq l$. Пусть для определенности $k < l$. Тогда $N_k \leqslant N_{l-1}$ и, следовательно, $a \in N_{l-1}$, $b \in N_l \backslash N_{l-1}$. Поэтому $ab^{-1} \notin N_{l-1}$ и, тем более, $ab^{-1} \notin H$.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел. С помощью элементарных свойств конечно порожденных нильпотентных групп легко доказать следующие три утверждения, первое из которых отмечается в [16].

Предложение 16. *Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $\tau(G)$ – $\mathcal{P}$-группа.*

Предложение 17. *Пусть $g \in G$, $|g| = \infty$ и n – целое положительное $\mathcal{P}$-число. Тогда существует гомоморфизм φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $|g\varphi| = n$.*

Предложение 18. *Пересечение конечного числа подгрупп конечного $\mathcal{P}$-индекса нильпотентной группы снова является подгруппой конечного $\mathcal{P}$-индекса этой группы.*

В заключение, докажем еще одно предложение технического характера.

Предложение 19. *Пусть $H = (h)$ – бесконечная циклическая подгруппа группы G, m – целое положительное число, V – нормальное замыкание элемента h^m в группе G. Тогда $\tau(G) \cap HV = \tau(G) \cap V$.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $t \in \tau(G) \cap HV$. Тогда $t = h^k v$, где $k \in \in Z$, $v \in V$. Пусть ε – естественный гомоморфизм группы G на группу $\overline{G} = G/\tau(G)$. Тогда

$$(h\varepsilon)^k v\varepsilon = t\varepsilon = 1.$$

Поскольку $|h\varepsilon| = \infty$, то по предложению 17 существует гомоморфизм φ группы $\overline{G}$ на конечную группу такой, что $|h\varepsilon\varphi| = m$. При этом

$$(h\varepsilon\varphi)^k = (v\varepsilon\varphi)^{-1} \tag{9}$$

Поскольку $v \in V$, то v раскладывается в произведение элементов группы G, сопряженных с $h^{\pm m}$. Отсюда и из того, что $h^m\varepsilon\varphi = 1$, следует, что $v\varepsilon\varphi = 1$. Поэтому с учетом (9) $(h\varepsilon\varphi)^k = 1$. Поскольку $|h\varepsilon\varphi| = m$, то k делится на m. Следовательно, $h^k \in V$. Поскольку $t = h^k v$, где $v \in V$, то $t \in V$. Поэтому $t \in \tau(G) \cap V$. Таким образом, $(\tau(G) \cap HV) \subseteq (\tau(G) \cap V)$. Обратное включение очевидно.

§7. Об отделимости подгрупп конечно порожденной нильпотентной группы.

Пусть G – конечно порожденная нильпотентная группа. И пусть $\mathcal{P}$ – некоторое множество простых чисел. Целое положительное число n будем называть $\mathcal{P}$-числом, если все его простые делители принадлежат $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$-изолятором подгруппы H группы G называется множество $H_{\mathcal{P}}$ всех элементов $x \in G$ таких, что $x^n \in H$ для подходящего $\mathcal{P}$-числа n. Если $\mathcal{P}$ – множество всех простых чисел, то $H_{\mathcal{P}} = \mathcal{J}_G(H)$.

В [8] (лемма 4.5) доказано следующее утверждение.

Предложение 20. *$H_{\mathcal{P}}$ – подгруппа группы G и $[H_{\mathcal{P}} : H]$ – конечное $\mathcal{P}$-число.*

Подгруппа H группы G называется $\mathcal{P}$-изолированной, если выполняется одно из трех равносильных условий:

1. $H = H_{\mathcal{P}}$;

2. Для любого $x \in G$ и для любого $p \in \mathcal{P}$

$$(x^p \in H) \Rightarrow (x \in H);$$

3. Для любого $x \in G$ и для любого $\mathcal{P}$-числа n

$$(x^n \in H) \Rightarrow (x \in H).$$

Обозначим через $\mathcal{P}'$ дополнение множества $\mathcal{P}$ в множестве всех простых чисел. Тогда подгруппа H группы G $\mathcal{P}'$-изолирована в том и только том случае, когда для любого простого числа q не лежащего в $\mathcal{P}$ и для любого $x \in G$ $(x^q \in H) \Rightarrow (x \in H)$.

Предложение 21. *Пусть $H \leqslant G$. Следующие три условия равносильны:*

1. Подгруппа H $\mathcal{P}'$-изолирована;
2. $\mathcal{J}_G(H) = H_{\mathcal{P}}$;
3. $[\mathcal{J}_G(H) : H]$ – $\mathcal{P}$-число.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1. И пусть $x \in \in \mathcal{J}_G(H)$, т.е. $x^n \in H$, где $n > 0$. Запишем n в виде $n = kl$, где k – $\mathcal{P}$-число, l – $\mathcal{P}'$-число. Поскольку H $\mathcal{P}'$-изолирована и $(x^k)^l \in H$, то $x^k \in H$. Отсюда и из того, что k – $\mathcal{P}$-число следует, что $x \in H_{\mathcal{P}}$. Таким образом, $\mathcal{J}_G(H) \subseteq H_{\mathcal{P}}$. Обратное включение очевидно. Поэтому выполняется условие 2.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ справедлива ввиду предложения 20.

Остается проверить импликацию $3 \Rightarrow 1$.

Пусть H – подгруппа конечного $\mathcal{P}$-индекса l группы $\mathcal{J}_G(H)$.

Покажем, что H – $\mathcal{P}'$-изолированная подгруппа группы G. Пусть $x \in G$ и $x^q \in H$, где q – простое число, не лежащее в $\mathcal{P}$. Тогда $x \in \mathcal{J}_G(H)$ и, в силу (5), (§ 6), $x^l \in H$. Поскольку $(q, l) = 1$, то $x \in H$. Таким образом, выполняется условие 1.

В [8] (лемма 4.11) доказано, что если $H \leqslant G$, то $N_G(H_{\mathcal{P}}) = = (N_G(H))_{\mathcal{P}}$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение 22. *Если H – $\mathcal{P}$-изолированная подгруппа группы G, то ее нормализатор $N_G(H)$ является $\mathcal{P}$-изолированной подгруппой группы G.*

Далее, будем предполагать, что $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Подгруппу H группы G будем называть $\mathcal{P}$-отделимой, если для любого элемента $x \in G \backslash H$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$.

Предложение 23. *Подгруппа H группы G $\mathcal{P}$-отделима тогда и только тогда, когда она $\mathcal{P}'$-изолирована.*

Приведем доказательство этого утверждения, предложенное Д.И.Молдаванским. Пусть $H \leqslant G$. Хорошо известно, что ряд нормализаторов

$$N_1 = N_G(H) \leqslant N_2 = N_G(N_1) \leqslant \dots$$

достигает G. Обозначим через $k(G, H)$ наименьшее натуральное число i такое, что $N_i = G$.

Если подгруппа H $\mathcal{P}$-отделима, то ее $\mathcal{P}'$-изолированность очевидна. Докажем обратное утверждение индукцией по $k(G, H)$.

Пусть $k(G, H) = 1$, т.е. $H \trianglelefteq G$. Предположим, что H $\mathcal{P}'$-изолирована. Тогда $\tau(G/H)$ – $\mathcal{P}$-группа, т.е. $G/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Отсюда следует, что H $\mathcal{P}$-отделима.

Предположим теперь, что доказываемое предложение справедливо для всех пар G, H таких, что $k(G, H) < k$.

Пусть $k(G, H) = k$. Пусть $M = N_{k-1}$. Тогда M – нормальная подгруппа группы G, содержащая подгруппы $H, N_1, \ldots, \ N_{k-2}$ и

$$\begin{aligned} &N_M(H) = N_G(H) = N_1, \\ &N_M(N_1) = N_G(N_1) = N_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &N_M(N_{k-2}) = N_G(N_{k-2}) = N_{k-1} = M. \end{aligned}$$

Поэтому $k(M, H) = k - 1$.

Пусть H – $\mathcal{P}'$-изолированная подгруппа группы G. Тогда H – $\mathcal{P}'$-изолированна в M. По индуктивному предположению H – $\mathcal{P}$-отделимая подгруппа группы M.

Поскольку H – $\mathcal{P}'$-изолирована в G, то по предложению 22 все N_j и, в частности, M $\mathcal{P}'$-изолированы в G. Поэтому $\tau(G/M)$ – $\mathcal{P}$-группа, т.е. $G/M \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и, следовательно, M – $\mathcal{P}$-отделимая подгруппа группы G.

Пусть $x \in G \backslash H$. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. $\mathcal{P}$-отделимость подгруппы M позволяет нам ограничиться рассмотрением случая, когда $x \in M \backslash H$.

Итак, пусть $x \in M \backslash H$. Поскольку H – $\mathcal{P}$-отделима в M, то существует нормальная подгруппа L конечного $\mathcal{P}$-индекса группы M такая, что $x \notin HL$. Пусть U – пересечение всех подгрупп группы M, имеющих тот же индекс, что и L. По предложению 18 $[M : U]$ – $\mathcal{P}$-число. Поскольку U – характеристическая подгруппа группы M, инвариантной в G, то $U \trianglelefteq G$. Группа G/U является расширением конечной $\mathcal{P}$-группы M/U при помощи G/M. Поскольку $\tau(G/M)$ – $\mathcal{P}$-группа, то $\tau(G/U)$ – $\mathcal{P}$-группа, т.е. $G/U \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ ввиду предложения 16. Поскольку $x \notin HL$ и $U \subseteq L$, то $x \notin HU$, т.е. $xU \notin HU/U$. Заметим, что $HU/U \leqslant M/U$ и, следовательно, $|HU/U| < \infty$. Таким образом, элемент xU не лежит в конечной подгруппе HU/U группы $G/U \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Поэтому существует гомоморфизм ψ группы G/U на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $(xU)\psi \notin (HU/U)\psi$. Пусть φ – произведение естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \to G/U$ и гомоморфизма

ψ. Тогда φ – гомоморфизм группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$.

Таким образом, подгруппа H группы G $\mathcal{P}$-отделима.

Предложение 24. *Пусть $\tau(G) = 1$ и H – циклическая $\mathcal{P}'$-изолированная подгруппа группы G. И пусть $p \in \mathcal{P}$. Тогда для любого $x \in G\backslash H$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $H\varphi$ – p-группа и $x\varphi \notin H\varphi$.*

Доказательство. Поскольку $H = (h)$ – циклическая подгруппа группы G и $\tau(G) = 1$, то по предложению 11 $\mathcal{J}_G(H)$ – циклическая. Пусть $\mathcal{J}_G(H) = (g)$, $h = g^n$. Поскольку H $\mathcal{P}'$-изолирована, то n – $\mathcal{P}$-число. Опуская тривиальный случай, когда $H = 1$, будем считать, что $H \neq 1$.

Пусть $x \in G\backslash H$. Возможны два случая:

1. $x \in \mathcal{J}_G(H)\backslash H$, т.е. $x = g^k$, где k не делится на n. Поскольку n – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 17 существует гомоморфизм φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $|g\varphi| = n$. Тогда $x\varphi \neq 1 = H\varphi$. Поэтому $x\varphi \notin H\varphi$. При этом $H\varphi$ – p-группа.

2. $x \in G\backslash \mathcal{J}_G(H)$. Поскольку $\mathcal{J}_G(H)$ – изолированная подгруппа, то она p'-изолирована и, следовательно, p-отделима ввиду предложения 23. Поэтому существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Этот гомоморфизм является искомым.

Предложение 25. *Пусть H – бесконечная циклическая $\mathcal{P}'$-изолированная подгруппа группы G, Π – собственное подмножество множества $\mathcal{P}$, T – наибольшая Π-подгруппа группы G. Тогда для любого $x \in G\backslash HT$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $H\varphi$ – $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-группа и $x\varphi \notin H\varphi$.*

Доказательство. Пусть $\overline{G} = G/\tau(G), \overline{H} = H\tau(G)/\tau(G)$. По предложению 12

$$[\mathcal{J}_G(H) : H] = [\mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H}) : \overline{H}] \cdot |\tau(G)|.$$

Поскольку H – $\mathcal{P}'$-изолирована в G, то по предложению 21 $[\mathcal{J}_G(H) : : H]$ – $\mathcal{P}$-число. Поэтому $[\mathcal{J}_{\overline{G}}(\overline{H}) : \overline{H}]$ и $|\tau(G)|$ – $\mathcal{P}$-числа, т.е. $\overline{H}$ $\mathcal{P}'$-изолирована в $\overline{G}$ и $\tau(G)$ – $\mathcal{P}$-группа.

Пусть $x \in G\backslash HT$. Возможны два случая.

1. $x \in G\backslash H\tau(G)$, т.е. $x\tau(G) \in \overline{G}\backslash\overline{H}$. Зафиксируем некоторое число $p \in \mathcal{P}\backslash\Pi$. Поскольку $\tau(\overline{G}) = 1$ и $\overline{H}$ – $\mathcal{P}'$-изолированная циклическая подгруппа группы $\overline{G}$, не содержащая элемент $\overline{x} = x\tau(G)$, то по предложению 24 существует гомоморфизм $\overline{\varphi}$ группы $\overline{G}$ на конечную

$\mathcal{P}$-группу такой, что $\overline{H}\,\overline{\varphi}$ – p-группа и $\overline{x}\,\overline{\varphi} \notin \overline{H}\overline{\varphi}$. Поскольку $p \in \mathcal{P}\backslash\Pi$, то $\overline{H}\overline{\varphi}$ – $\mathcal{P}\backslash\Pi$-группа. Пусть φ – произведение естественного гомоморфизма $G \to \overline{G}$ и гомоморфизма $\overline{\varphi}$. Тогда φ – гомоморфизм группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $H\varphi$ – $\mathcal{P}\backslash\Pi$-группа и $x\varphi \notin H\varphi$.

2. $x \in H\tau(G)\backslash HT$. В этом случае $x = h^k g$, где h – порождающий элемент группы H, $g \in \tau(G)\backslash T$. Поскольку $g \notin T$, то порядок элемента g не является Π-числом. Зафиксируем простой делитель $p \notin \Pi$ порядка элемента g. Поскольку $\tau(G)$ – $\mathcal{P}$-группа, то $p \in \mathcal{P}\backslash\Pi$.

Покажем, что $g \notin H_{p'}$. Допустим противное, т.е. что $g^n \in H$ для некоторого p'-числа n. Поскольку $g \in \tau(G)$ и $\tau(G) \cap H = 1$, то $g^n = 1$. Поэтому n делится на $|g|$ и, следовательно, p делит p'-число n, что невозможно. Таким образом, $g \notin H_{p'}$.

Очевидно, что $H_{p'}$ – p'-изолированная подгруппа группы G. По предложению 23 подгруппа $H_{p'}$ p-отделима. Поскольку $g \in G\backslash H_{p'}$, то существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $g\varphi \notin (Hp')\varphi$ и, в частности $g\varphi \notin H\varphi$. Поскольку $x = h^k g$ и $h \in H$, то $x\varphi \notin H\varphi$. Поскольку $p \in \mathcal{P}\backslash\Pi$, то φ – гомоморфизм группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу и $H\varphi$ – $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-группа.

§8. О свободном произведении конечно порожденных нильпотентных групп с одной циклической объединенной подгруппой.

Пусть, как и § 5, G – свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной бесконечной циклической подгруппой $H = (h)$. Будем предполагать, что на группу G наложены ограничения $1^0, 2^0, 3^0$ и 4^0, перечисленные в § 5. Пусть, как и выше

$$n_\lambda = [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : H] \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

Q_G – подгруппа группы Q, порожденная всеми дробями $1/n_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, Π – множество всех простых чисел p таких, что $Q_p \leqslant Q_G$.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел, $Q_{\mathcal{P}}$ – группа $\mathcal{P}$-ичных дробей.

Предложение 26. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $Q_G \leqslant Q_{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда все n_λ – $\mathcal{P}$-числа.

2. $Q_G = Q_{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда все n_λ – $\mathcal{P}$-числа и $\Pi = \mathcal{P}$.

3. Q_G – собственная подгруппа группы $Q_{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда все n_λ – $\mathcal{P}$-числа и Π – собственное подмножество множества $\mathcal{P}$.

Доказательство. Заметим, что

$$Q_{\mathcal{P}} = \sum_{p\in\mathcal{P}} Q_p. \tag{10}$$

В самом деле, если $p \in \mathcal{P}$, то Q_p/Z – примарная компонента групп $Q_{\mathcal{P}}/Z$. Поскольку периодическая абелева группа раскладывается в прямую сумму своих примарных компонент, то

$$Q_{\mathcal{P}}/Z = \sum_{p\in\mathcal{P}} Q_p/Z,$$

откуда следует равенство (10).

Утверждение 1 из формулировки предложения 26 очевидно.

Докажем второе утверждение. Пусть $Q_G = Q_{\mathcal{P}}$. Поскольку для любого $p \in \Pi \quad Q_p \leqslant Q_G = Q_{\mathcal{P}}$, то $\Pi \subseteq \mathcal{P}$. Поскольку для любого $p \in \mathcal{P} \quad Q_p \leqslant Q_{\mathcal{P}} = Q_G$, то $\mathcal{P} \subseteq \Pi$. Таким образом, $\Pi = \mathcal{P}$. Поскольку $Q_G \leqslant Q_{\mathcal{P}}$, то ввиду утверждение 1 все n_λ – $\mathcal{P}$-числа.

Наоборот, пусть все n_λ – $\mathcal{P}$-числа и $\Pi = \mathcal{P}$. По первому утверждению $Q_G \leqslant Q_{\mathcal{P}}$. Пусть $p \in \mathcal{P} = \Pi$. Тогда $Q_p \leqslant Q_G$. Отсюда и из (10) следует, что $Q_{\mathcal{P}} \leqslant Q_G$. Таким образом, $Q_G = Q_{\mathcal{P}}$.

Для доказательства третьего утверждения проверим равносильность следующих трех условий:

(а) $Q_G < Q_{\mathcal{P}}$;

(б) Все n_λ – $\mathcal{P}$-числа и $\Pi \neq \mathcal{P}$;

(в) Все n_λ – $\mathcal{P}$-числа и $\Pi \subset \mathcal{P}$.

Равносильность условий (а) и (б) очевидна в силу первых двух доказанных утверждений. Импликация (в) $\Rightarrow$ (б) также очеидна. Остается проверить импликацию (б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $\Pi \neq \mathcal{P}$ и все n_λ – $\mathcal{P}$-числа. Тогда $Q_G \leqslant Q_{\mathcal{P}}$. Если $p \in \Pi$, то $Q_p \leqslant Q_G \leqslant Q_{\mathcal{P}}$. Поэтому $\Pi \subseteq \mathcal{P}$ и, следовательно, $\Pi \subset \mathcal{P}$.

Таким образом, утверждения (а), (б) и (в) равносильны и утверждение 3 доказано.

Предложение 27. *Простое число p принадлежит множеству Π тогда и только тогда, когда для любого целого положительного числа s существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что $p^s | n_\lambda$.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $p \in \Pi$, т.е. $Q_p \leqslant Q_G$. Тогда для любого целого положительного числа s $1/p^s \in Q_G$, т.е.

$$\frac{1}{p^s} = \frac{m_1}{n_{\lambda_1}} + \ldots + \frac{m_j}{n_{\lambda_j}} = \frac{k}{HOK(n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_j})},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_j \in \Lambda$; $k, m_1, \ldots, m_j \in Z$. Поэтому $p^s | HOK(n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_j})$ и, следовательно, $p^s | n_{\lambda_i}$ для некоторого i. Таким образом, для любого целого положительного числа s существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что p^s делит n_λ.

Наоборот, предположим, что p – простое число и для любого целого положительного числа s существуют $\lambda \in \Lambda$ и $r \in Z$ такие, что $n_\lambda = rp^s$, т.е. $1/p^s = r/n_\lambda$. Тогда $Q_p \leqslant Q_G$, т.е. $p \in \Pi$. Предложение доказано.

Введем обозначение:

$$d = HOK_{\lambda \in \Lambda} |\tau(G_\lambda)|.$$

Поскольку числа $|\tau(G_\lambda)|$ ограничены, то d – конечное число.

Предложение 28. *Уравнение*

$$x^{n_\lambda} = h^d \tag{11}$$

разрешимо в группе G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\lambda \in \Lambda$. По предложению 13 уравнение

$$x^{[\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : H]} = h^{|\tau(G_\lambda)|}$$

разрешимо в G_λ, т.е.

$$v^{n_\lambda} = h^{|\tau(G_\lambda)|}$$

для некоторого $v \in G_\lambda$. Возводя обе части этого равенства в степень

$$k = \frac{d}{|\tau(G_\lambda)|},$$

получаем:

$$(v^k)^{n_\lambda} = h^d.$$

Поэтому уравнение (11) разрешимо в G_λ.

Предложение 29. *Пусть σ – гомоморфизм группы G на конечную Π-группу. Тогда $h^d\sigma = 1$.*

Доказательство. Пусть σ – гомоморфизм группы G на конечную Π-группу порядка

$$n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} \qquad (p_i \in \Pi, i = 1, \dots, r).$$

По предложению 27 для каждого $i = 1, \dots, r$ существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что

$$p_i^{s_i} \mid n_\lambda.$$

Отсюда и из предложения 28 следует, что для каждого $i = 1, \dots, r$ найдется элемент $g_i \in G$ такой, что

$$g_i^{p_i^{s_i}} = h^d.$$

Пусть

$$n_i = n/p_i^{s_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Тогда

$$h^{dn_i} = g_i^n, \quad (h^d\sigma)^{n_i} = (g_i\sigma)^n = 1$$

для любого $i = 1, \dots, r$. Поскольку числа $n_1, \dots, n_r$ взаимно просты в совокупности, то $h^d\sigma = 1$.

Предложение 30. *Пусть множество Π не пусто. Тогда элемент h имеет конечный порядок m по модулю пересечения всех нормальных подгрупп конечного Π-индекса группы G. Существует нормальная подгруппа M конечного Π-индекса группы G такая, что $|hM| = m$, в частности, m – Π-число.*

Доказательство. Пусть N – пересечение всех нормальных подгрупп конечного Π-индекса группы G. По предложению 29 $h^d \in N$. Поэтому $|hN| = m < \infty$. Пусть $k \in Z$ и $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда существует нормальная подгруппа M_k конечного Π-индекса группы G такая, что $x^k \notin M_k$. Пусть

$$M = \bigcap_{k=1}^{m-1} M_k.$$

Тогда M – нормальная подгруппа конечного Π-индекса группы G и $|hM| = m$.

Предложение 31. *Если* $G \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, *то все* n_λ *являются* $\mathcal{P}$-*числами.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Допустим, что для некоторого $\lambda \in \Lambda$ n_λ не является $\mathcal{P}$-числом. По предложению 21 подгруппа H не $\mathcal{P}'$-изолирована в G_λ. По предложению 23 H не является $\mathcal{P}$-отделимой подгруппой группы G_λ. Поэтому существует элемент $x \in \in G_\lambda \backslash H$ такой, что $x\varphi \in H\varphi$ при любом гомоморфизме φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу.

Пусть $\mu \in \Lambda$ и $\mu \neq \lambda$. Зафиксируем элемент $y \in G_\mu \backslash H$. Рассмотрим последовательность простых коммутаторов:

$$u_1 = y, \quad u_2 = x^{-1}u_1^{-1}xu_1, \quad u_3 = x^{-1}u_2^{-1}xu_2, \ldots$$

Пусть φ – гомоморфизм группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу. Тогда $x\varphi \in \in H\varphi$ и, следовательно, элемент $u_n\varphi$ можно рассматривать как простой коммутатор веса n элементов группы $G_\mu\varphi$. Поэтому если n больше ступени нильпотентности группы G_μ, то $u_n\varphi = 1$. Поскольку $G \in \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ и $u_n\varphi = 1$ при любом гомоморфизме φ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу, то $u_n = 1$, что невозможно.

Таким образом, все n_λ являются $\mathcal{P}$-числами.

Предложение 32. *Если* $G \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, *то* Π *– собственное подмножество множества* $\mathcal{P}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. По предложению 31 все n_λ являются $\mathcal{P}$-числами. Если $\Pi = \varnothing$, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть $\Pi \neq \varnothing$ и $p \in \Pi$. По предложению 27 $p \mid n_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Поэтому $p \in \mathcal{P}$. Таким образом, $\Pi \subseteq \mathcal{P}$.

По предложению 29 $h^d\sigma = 1$ при любом гомоморфизме σ группы G на конечную Π-группу. Поэтому $G \notin {}_R\mathcal{F}_{\Pi}$. Отсюда и из того, что $G \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ следует, что $\Pi \neq \mathcal{P}$.

Таким образом, $\Pi \subset \mathcal{P}$.

Предложение 33. *Пусть* $\Pi \neq \varnothing$, m *– такое же, как в предложении 30. Если группа* G *финитно аппроксимируема, то для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *нормальное замыкание элемента* h^m *в группе* G_λ *является группой без* Π-*кручения.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}$, $\mu \in \Lambda$. Покажем, что нормальное замыкание W элемента h^m в группе G_μ является группой без Π-кручения. Допустим противное, т.е. что W содержит неединичный Π-элемент w.

Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}$, то найдется нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что $w \notin N$. Пусть $\lambda \in \Lambda$, $V_\lambda = G_\lambda \cap N$, U_λ – подгруппа группы G_λ, состоящая из всех элементов группы G_λ, имеющих Π'-порядки по модулю V_λ. Тогда U_λ – нормальная подгруппа конечного Π-индекса группы G_λ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены. Поскольку семейство $V = (V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо, то семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ также совместимо, и группа G_U является свободным произведением конечных нильпотентных Π-групп G_λ/U_λ ограниченных порядков с циклическим объединением. По следствию 2.2 $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\Pi$.

Поскольку $w \notin N$, то $w \in G_\mu \backslash V_\mu$, т.е. порядок w по модулю V_μ является Π-числом, отличным от 1. Поэтому $w \notin U_\mu$, т.е. $w\rho_U$ – неединичный элемент группы $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\Pi$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную Π-группу такой, что $w\rho_U\rho \neq 1$. Отсюда и из того, что w лежит в нормальном замыкании W элемента h^m в группе G_μ следует, что $h^m\rho_U\rho \neq 1$. Поэтому h^m не принадлежит пересечению M всех нормальных подгрупп конечного Π-индекса группы G, что невозможно, поскольку m – порядок элемента h по модулю M.

Таким образом, W является группой без Π-кручения.

Предложение 34. *Пусть p – простое число и $p \notin \Pi$. И пусть $g \in H\backslash 1$. Тогда существует целое положительное число k такое, что уравнение*

$$x^{p^k} = g \tag{12}$$

не разрешимо в группе G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$.

<u>Доказательство.</u> Поскольку $g \in H\backslash 1$, то $g = h^l$, $l \neq 0$. Запишем число l в виде: $l = p^t r$, где $(p, r) = 1$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$

$$[\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : (g)] = [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : H][H : (g)] = n_\lambda p^t r. \tag{13}$$

Поскольку $p \notin \Pi$, то по предложению 27 существует целое положительное число s такое, что для любого $\lambda \in \Lambda$ n_λ не делится на p^s. Пусть $k = s + t$. Тогда из (13) следует, что для любого $\lambda \in \Lambda$

$$p^k \nmid [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : (g)]. \tag{14}$$

Покажем, что для этого числа k уравнение (12) не разрешимо в группе G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$. Допустим противное, т.е. что для некоторого

$\lambda \in \Lambda$ существует $v \in G_\lambda$ такое, что $v^{p^k} = g$. Поскольку $|g| = |v| = \infty$, то последнее равенство означает, что $[(v) : (g)] = p^k$. Отсюда и из того, что $(g) \leqslant (v) \leqslant \mathcal{J}_{G_\lambda}(H)$ следует, что $p^k \mid [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : (g)]$. Это противоречит условию (14).

Таким образом, уравнение (12) не разрешимо в G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$.

Предложение 35. *Пусть p – простое число и $p \notin \Pi$. Тогда для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $|h\sigma| = p^l$.*

Доказательсто. Рассмотрим неединичный элемент

$$g = h^{p^{l-1}}$$

группы H. Поскольку $p \notin \Pi$, то по предложению 34 существует целое положительное число k такое, что уравнение (12) не разрешимо в G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$. Отсюда и из того, что числа $r(G_\lambda) + |\tau(G_\lambda)|$ ограничены некоторым числом r, по предложению 14 заключает, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного p-индекса группы G_λ такая, что $|gU_\lambda| = p$ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены числом p^{kr^2}. Тогда $|hU_\lambda| = p^l$ для всех $\lambda \in \Lambda$, семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ сместимо и $|h\rho_U| = p^l$. Поскольку свободные сомножители G_λ/U_λ группы G_U являются конечными p-группами ограниченных порядков и объединяемая подгруппа циклическая, то по следствию 2.1 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Отсюда и из того, что $|h\rho_U| = p^l$, следует $|h\rho_U\rho| = p^l$ для некоторого гомоморфизма ρ группы G_U на конечную p-группу. Гомоморфизм $\sigma = \rho_U\rho$ является искомым.

Следующее утверждение легко проверяется с помощью предложения 35:

Предложение 36. *Пусть n – целое положительное $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-число. Тогда существует гомоморфизм η группы G на конечную $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-группу такой, что $|h\eta| = n$.*

Предложение 37. *Пусть Π – собственное подмножество множества $\mathcal{P}$. И пусть $\mu \in \Lambda$, n_μ – $\mathcal{P}$-число, T – наибольшая Π-подгруппа группы G_μ. Тогда для любого элемента $x \in G_\mu \backslash HT$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.*

<u>Доказательство.</u> Зафиксируем элемент $x \in G_\mu \backslash HT$.

Поскольку n_μ – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 21 H $\mathcal{P}'$-изолирована в G_μ. По предложению 25 существует гомоморфизм φ группы G_μ на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $H\varphi$ – $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-группа и $x\varphi \notin H\varphi$. Пусть $|h\varphi| = n$. Поскольку n – $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-число, то по предложению 36 существует гомоморфизм η группы G на конечную $(\mathcal{P}\backslash\Pi)$-группу такой, что $|h\eta| = n$.

Введем обозначения:

$$U_\mu = Ker\ \varphi,$$
$$U_\lambda = C_\lambda \cap Ker\ \eta \qquad\qquad (\lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu).$$

Поскольку $|h\varphi| = n = |h\eta|$, то семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо. Группа G_U является свободным произведением с циклическим объединением конечных нильпотентных $\mathcal{P}$-групп G_λ/U_λ, порядки которых ограничены. По следствию 2.2 группа $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Поскольку $x\varphi \notin H\varphi$, то $x \notin HU_\mu$. Отсюда и из того, что ограничение гомоморфизма ρ_U на G_μ совпадает с естественным гомоморфизмом $G_\mu \to G_\mu/U_\mu$ получаем: $x\rho_U \notin H\rho_U$. Поскольку $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и $|H\rho_U| < \infty$, то существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\rho_U\rho \notin H\rho_U\rho$. Гомоморфизм $\sigma = \rho_U\rho$ является искомым.

Следующее утверждение является непосредственным следствием предложения 37.

Предложение 38. *Пусть* $\Pi = \varnothing$ *и все* n_λ *являются* $\mathcal{P}$*-числами. Тогда для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и для любого* $x \in G_\lambda\backslash H$ *существует гомоморфизм* σ *группы* G *на конечную* $\mathcal{P}$*-группу такой, что* $x\sigma \notin H\sigma$.

Предложение 39. *Пусть* Π *– непустое собственное подмножество множества* $\mathcal{P}$, m *– такое же, как в предложении 30. И пусть* $\mu \in \Lambda$, n_μ *–* $\mathcal{P}$*-число и нормальное замыкание* V *элемента* h^m *в группе* G_μ *является группой без* Π*-кручения. Тогда для любого* $x \in G_\mu\backslash H$ *существует гомоморфизм* σ *группы* G *на конечную* $\mathcal{P}$*-группу такой, что* $x\sigma \notin H\sigma$.

<u>Доказательство.</u> Обозначим через T наибольшую Π-подгруппу группы G_μ.

Пусть $x \in G_\mu\backslash H$. Покажем, что существует гомоморфизм σ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$. Предложение 37 позволяет нам ограничиться рассмотрением случая, когда $x \in HT\backslash H$, т.е. когда $x = h^k t$, где $k \in Z,\ t \in T\backslash 1$. Поскольку t – неединичный П-элемент, то $t \notin V$.

По предложению 19 $\tau(G_\mu) \cap HV = \tau(G_\mu) \cap V$. Отсюда и из того, что $t \notin V$, следует $\tau \notin (\tau(G_\mu) \cap HV)$. Поэтому $t \notin HV$.

Пусть $\varepsilon\ :\ G_\mu \to G_\mu/V$ – естественный гомоморфизм. Поскольку $t \notin HV$, то $t\varepsilon \notin H\varepsilon$. С помощью предложения 17 легко убедиться, что $|H\varepsilon| = m$. Поскольку $G_\mu\varepsilon \in {}_R\mathcal{F}$, то существует гомоморфизм α группы $G_\mu\varepsilon$ на конечную нильпотентную группу A такой, что $t\varepsilon\alpha \notin H\varepsilon\alpha$ и $|H\varepsilon\alpha| = m$. Пусть B – наибольшая П-подгруппа группы A, β – проекция A на B. Поскольку m – П-число (предложение 30) и t – П-элемент, то $H\varepsilon\alpha \leqslant B,\ t\varepsilon\alpha \in B$. Отсюда, учитывая, что β действует тождественно на подгруппе B группы A, получаем:

$$|h\varepsilon\alpha\beta| = |h\varepsilon\alpha| = m,$$
$$t\varepsilon\alpha\beta = t\varepsilon\alpha \notin H\varepsilon\alpha = H\varepsilon\alpha\beta.$$

Пусть $\varphi = \varepsilon\alpha\beta$. Тогда $|h\varphi| = m$ и $t\varphi \notin H\varphi$. Поскольку $x\varphi = h^k\varphi t\varphi$ и $h^k\varphi \in H\varphi$, то $x\varphi \notin H\varphi$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм φ группы G_μ на конечную П-группу такой, что $|h\varphi| = m$ и $x\varphi \notin H\varphi$.

По предложению 30 существует нормальная подгруппа M конечного П-индекса группы G такая, что $|hM| = m$. Введем обозначения:

$$U_\mu = Ker\ \varphi,$$
$$U_\lambda = G_\lambda \cap M \qquad\qquad (\lambda \in \Lambda, \lambda \neq \mu).$$

Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и группа G_U является свободным произведением с циклическим объединением конечных нильпотентных П-групп G_λ/U_λ, порядки которых ограничены. По следствию 2.2 $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\Pi$.

Поскольку $x\varphi \notin H\varphi$, то $x \notin HU_\mu$. Отсюда и из того, что ограничение гомоморфизма ρ_U на G_μ совпадает с естественным гомоморфизмом $G_\mu \to G_\mu/U_\mu$ получаем: $x\rho_U \notin H\rho_U$. Поскольку $|H\rho_{_U}| = |hM| = m < \infty$ и $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\Pi$, то существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную П-группу такой, что $x\rho_{_U}\rho \notin H\rho_{_U}\rho$. Поскольку $\Pi \subseteq \mathcal{P}$, то гомоморфизм $\sigma = \rho_{_U}\rho$ является искомым.

Следующее утверждение является непосредственным следствием предложения 39.

Предложение 40. *Пусть* $\Pi \neq \varnothing$ *и выполняются условия 1,2,3 из формулировки теоремы 9. Тогда для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *и для каждого* $x \in G_\lambda \backslash H$ *существует гомоморфизм* σ *группы* G *на конечную* $\mathcal{P}$*-группу такой, что* $x\sigma \notin H\sigma$.

Предложение 41. *Если* $\Pi = \varnothing$ *и все* n_λ *являются* $\mathcal{P}$*-числами, то* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. *Если* $\Pi \neq \varnothing$ *и выполняются условия 1,2,3 из формулировки теоремы 9, то* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Доказательство. Ввиду предложения 5 для доказательства аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами достаточно проверить справедливость следующих двух условий:

($*$) Для любого $g \in H\backslash 1$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $g\sigma \neq 1$;

($**$) Для любого $\lambda \in \Lambda$ и для любого $x \in G_\lambda \backslash H$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.

Предположим, что $\Pi \subset \mathcal{P}$. Тогда найдется $p \in \mathcal{P}\backslash\Pi$. По предложению 35 для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $|h\sigma| = p^l$. Поэтому выполняется условие ($*$).

Таким образом, если $\Pi \subset \mathcal{P}$, то выполняется условие ($*$).

Пусть $\Pi = \varnothing$ и все n_λ являются $\mathcal{P}$-числами. В силу предложения 38 выполняется условие ($**$). Поскольку $\Pi = \varnothing \subset \mathcal{P}$, то выполняется условие ($*$). Поэтому $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Пусть $\Pi \neq \varnothing$ и выполняются условия 1,2,3 из формулировки теоремы 9. По предложению 40 справедливо условие ($**$). Условие 2 из формулировки теоремы 9 имеет вид: $\Pi \subset \mathcal{P}$. Поэтому выполняется условие ($*$). Следовательно, $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Доказательство теоремы 9.

Первое утверждение теоремы 9 вытекает из предложений 41,31,32 и 33. Второе утверждение теоремы 9 справедливо ввиду предложений 41 и 31.

§9. О нильпотентной аппроксимируемости некоторых свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой.

Пусть G – свободное произведение локально нильпотентных групп G_λ ($\lambda \in \Lambda$) с одной объединенной подгруппой H, причем $G_\lambda \neq H \neq$ $\neq G_\mu$ хотя бы для двух различных $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Пусть p – простое число. Напомним, что подгруппа K группы F

называется p'-изолированной, если для любого $x \in F$ и для любого простого числа $q \neq p$ из условия $x^q \in K$ следует, что $x \in K$.

Предложение 42. *Пусть группа G аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда существует простое число p такое, что подгруппа H p'-изолирована в группе G_λ для любого $\lambda \in \Lambda$. В частности, если все группы G_λ конечно порождены, то числа*

$$n_\lambda = [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) \ : \ H]$$

являются степенями одного и того же простого числа.

Доказательство. Пусть G аппроксимируется нильпотентными группами.

Заметим, что любая конечно порожденная подгруппа группы G аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами, которые, в свою очередь, финитно аппроксимируемы. Поэтому любая конечно порожденная подгруппа группы G аппроксимируется конечными нильпотентными группами, а, следовательно, и конечными группами примарных порядков.

Покажем, что существует простое число p такое, что H p'-изолирована во всех G_λ. Опуская тривиальный случай, когда H изолирована во всех G_λ, будем считать, что H не изолирована в G_μ для некоторого $\mu \in \Lambda$. Очевидно, что существуют элемент $a \in G_\mu \backslash H$ и простое число p такие, что $a^p \in H$.

Покажем, что H – p'-изолированная подгруппа группы G_μ. Допустим противное. Тогда найдутся простое число $q \neq p$ и элемент $b \in G_\mu \backslash H$ такие, что $b^q \in H$. Поскольку $(a, b) \leqslant G_\mu$, то (a, b) – нильпотентная группа. Поскольку $a, b \in (a, b)\backslash((a, b) \cap H)$ и $a^p, b^q \in ((a, b) \cap H)$, то по предложению 15 $ba^{-1} \notin ((a, b) \cap H)$ и, следовательно, $ba^{-1} \notin H$.

Зафиксируем элемент $c \in G_\nu \backslash H$, где $\nu \in \Lambda$ и $\nu \neq \mu$. Рассмотрим две последовательности простых коммутаторов:

$$\begin{array}{llll} u_1 = c, & u_2 = a^{-1}u_1^{-1}au_1, & u_3 = a^{-1}u_2^{-1}au_2, & \dots \\ v_1 = c, & v_2 = b^{-1}v_1^{-1}bv_1, & v_3 = b^{-1}v_2^{-1}bv_2, & \dots \end{array}$$

Легко проверить, что при $n > 1$ u_n и v_n имеют несократимые записи длины 2^n вида:

$$u_n = a^{-1}c^{-1} \dots ac, \quad v_n = b^{-1}c^{-1} \dots bc.$$

Поскольку $ba^{-1} \in G_\mu \backslash H$, то элемент

$$\begin{aligned} w_n &= u_n^{-1} v_n^{-1} u_n v_n = \\ &= c^{-1} a^{-1} \ldots cac^{-1} b^{-1} \ldots c(ba^{-1})c^{-1} \ldots acb^{-1} c^{-1} \ldots bc \end{aligned}$$

отличен от 1.

Группа (a^p, b^q, c) нильпотентна, поскольку является конечно порожденной подгруппой группы G_ν. Будем далее считать, что n – фиксированное число большее ступени нильпотентности группы (a^p, b^q, c).

Пусть σ – гомоморфизм группы (a, b, c) на конечную группу P примарного порядка. Тогда одно из чисел p или q не делит порядок группы P. Отсюда и из того, что $a^p, b^q \in (a^p, b^q, c)$, следует, что один из элементов $a\sigma$ или $b\sigma$ принадлежит подгруппе $(a^p, b^q, c)\sigma$. Поэтому один из элементов $u_n\sigma$ или $v_n\sigma$ можно рассматривать как простой коммутатор веса n элементов группы $(a^p, b^q, c)\sigma$. Отсюда и из того, что ступень нильпотентности группы $(a^p, b^q, c)\sigma$ меньше чем n, следует, что $u_n\sigma = 1$ или $v_n\sigma = 1$. В любом случае $w_n\sigma = 1$. Отсюда и из того, что группа (a, b, c) аппроксимируется конечными группами примарных порядков, следует $w_n = 1$, что невозможно.

Таким образом, подгруппа H p'-изолирована в G_μ.

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda \neq \mu$. Покажем, что H – p'-изолированная подгруппа группы G_λ. Допустим противное. Тогда найдутся простое число $r \neq p$ и элемент $d \in G_\lambda \backslash H$ такие, что $d^r \in H$.

Рассмотрим последовательность простых коммутаторов

$$t_1 = d, \quad t_2 = a^{-1} t_1^{-1} a t_1, \quad t_3 = a^{-1} t_2^{-1} a t_2, \ \ldots .$$

Очевидно, что $t_k \neq 1$ для всех $k \geqslant 1$.

Поскольку $(a^p, d) \leqslant G_\lambda$ и $(a, d^r) \leqslant G_\mu$, то группы (a^p, d) и (a, d^r) нильпотентны. Будем далее предполагать, что k – фиксированное число, большее ступеней нильпотентности каждой из этих групп.

Пусть σ – гомоморфизм группы (a, d) на конечную группу P примарного порядка. Тогда одно из чисел p или r не делит порядок группы P. Отсюда и из того, что $a^p \in (a^p, d)$ и $d^r \in (a, d^r)$, заключаем, что $a\sigma \in (a^p, d)\sigma$ или $d\sigma \in (a, d^r)\sigma$. Поэтому элемент $t_k\sigma$ можно рассматривать как простой коммутатор веса k элементов одной из групп $(a^p, d)\sigma$ или $(a, d^r)\sigma$. Поскольку ступени нильпотентности этих групп меньше чем k, то $t_k\sigma = 1$. Отсюда и из того, что группа (a, d)

аппроксимируется конечными группами примарных порядков следует, что $t_k = 1$, что невозможно.

Таким образом, подгруппа H p'-изолирована во всех G_λ.

Далее в § 9 будем предполагать, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечно порожденная нильпотентная группа и что $H = (h)$ – бесконечная циклическая группа. Кроме того, будем считать, что группы G_λ удовлетворяют ограничениям 1^0 – 4^0, введенным в § 5. Мы сохраняем здесь все обозначения, введенные в § 5.

Предложение 43. *Пусть числа n_λ не ограничены и являются степенями одного и того же простого числа p. И пусть q – простое число, отличное от p.*

Тогда h имеет конечный порядок m по модулю пересечения всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G и следующие три условия равносильны:

(а) $G \in {}_R\mathcal{F}_N$,

(б) h^m лежит в центре группы G,

(в) $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$.

Доказательство. Поскольку числа n_λ не ограничены и являются степенями числа p, то по предложению 27 $\Pi = \{p\}$. По предложению 30 h имеет конечный порядок m по модулю пересечения всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G и существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы G такая, что $|hM| = m$. В частности, m – p-число.

Проверим импликацию (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_N$. Покажем, что h^m лежит в центре группы G. Допустим противное. Тогда существует $\lambda \in \Lambda$ и элемент $c \in G_\lambda$ такой, что $ch^m \neq h^m c$. Пусть $g = c^{-1}h^m c$. Тогда $g \in G_\lambda \backslash H$. Поскольку h^m принадлежит пересечению всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G и $g \sim {}_G h^m$, то $g\sigma = 1$ для любого гомоморфизма σ группы G на конечную p-группу.

Зафиксируем элемент $\mu \in \Lambda$ такой, что $\mu \neq \lambda$ и n_μ – p-число, отличное от 1. Тогда существует элемент $b \in G_\mu \backslash H$ такой, что $b^p \in H$. Введем обозначения:

$$v_1 = b, \quad v_2 = g^{-1}v_1^{-1}gv_1, \quad v_3 = g^{-1}v_2^{-1}gv_2, \ \ldots$$

Пусть $v = v_n$, где n – фиксированное число, большее ступени нильпотентности группы G_λ.

Пусть σ – гомоморфизм группы G на конечную группу P примарного порядка. Если P – p-группа, то $g\sigma = 1$ и, следовательно, $v\sigma = 1$. Пусть теперь P не является p-группой. Поскольку $b^p \in H$, то $b\sigma \in H\sigma \subseteq G_\lambda\sigma$. Поэтому элемент $v\sigma$ можно рассматривать как простой коммутатор веса n элементов группы $G_\lambda\sigma$. Поскольку ступень нильпотентности группы $G_\lambda\sigma$ меньше n, то $v\sigma = 1$.

Отсюда следует, что $v\rho = 1$ для любого гомоморфизма ρ группы G на конечную нильпотентную группу. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}_N$, то $v = 1$, что невозможно.

Таким образом, импликация (а) $\Rightarrow$ (б) доказана.

Докажем импликацию (б) $\Rightarrow$ (в). Пусть h^m лежит в центре группы G. Введем обозначения:

$$\overline{G} = G/H^m, \quad \overline{H} = H/H^m, \quad \overline{G}_\lambda = G_\lambda/H^m \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Тогда $\overline{G}$ – свободное произведение групп $\overline{G}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной подгруппой $\overline{H}$. Поскольку

$$|\tau(\overline{G}_\lambda)| = |\mathcal{J}_{G_\lambda}(H)/H^m| = [\mathcal{J}_{G_\lambda}(H) : H][H : H^m] = n_\lambda m,$$

то $\tau(\overline{G}_\lambda)$ – p-группа. По предложению 16 $\overline{G}_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Поскольку $H^m \leqslant M \leqslant G$, то отображение группы $\overline{G}$ на группу G/M, определенное по правилу $gH^m \to gM$ $(g \in G)$ является гомоморфизмом. Из равенства $|hH^m| = m = |hM|$ следует, что этот гомоморфизм инъективен на $\overline{H}$.

Таким образом, группа $\overline{G}$ является свободным произведением групп $\overline{G}_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$ с одной объединенной подгруппой $\overline{H}$ и существует гомоморфизм группы $\overline{G}$ на конечную p-группу G/M, инъективный на $\overline{H}$. По предложению 3 $\overline{G} \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Поскольку $\Pi = \{p\}$ и $q \neq p$, то q – Π'-число. По предложению 35 для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм ρ группы G на конечную q-группу такой, что $|h\rho| = q^l$. Отсюда следует, что для любого $x \in H^m \backslash 1$ существует гомоморфизм ρ группы G на конечную q-группу такой, что $x\rho \neq 1$. Поскольку $\overline{G} \in {}_R\mathcal{F}_p$, то для любого $y \in G \backslash H^m$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $y\sigma \neq 1$. Поэтому $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$.

Импликация (б) $\Rightarrow$ (в) доказана. Наконец, импликация (в) $\Rightarrow$ (а) очевидна.

Доказательство теоремы 12.

Обозначим через H_p подгруппу, высекаемую в H пересечением всех нормальных подгрупп конечного p-индекса группы G, где p – простое число. Центр группы G будем обозначать через $Z(G)$. Нам нужно доказать, что следующие три условия равносильны.

1. $G \in {}_R\mathcal{F}_N$.

2. Существует простое число p такое, что все n_λ – p-числа и $H_p \leq Z(G)$.

3. Существуют простые числа p и q такие, что $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$.

Пусть выполняется условие 1. По предложению 42 все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p. Если числа n_λ ограничены, то по теореме 11 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ и, следовательно, $H_p = 1 \leq Z(G)$. Если же числа n_λ не ограничены, то $H_p \leq Z(G)$ в силу предложения 43. Таким образом, выполняется условие 2.

Пусть выполняется условие 2. Зафиксируем простое число $q \neq p$. Если числа n_λ ограничены, то по теореме 11 $G \in {}_R\mathcal{F}_p \subseteq {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$. Если же числа n_λ не ограничены, то $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$ в силу предложения 43. Таким образом, выполняется условие 3.

Для завершения доказательства остается заметить, что импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

Доказательство следствия 12.1.

Будем использовать обозначения, введенные в доказательстве теоремы 12.

Пусть для всех $\lambda \in \Lambda$ $\tau(G_\lambda) = 1$.

Предположим, что все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1. Числа n_λ ограничены.

2. $H \leq Z(G)$.

Если выполняется условие 1, то по теореме 11 $G \in {}_R\mathcal{F}_p \subseteq {}_R\mathcal{F}_N$. Если же выполняется условие 2, то $G \in {}_R\mathcal{F}_N$ в силу теоремы 12.

Наоборот, предположим, что $G \in {}_R\mathcal{F}_N$. По теореме 12 все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p и $H_p \leq Z(G)$. Покажем, что выполняется хотя бы одно из условий 1 или 2. Предположим, что условие 1 не выполняется. Тогда числа n_λ неограничены и являются степенями числа p. Поскольку $\tau(G_\lambda) = 1$, то по предложению 11 уравнение $x^{n_\lambda} = h$ разрешимо в группе G_λ при любом $\lambda \in \Lambda$. Отсюда и из неограниченности p-чисел n_λ следует разрешимость в группе G уравнения

$$x^{p^s} = h$$

для любого целого положительного числа s. Поэтому элемент h принадлежит любой нормальной подгруппе конечного p-индекса группы G и, следовательно, $h \in H_p$ т.е. $H = H_p$. Отсюда и из включения $H_p \leq Z(G)$ следует, что $H \leq Z(G)$, т.е. выполняется условие 2. Таким образом, все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p и выполняется хотя бы одно из условий 1 или 2.

В заключение, докажем еще одно предложение, которое будет применяться в третьей главе.

Предложение 44. *Пусть, как и выше, G_λ – конечно порожденные нильпотентные группы, полициклические ранги групп G_λ ограничены и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $\tau(G_\lambda) = 1$. И пусть существуют простое число p и целое положительное число s такие, что для любого $\lambda \in \Lambda$ уравнение*

$$x^{p^s} = h$$

не разрешимо в группе G_λ. Тогда для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $|h\sigma| = p^l$.

Доказательство. Покажем, что для любого $\lambda \in \Lambda$ p^s не делит n_λ. Допустим противное, т.е. что для некоторого $\lambda \in \Lambda$ p^s делит n_λ. Поскольку $\tau(G_\lambda) = 1$, то по предложению 11 уравнение

$$x^{n_\lambda} = h$$

разрешимо в G_λ. Поскольку p^s делит n_λ, то уравнение

$$x^{p^s} = h$$

также разрешимо в G_λ, что невозможно.

Таким образом, для любого $\lambda \in \Lambda$ p^s не делит n_λ. По предложению 27 $p \notin \Pi$. Поэтому в силу предложения 35 для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $|h\sigma| = p^l$.

ГЛАВА 3

О свободном произведении свободных групп с одной циклической объединенной подгруппой.

§10. Основные результаты третьей главы.

Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно,

$$G = (A * B;\ h = k)$$

– свободное произведение групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Г.Баумслаг [9] доказал, что $G \in {}_R\mathcal{F}$. В работе Д.Дайер [14] доказывается, что группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Браннер, Бернс и Солитер [12] доказали, что все конечно порожденные подгруппы этой группы финитно отделимы.

В этой главе рассматриваются другие аппроксимационные свойства группы G. В частности, устанавливается критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами.

Теорема 13. *Пусть m и n – наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно.*

1. Если одно из чисел m или n равно 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p.

2. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда числа m и n являются степенями числа p.

Заметим, что достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными p-группами было получено Гильденхъюзом [15]. Используя обозначения из теоремы 13, результат Гильденхъюза можно сформулировать следующим образом: *если числа m и n являются степенями простого числа p, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.*

Вернемся к рассмотрению свободного произведения G любого числа групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной подгруппой H. Будем предполагать, что $H = (h)$ – бесконечная циклическая группа и что для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная группа. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через n_λ наибольшее целое положительное число такое, что уравнение

$$x^{n_\lambda} = h$$

разрешимо в группе G_λ. Иными словами, n_λ – индекс подгруппы H в своем централизаторе в G_λ.

Рассмотрим сначала случай, когда Λ – конечное множество. В этом случае критерий аппроксимируемости группы G конечными p-группами имеет вид:

Теорема 14. *Пусть Λ – конечное множество.*

1. Если все n_λ, за исключением быть может одного, равны 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p.

2. Если среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда все n_λ являются степенями числа p.

Теорема 13 является непосредственным следствием теоремы 14.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел. Рассмотрим вопрос об аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами. Если все n_λ, кроме быть может одного, равны 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ в силу теоремы 14. Если же среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1, то критерий аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами имеет вид:

Теорема 15. *Пусть Λ – конечное множество и среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1. Тогда следующие три условия равносильны:*

1. $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

2. Все n_λ являются $\mathcal{P}$-числами.

3. G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.

Из теорем 14 и 15 вытекает следующее утверждение.

Следствие 15.1. *Пусть Λ – конечное множество. Тогда группа G аппроксимируется конечными разрешимыми группами. Более точно, группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами для любого непустого множества $\mathcal{P}$ простых чисел, содержащего все простые делители произведения всех чисел n_λ $(\lambda \in \Lambda)$.*

Критерий нильпотентной аппроксимируемости группы G имеет вид:

Теорема 16. *Пусть Λ – конечное множество. Группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для некоторого простого числа p.*

Откажемся теперь от условия, что Λ – конечное множество. Символом $\gamma_n(F)$, как и обычно, будем обозначать n-й член нижнего центрального ряда группы F.

Теорема 17. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ G_λ *– свободная группа конечного ранга и ранги групп* G_λ *ограничены. И пусть* p *– простое число.*

1. Если все n_λ*, за исключением быть может одного, равны 1, то* $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ *тогда и только тогда, когда существуют целые положительные числа* n *и* s *такие, что уравнение*

$$x^{p^s} = h\gamma_n(G_\lambda) \tag{15}$$

не разрешимо в группе $G_\lambda/\gamma_n(G_\lambda)$ *при любом* $\lambda \in \Lambda$.

2. Если среди чисел n_λ *хотя бы два отличны от 1, то* $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ *тогда и только тогда, когда все* n_λ *являются степенями числа* p *и существуют целые положительные числа* n *и* s *такие, что уравнение (15) не разрешимо в группе* $G_\lambda/\gamma_n(G_\lambda)$ *при любом* $\lambda \in \Lambda$.

В заключение сформулируем критерий аппроксимируемости группы G конечными нильпотентными группами. Как и выше, класс конечных нильпотентных групп будем обозначать через $\mathcal{F}_N$.

Теорема 18. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ G_λ *– свободная группа конечного ранга и ранги групп* G_λ *ограничены.*

1. Если хотя бы одна из групп G_λ *не циклическая, то* $G \in {}_R\mathcal{F}_N$ *тогда и только тогда, когда* $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ *для некоторого простого числа* p.

2. Пусть все G_λ *– циклические группы и хотя бы для двух* $\lambda, \mu \in \in \Lambda$ $G_\lambda \neq H \neq G_\mu$*. Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_N$ *тогда и только тогда, когда все* n_λ *являются степенями одного и того же простого числа.*

Доказательства теорем 14–18 приведены в § 12, 13.

§11. *Предварительные замечания.*

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел.

Предложение 45. *Пусть* F *– группа и* $F \in {}_R\mathcal{F}_p$ *для любого* $p \in \mathcal{P}$*. И пусть* c *– элемент бесконечного порядка группы* F*. Тогда для любого* $\mathcal{P}$*-числа* $l > 0$ *существует гомоморфизм* φ *группы* F *на конечную нильпотентную* $\mathcal{P}$*-группу такой, что* $|c\varphi| = l$.

Это утверждение легко проверяется с помощью элементарных свойств конечных p-групп.

Хорошо известно, что свободная группа принадлежит ${}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p. Поэтому следующее утверждение является следствием предложения 45.

Предложение 46. *Пусть F – свободная группа, $c \in F \backslash 1$. Тогда для любого целого положительного $\mathcal{P}$-числа l существует гомоморфизм φ группы F на конечную нильпотентную $\mathcal{P}$-группу такой, что $|c\varphi| = l$.*

Непосредственное доказательство этого предложения приводится в работе Стиба [21] (лемма 1).

Напомним, что подгруппа H группы F называется p-отделимой, где p – простое число, если для любого $x \in F \backslash H$ существует гомоморфизм φ группы F на конечную p-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$.

Предложение 47. *Пусть p – простое число, $F \in {}_R\mathcal{F}_p$, $H \leqslant F$ и $C_F(H)$ – централизатор подгруппы H в группе F. Тогда $C_F(H)$ – p-отделимая подгруппа группы F.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $x \in F \backslash C_F(H)$. Тогда $xh \neq hx$ для некоторого $h \in H$. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}_p$, то существует гомоморфизм φ группы F на конечную p-группу такой, что $x\varphi h\varphi \neq h\varphi x\varphi$. Очевидно, что $x\varphi \notin C_F(H)\varphi$. Поэтому $C_F(H)$ – p-отделимая подгруппа группы F.

Далее через $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$ будем обозначать множество всех конечных нильпотентных $\mathcal{P}$-групп.

Предложение 48. *Пусть F – свободная группа, $H = (h)$ – неединичная циклическая подгруппа группы F, m – наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в F. Подгруппа H является $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$-отделимой подгруппой группы F тогда и только тогда, когда m – $\mathcal{P}$-число.*

<u>Доказательство.</u> В доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть m – $\mathcal{P}$-число.

Рассмотрим централизатор $C_F(H)$ подгруппы H. По предложению 47 $C_F(H)$ – $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$-отделимая подгруппа группы F. Поскольку $H = (h)$ – циклическая подгруппа свободной группы F, то $C_F(H) = (c)$ - циклическая подгруппа группы F, содержащая H, и $h = c^m$.

Пусть $x \in F \backslash H$. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы F на конечную нильпотентную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$.

Если $x \in F \backslash C_F(H)$, то существование такого гомоморфизма следует из $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$-отделимости подгруппы $C_F(H)$ и включения $H \subseteq C_F(H)$.

Пусть теперь $x \in C_F(H) \backslash H$. Поскольку m – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 46 существует гомоморфизм φ группы F на конечную нильпотентную $\mathcal{P}$-группу такой, что $|c\varphi| = m$. Очеидно, что $x\varphi \neq 1 = H\varphi$ и, следовательно, $x\varphi \notin H\varphi$.

Таким образом, подгруппа H $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$-отделима.

Предложение 49. *Пусть H – циклическая подгруппа свободной группы F. Тогда $g^{-1}Hg \cap H = 1$ для любого элемента g группы F, не лежащего в централизаторе подгруппы H.*

Это предложение легко проверяется с помощью элементарных свойств свободных групп.

§12. О свободном произведении конечного числа свободных групп с одной циклической объединенной подгруппой.

Пусть G – свободное произведение групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной бесконечной циклической подгруппой $H = (h)$. И пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел.

Предложение 50. *Пусть Λ – конечное множество. Группа G аппроксимируется конечнми разрешимыми $\mathcal{P}$-группами, если выполняются два условия:*

1. Для любого $\lambda \in \Lambda$ и для любого $p \in \mathcal{P}$ $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$.

2. Подгруппа H $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$-отделима в G_λ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. В силу предложения 5 для доказательства аппроксимируемости группы G конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами достаточно проверить выполнение следующих двух условий:

$(*)$ Для каждого $h \in H \backslash 1$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную разрешимую $\mathcal{P}$-группу такой, что $h\sigma \neq 1$.

$(**)$ Для любого $\mu \in \Lambda$ и для любого $x \in G_\mu \backslash H$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную разрешимую $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.

Проверим условие $(*)$. Пусть $h^k \in H \backslash 1$. Обозначим через l какоенибудь целое положительное $\mathcal{P}$-число такое, что $l > |k|$. Пусть $\lambda \in \in \Lambda$. Поскольку $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого $p \in \mathcal{P}$, то по предложению 45 существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что G_λ/U_λ – конечная нильпотентная $\mathcal{P}$-группа и $|hU_\lambda| = l$. Поскольку $l > |k|$, то $h^k \notin U_\lambda$. Очевидно, что семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо. По следствию 2.2 G_U аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами. Поскольку $h^k \notin U_\lambda$, то $h^k\rho_U \neq 1$ и, следовательно, существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную разрешимую $\mathcal{P}$-группу такой, что $h^k\rho_U\rho \neq 1$. Таким образом, выполняется условие $(*)$.

Проверим условие $(**)$. Пусть $\mu \in \Lambda$ и $x \in G_\mu \backslash H$. Поскольку H – $\mathcal{F}_{N\mathcal{P}}$-отделимая подгруппа группы G_μ, то существует нормальная подгруппа U_μ группы G_μ такая, что G_μ/U_μ – конечная нильпотентная $\mathcal{P}$-группа и $x \notin HU_\mu$. Пусть $l = |hU_\mu|$. Поскольку l – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 45 для каждого $\lambda \in \Lambda\backslash\{\mu\}$ существует нормальная подгруппа U_λ группы G_λ такая, что G_λ/U_λ – конечная нильпотентная $\mathcal{P}$-группа и $|hU_\lambda| = l$. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и по следствию 2.2 группа G_U аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами. Поскольку $x \notin HU_\mu$, то $x\rho_U$ не принадлежит конечной подгруппе $H\rho_U$ группы G_U. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную разрешимую $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\rho_U\rho \notin H\rho_U\rho$. Тем самым доказана справедливость условия $(**)$.

Предложение доказано.

Далее будем предполагать, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная группа и n_λ – наибольшее целое положительное число такое, что уравнение

$$x^{n_\lambda} = h$$

разрешимо в группе G_λ.

Следующее утверждение является непосредственным следствием предложений 50 и 48.

Предложение 51. *Пусть Λ – конечное множество. Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная группа и n_λ – $\mathcal{P}$-число, то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми $\mathcal{P}$-группами.*

<u>Доказательство теоремы 15.</u>

Пусть Λ – конечное множество, для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная группа и среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1. Докажем равносильность условий 1,2 и 3 из формулировки теоремы 15.

Проверим импликацию $1 \Rightarrow 2$. Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Покажем, что все n_λ являются $\mathcal{P}$-числами. Допустим противное. Тогда найдутся $\lambda \in \Lambda$ и $q \in \mathcal{P}'$ такие, что q делит n_λ. Очевидно, что существует элемент $a \in G_\lambda \backslash H$ такой, что $a^q = h$. По условию существует $\mu \in \Lambda$ такой, что $n_\mu \neq 1$ и $\mu \neq \lambda$. Обозначим через b элемент группы G_μ такой, что $b^{n_\mu} = h$. Очевидно, что при любом гомоморфизме группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу коммутатор

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$$

переходит в 1. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, то $[a, b] = 1$, что невозможно. Импликация $1 \Rightarrow 2$ доказана.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ справедлива в силу предложения 51.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

Г.Баумслаг [10] доказал, что если элемент h свободной группы A порождает свой централизатор в этой группе, то группа $C = (A, t;\ h = t^n)$ аппроксимируется нильпотентными группами без кручения. С другой стороны, легко заметить, что группа C аппроксимирутся группами вида $C_1 = (A_1, t;\ h = t^n)$, где A_1 – свободная группа конечного ранга, $h \in A_1$ и h порождает свой централизатор в A_1. Отсюда и из отмеченного результата Г.Баумслага следует, что группа C аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения даже в случае, когда A имеет бесконечный ранг. Из этого замечания, учитывая, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p, получаем следующее утверждение.

Предложение 52. *Пусть h – элемент свободной группы A, порождающий свой централизатор в этой группе. Тогда группа $C = (A, t;\ h = t^n) \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p.*

Предложение 53. *Пусть A – свободная группа, $B \in {}_R\mathcal{F}_p$ для некоторого простого числа p, h и k – элементы бесконечного порядка групп A и B соответственно. И пусть $G = (A * B;\ h = k)$. Если централизатор подгруппы $K = (k)$ в группе B является циклической подгруппой и элемент h порождает свой централизатор в группе A, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.*

<u>Доказательсто.</u> Пусть элемент h порождает свой централизатор в группе A. И пусть централизатор подгруппы $K = (k)$ группы B яв-

ляется циклической подгрупой группы B с порождающим элементом b. Тогда $k = b^n$ для некоторого целого n.

Разложим группу G в свободное произведение вида

$$G = (C * B;\ t = b),$$

где

$$C = (A, t;\ h = t^n).$$

Поскольку элемент h порождает свой централизатор в свободной группе A, то по предложению 52 $C \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Заметим, что подгруппа (t) группы C совпадает со своим централизатором в группе C. При $n \neq \pm 1$ это утверждение вытекает из элементарных свойств свободного произведения с объединенной подгруппой. Если же $n = \pm 1$, то $C = A,\ t = h^{\pm 1}$ и рассматриваемое утверждение также справедливо, поскольку $(h) = C_A(h)$.

Таким образом, $C \in {}_R\mathcal{F}_p$ и подгруппа (t) группы C совпадает со своим централизатором в этой группе. По предложению 47 подгруппа (t) группы C p-отделима.

Поскольку $B \in {}_R\mathcal{F}_p$ и (b) – централизатор подгруппы K в B, то по предложению 47 (b) – p-отделимая подгруппа группы B.

Таким образом, свободные сомножители C и B группы G аппроксимируются конечными p-группами и объединяемые подгруппы (t) и (b) p-отделимы в соответствующих сомножителях. По предложению 50 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Предложение 54. *Пусть G – свободное произведение свободных групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной бесконечной циклической подгруппой H и Λ – конечное множество. Если все n_λ, за исключением быть может одного, равны 1, то $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p.*

Доказательство. Пусть все n_λ, за исключением быть может одного, равны 1. Это означает, что выполняется следующее условие:

$(*)$ Подгруппа H совпадает со своим централизатором во всех сомножителях G_λ, за исключением быть может одного.

Пусть p – простое число. Индукцией по числу свободных сомножителей покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. База индукции очевидна. Предположим, что доказываемое утверждение имеет место для всех свободных произведений данного вида, содержащих l свободных сомножителей.

Пусть G – свободное произведение $(l+1)$-й свободной группы с циклическим объединением, удовлетворяющее условию $(*)$. Тогда G можно разложить в свободное произведение вида

$$G = (A * B;\ h = k),$$

где A – свободная группа, h – элемент группы A, порождающий свой централизатор в этой группе, B – свободное произведение l свободных групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной бесконечной циклической подгруппой $K = (k)$, удовлетворяющее условию $(*)$. По индуктивному предположению $B \in {}_R\mathcal{F}_p$. Ввиду условия $(*)$ найдется $\mu \in \Lambda$ такое, что для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}$

$$K = C_{G_\lambda}(K).$$

Поэтому

$$C_B(K) = C_{G_\mu}(K)$$

и, следовательно, $C_B(K)$ – циклическая группа.

Таким образом, $B \in {}_R\mathcal{F}_p$ и централизатор подгруппы $K = (k)$ в B является циклической группой. Кроме того, A – свободная группа и элемент h группы A порождает свой централизатор. По предложению 53 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Индукция завершена.

<u>Доказательство теоремы 14.</u>

Первое утверждение теоремы 14 совпадает с предложением 54. Второе утверждение теоремы 14 непосредственно вытекает из теоремы 15.

Предложение 55. *Пусть Λ – произвольное множество и для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная группа. И пусть среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1. Если группа G аппроксимируется нильпотентными группами, то все n_λ являются степенями одного и того же простого числа.*

<u>Доказательство.</u> Пусть G аппроксимируется нильпотентными группами. Покажем, что все n_λ являются степенями одного и того же простого числа. Допустим противное. Тогда найдутся различные $\mu, \nu \in \Lambda$ такие, что числа n_μ и n_ν отличны от 1 и не являются степенями одного и того же простого числа. Тогда существуют различные простые числа p и q, делящие n_μ и n_ν соответственно. Поэтому найдутся элементы $a \in G_\mu \setminus H$ и $b \in G_\nu \setminus H$ такие, что $a^p = h = b^q$.

Пусть T – подгруппа группы G, порожденная элементами a и b. Тогда T – конечно порожденная подгруппа группы G, аппроксимируемой нильпотентными группами. Поэтому T аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами, которые, в свою очередь, финитно аппроксимируемы. Так что $T \in {}_R\mathcal{F}_N$. Поскольку $a^p = h = b^q$, то при любом гомоморфизме группы T на конечную нильпотентную группу коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Поскольку $T \in {}_R\mathcal{F}_N$, то $[a, b] = 1$, что невозможно.

<u>Доказательство теоремы 16.</u>

В доказательстве нуждается лишь необходимость. Пусть Λ – конечное множество и G аппроксимируется нильпотентными группами. Если все n_λ, кроме быть может одного, равны 1, то по теореме 14 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого простого p. Если же среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1, то по предложению 55 все n_λ являются степенями одного и того же простого числа p и $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ в силу теоремы 14.

§13. О свободном произведении свободных групп с одной циклической объединенной подгруппой.

Пусть Λ – произвольное множество и для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – конечно порожденная свободная группа, причем ранги групп G_λ ограничены. Пусть, как и выше, G – свободное произведение групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной бесконечной циклической объединенной подгруппой $H = (h)$. И пусть p – простое число.

Предложение 56. *Следующие три условия равносильны.*

1. Существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $h\sigma \neq 1$.

2. Существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение

$$x^{p^s} = h\gamma_n(G_\lambda) \tag{15}$$

не разрешимо в группе $G_\lambda \,/\, \gamma_n(G_\lambda)$ при любом $(\lambda \in \Lambda)$.

3. Для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $|h\sigma| = p^l$.

<u>Доказательство.</u> Предположим, что выполняется условие 1. Тогда существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, не содержащая h. Поскольку G/N – нильпотентная группа, то суще-

ствует целое положительное число n такое, что $\gamma_n(G) \leqslant N$. Очевидно, что для любого $\lambda \in \Lambda$ $\gamma_n(G_\lambda) \leqslant N$. Пусть $|G/N| = p^s$.

Покажем, что для полученных n и s уравнение (15) не разрешимо в группе $G_\lambda/\gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Допустим противное. Тогда существуют $\lambda \in \Lambda$ и элемент $a \in G_\lambda$ такие, что

$$h^{-1}a^{p^s} \in \gamma_n(G_\lambda).$$

Отсюда, учитывая, что $\gamma_n(G_\lambda) \leqslant N$ и

$$a^{p^s} \in N,$$

заключаем, что $h \in N$. Это противоречит выбору N. Таким образом, выполняется условие 2.

Предположим теперь, что выполняется условие 2, т.е. что для для некоторых целых положительных чисел n и s уравнение (15) не разрешимо в группе $G_\lambda/\gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ $h \notin \gamma_n(G_\lambda)$ и, следовательно, $H \cap \gamma_n(G_\lambda) = 1$, поскольку $\tau(G_\lambda \ / \ \gamma_n(G_\lambda)) = 1$. Поэтому семейство $U = (\gamma_n(G_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и группа G_U является свободным произведением конечно порожденных нильпотентных групп $G_\lambda \ / \ \gamma_n(G_\lambda)$ без кручения с одной объединенной бесконечной циклической подгруппой $(h\rho_{_U})$. Поскольку ранги групп G_λ ограничены, то полициклические ранги групп $G_\lambda \ / \ \gamma_n(G_\lambda)$ также ограничены. Уравнение (15) принимает вид

$$x^{p^s} = h\rho_{_U}$$

и не разрешимо в группе $G_\lambda \ / \ \gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$.

Таким образом, для группы G_U выполняются все условия предложения 44, в силу которого для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную p-группу такой, что $|h\rho_{_U}\rho| = p^l$. Поэтому выполняется условие 3.

Для завершения доказательства заметим, что импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

Пусть Ω – подмножество множества Λ. Как и в § 1, символом G_Ω будем обозначать подгруппу группы G, порожденную всеми свободными сомножителями G_λ такими, что $\lambda \in \Omega$.

Предложение 57. *Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1. Существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение (15) не разрешимо в группе $G_\lambda \,/\, \gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$.

2. Для любого конечного подмножества Ω множества Λ группа $G_\Omega \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Доказательство. Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Тогда существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $h\sigma \neq 1$. По предложению 56 выполняется условие 1 из формулировки предложения 57. Выполнение условия 2 очевидно.

Обратно, предположим, что выполняются условия 1 и 2. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Обозначим через Ω какое-нибудь конечное подмножество множества Λ такое, что $g \in G_\Omega$. Поскольку $G_\Omega \in {}_R\mathcal{F}_p$, то существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы G_Ω такая, что $g \notin M$. Пусть $|hM| = p^l$. Поскольку выполняется условие 1, то по предложению 56 существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что $|hN| = p^l$.

Для каждого $\omega \in \Omega$ и для каждого $\mu \in \Lambda \setminus \Omega$ введем обозначения:

$$U_\omega = G_\omega \cap M, \qquad U_\mu = G_\mu \cap N.$$

Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и группа G_U является свободным произведением конечных p-групп $G_\lambda \,/\, U_\lambda$ ограниченных порядков с циклическим объединением. По следствию 2.1 $G_U \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Поскольку $g \in G_\Omega \setminus M$, то $g\rho_U \neq 1$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную p-группу такой, что $g\rho_U\rho \neq 1$. Таким образом, $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Доказательство теоремы 17.

Пусть, как и выше, для каждого $\lambda \in \Lambda$ n_λ – наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^{n_\lambda} = h$ разрешимо в группе G_λ.

Докажем первое утверждение теоремы 17. Пусть группа G такова, что все n_λ $(\lambda \in \Lambda)$, за исключением быть может одного, равны 1. Если $\Omega \subseteq \Lambda$, то группа G_Ω обладает тем же свойством, т.е. все n_λ $(\lambda \in \Omega)$, за исключением быть может одного, равны 1. Поэтому в силу теоремы 14 $G_\Omega \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого конечного подмножества Ω множества Λ. Таким образом, выполняется условие 2 из формулировки предложения 57. В этой ситуации предложение 57 утверждает, что $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$(*)$ Существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение (15) не разрешимо в группе $G_\lambda \;/\; \gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$.

Таким образом, имеет место первое утверждение теоремы 17.

Докажем второе утверждение теоремы 17. Пусть среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда все n_λ являются степенями числа p и выполняется условие $(*)$.

Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_p$. Тогда условие $(*)$ выполняется в силу предложения 57. В том, что все n_λ являются степенями числа p легко убедиться, повторяя рассуждение из доказательства теоремы 15.

Обратно, пусть выполняется условие $(*)$ и все n_λ $(\lambda \in \Lambda)$ являются p-числами. Если $\Omega \subseteq \Lambda$, то все n_λ $(\lambda \in \Omega)$ также являются p-числами. Поэтому в силу предложения 51 $G_\Omega \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого конечного подмножества Ω множества Λ. Таким образом, выполняются условия 1 и 2 из формулировки предложения 57, в силу которого $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 18.</u>

Второе утверждение теоремы 18 вытекает из следствия 12.1.

Докажем первое утверждение. Пусть для некоторого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – свободная нециклическая группа. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_N$ тогда и только тогда, когда $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ для некоторого простого числа p. В доказательстве нуждается лишь необходимость.

Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_N$. Возможны два случая:

1. Все n_λ, за исключением быть может одного, равны 1. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}_N$, то существует гомоморфизм ρ группы G на конечную нильпотентную группу такой, что $h\rho \neq 1$. Пусть p – простой делитель порядка элемента $h\rho$, π – проекция группы $G\rho$ на свою наибольшую p-подгруппу. Тогда $h\rho\pi \neq 1$. Поэтому в силу предложения 56 существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение (15) не разрешимо в группе $G_\lambda \;/\; \gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$. В силу первого утверждения теоремы 17 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

2. Пусть теперь среди чисел n_λ хотя бы два отличны от 1. Зафиксируем $\mu, \nu \in \Lambda$ такие, что $\mu \neq \nu$ и $n_\mu \neq 1 \neq n_\nu$. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}_N$, то по предложению 55 все n_λ являются степенями числа p. В частности, p делит числа n_μ и n_ν. Поэтому найдутся элементы $a \in G_\mu \setminus H$ и $b \in G_\nu \setminus H$ такие, что $a^p = h = b^p$.

Зафиксируем элемент $\lambda \in \Lambda$ такой, что группа G_λ не является циклической. Тогда существует элемент $g \in G_\lambda$ такой, что $gh \neq hg$.

Пусть $c = g^{-1}hg$. Очевидно, что $c \in G_\lambda \setminus H$.

Покажем, что элемент

$$\omega = [c, [a, b]\ ] = c^{-1}b^{-1}a^{-1}baca^{-1}b^{-1}ab$$

отличен от 1. Допустим противное. Тогда

$$c = b^{-1}a^{-1}baca^{-1}b^{-1}ab \tag{16}$$

$$c = a^{-1}b^{-1}abcb^{-1}a^{-1}ba. \tag{17}$$

Поскольку $\mu \neq \nu$, то $\mu \neq \lambda$ или $\nu \neq \lambda$. Если $\mu \neq \lambda$, то левая и правая части равенства (16) являются несократимыми словами, длины которыхравны 1 и 9 соответственно, что невозможно. Если же $\nu \neq \lambda$, то левая и правая части равенства (17) являются несократимыми словами, длины которых равны 1 и 9 соответственно, что также невозможно. Таким образом, $\omega \neq 1$.

Покажем, что существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $h\sigma \neq 1$. Допустим противное. Поскольку $c = g^{-1}hg$, то $c\sigma = 1$ для любого гомоморфизма σ группы G на конечную p-группу.

Пусть σ – гомоморфизм группы G на конечную группу P примарного порядка. Если P - p-группа, то $c\sigma = 1$ и, следовательно, $\omega\sigma = 1$. Если же P не является p-группой, то из равенства $a^p = h = b^p$ следует, что $[a, b]\sigma = 1$ и, следовательно, $\omega\sigma = 1$. Отсюда следует, что $\omega\rho = 1$ для любого гомоморфизма ρ группы G на конечную нильпотентную группу. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}_N$, то $\omega = 1$, что невозможно.

Таким образом, $h\sigma \neq 1$ для некоторого гомоморфизма σ группы G на конечную p-группу. По предложению 56 существуют целые положительные числа n и s такие, что уравнение (15) не разрешимо в группе $G_\lambda \ / \ \gamma_n(G_\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Кроме того, все числа n_λ являются степенями числа p и хотя бы два из них отличны от 1. В силу второго утверждения теоремы 17 $G \in {}_R\mathcal{F}_p$.

ГЛАВА 4

О свободном произведении некоторых разрешимых групп с одной объединенной подгруппой.

§14. *Основные результаты четвертой главы.*

Пусть G – свободное произведение групп G_λ ($\lambda \in \Lambda$) с одной объединенной подгруппой H. И пусть множество Λ содержит более одного элемента, причем для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \neq H$. Будем далее предполагать, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – абелева группа.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое множество простых чисел, $\overline{\mathcal{P}}$ – множество всех целых положительных $\mathcal{P}$-чисел. Рассмотрим вопрос об аппроксимируемости группы G конечными $\mathcal{P}$-группами.

Для каждого целого положительного числа n обозначим через H_n подгруппу группы H, порожденную множеством

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (G_\lambda^n \cap H).$$

Следуя Г.Баумслагу, семейство подгрупп $(A_i)_{i\in\mathcal{J}}$ группы A будем называть фильтрацией, если

$$\bigcap_{i\in\mathcal{J}} (A_i) = 1.$$

Периодическую часть абелевой группы B будем обозначать через $\tau(B)$.

Теорема 19. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – абелева группа. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

1. Семейство $(H_n)_{n\in\overline{\mathcal{P}}}$ является фильтрацией;

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \,/\, H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Если в качестве множества $\mathcal{P}$ рассмотреть последовательно одноэлементное множество и множество всех простых чисел, то мы получим следующие два утверждения.

Следствие 19.1. *Пусть p – простое число и все G_λ – абелевы группы. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда семейство $(H_{p^k})_{k\in\mathbb{N}}$ является фильтрацией и для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа $G_\lambda \,/\, H \in {}_R\mathcal{F}_p$.*

Следствие 19.2. *Пусть все G_λ – абелевы группы. Следующие три условия равносильны.*

1. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$.

2. Группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

3. Семейство $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является фильтрацией и для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda \;/\; H \in {}_R\mathcal{F}$.

Во всех приведенных утверждениях используется фильтрационное условие $\cap H_n = 1$. При рассмотрении некоторых частных случаев мы откажемся от использования этого условия.

Следствие 19.3. *Пусть все G_λ – абелевы группы и $|H| < \infty$. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

1. Существует $\mathcal{P}$-число n такое, что для любого $\lambda \in \Lambda\, G_\lambda^n \cap H = 1$;

2. Для любого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Пусть A – периодическая абелева группа, p – простое число. Если порядки p-элементов группы A ограничены, то будем говорить, что A имеет конечный p-период, равный максимальному порядку ее p-элементов.

Следствие 19.4. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ – абелева группа. И пусть для любого простого числа p из $\mathcal{P}$ p-периоды групп $\tau(G_\lambda/H)$ конечны и ограничены в совокупности. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.*

Последнее утверждение нельзя распространить на общий случай, даже если число свободных сомножителей конечно. Соответствующий пример приведен в конце этого параграфа.

Следствие 19.5. *Пусть все G_λ – абелевы $\mathcal{P}$-группы. И пусть для любого $p \in \mathcal{P}$ p-периоды групп G_λ конечны и ограничены в совокупности. Тогда $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.*

Если все G_λ – конечно порожденные абелевы группы или, более общо, ограниченные абелевы группы в смысле [7], то можно доказать более конкретные утверждения:

Следствие 19.6. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ – ограниченная абелева группа. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1. Семейство $(H_n)_{n\in\overline{\mathcal{P}}}$ *является фильтрацией;*

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda \quad \tau(G_\lambda/H)$ *–* $\mathcal{P}$*-группа.*

Следствие 19.7. *Пусть* Λ *– конечное множество и для каждого* $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ *– ограниченная абелева группа. Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $\lambda \in \Lambda \quad \tau(G_\lambda)$ *и* $\tau(G_\lambda/H)$ *–* $\mathcal{P}$*-группы.*

Следствие 19.8. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda \quad G_\lambda$ *– ограниченная абелева группа без кручения. Тогда следующие три условия равносильны.*

1. Группа G *аппроксимируется нильпотентными группами.*

2. Существует простое число p *такое, что для любого* $\lambda \in \Lambda$ $\tau(G_\lambda/H)$ *–* p*-группа.*

3. Существуют простые числа p *и* q *такие, что* $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$.

Доказательства перечисленных результатов приведены в § 15.

Приведем один результат, относящийся к случаю свободного произведения двух групп с циклическим объединением. Пусть A, B – группы, $h \in A,\ k \in B,\ |h| = |k|$. И пусть

$$G = (A * B;\ h = k).$$

Г.Баумслаг [9] доказал, что $G \in {}_R\mathcal{F}$, если A и B свободны или являются конечно порожденными нильпотентными группами. Д.Дайер [13] доказала, что $G \in {}_R\mathcal{F}$, если A и B – почти полициклические группы. Следующая теорема обобщает эти результаты.

Теорема 20. *Группа* $G \in {}_R\mathcal{F}$*, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:*

1. Группы A *и* B *являются конечными расширениями ограниченных разрешимых групп.*

2. Группы A *и* B *являются конечными расширениями групп, аппроксимируемых ограниченными разрешимыми группами без кручения.*

Доказательство теоремы 20 (в действительности, более общего утверждения) приведено в § 16. Используемое в этой теореме понятие ограниченной разрешимой группы введено А.И.Мальцевым в [7].

Приведем, в заключение, пример группы $G = (A * B; H = K)$, где A, B – абелевы группы; $A, B, A/H, B/K \in {}_R\mathcal{F}$, но $G \notin {}_R\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{P}$ – непустое собственное подмножество множества всех простых чисел,

$$A = \langle\ a_s\ (s \in \mathbb{N});\ a_i a_j = a_j a_i,\ a_i^{m_i} = a_j^{m_j}\ (i, j \in \mathbb{N})\ \rangle,$$

где числа $m_1, m_2, \ldots$ составляют множество $\overline{\mathcal{P}}$ всех $\mathcal{P}$-чисел. И пусть $H = (h)$, где h – элемент группы A, совпадающий с каждым из элементов $a_i^{m_i}$. Группа A/H является прямым произведением конечных циклических групп и, следовательно, $A/H \in {}_R\mathcal{F}$. Гомоморфизм $\sigma\ :\ A \to Q$, продолжающий отображение $a_i \to 1/m_i$ $(i \in \mathbb{N})$, инъективен на H, причем $\mathcal{J}m\sigma = Q_{\mathcal{P}} \neq Q$. Хорошо известно, что все собственные подгруппы группы Q финитно аппроксимируемы. Поэтому для любого элемента $a \in H\backslash 1$ существует гомоморфизм ρ группы A на конечную группу такой, что $a\rho \neq 1$. Отсюда и из того, что $A/H \in {}_R\mathcal{F}$, следует $A \in {}_R\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{P}'$ – множество всех простых чисел, не входящих в $\mathcal{P}$,

$$B = \langle\ b_s\ (s \in \mathbb{N});\ b_i b_j = b_j b_i,\ b_i^{n_i} = b_j^{n_j}\ (i, j \in \mathbb{N})\ \rangle,$$

где числа $n_1, n_2, \ldots$ составляют множество $\overline{\mathcal{P}'}$. И пусть $K = (k)$, где k – элемент группы B, совпадающий с каждым из элементов $b_i^{n_i}$. Тогда $B, B/K \in {}_R\mathcal{F}$.

Покажем, что группа $G = (A * B;\ h = k)$ не является финитно аппроксимируемой. Пусть φ – гомоморфизм группы G на конечную группу порядка l. Запишем число l в виде: $l = mn$, где $m \in \overline{\mathcal{P}},\ n \in \overline{\mathcal{P}'}$. Тогда $a^m = h = b^n$ для некоторых элементов $a \in A,\ b \in B$ и

$$(h\varphi)^n = (a\varphi)^l = 1, \quad (h\varphi)^m = (b\varphi)^l = 1.$$

Отсюда и из того, что $(m, n) = 1$, следует $h\varphi = 1$. Поэтому $G \notin {}_R\mathcal{F}$.

§15. О свободном произведении абелевых групп с одной объединенной подгруппой.

В этом параграфе мы сохраняем обозначения, введенные в § 14.

С помощью первой теоремы Прюфера ([3] с.85) легко установить справедливость следующего утверждения.

Предложение 58. *Пусть A – абелева $\mathcal{P}$-группа и для любого $p \in \mathcal{P}$ p-период группы A конечен. Тогда $A \in {}_R\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.*

Предложение 59. *Пусть n – целое положительное $\mathcal{P}$-число. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – абелева группа с тождеством $x^n = 1$. Тогда $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $|H| < \infty$.

Пусть $\lambda \in \Lambda$. Поскольку $G_\lambda^n = 1$, то в силу первой теоремы Прюфера G_λ раскладывается в прямую сумму циклических групп B_i ($i \in \mathcal{J}$). Пусть для каждого $i \in \mathcal{J}$ π_i – проекция группы G_λ на B_i. Для каждого элемента $h \in H\backslash 1$ зафиксируем индекс $i_h \in \mathcal{J}$ такой, что

$$h\pi_{i_h} \neq 1.$$

Пусть

$$U_\lambda = \bigcap_{h \in H\backslash 1} Ker\ \pi_{i_h}.$$

Поскольку $|H| < \infty$, то U_λ – нормальная подгруппа конечного индекса группы G_λ, тривиально пересекающая H, причем индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены числом $n^{|H|}$. Кроме того, поскольку $G_\lambda^n = 1$ и n – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 58 $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. По теореме 5 $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $|H| = \infty$.

Поскольку $(G_\lambda/H)^n = 1$ и n – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 58 $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Группа G/H является свободным произведением групп $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. По предложению 2 $G/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, т.е. что для любого элемента $x \in G\backslash 1$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\sigma \neq 1$. Если $x \in G\backslash H$, то такой гомоморфизм существует, поскольку $G/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Остается рассмотреть случай, когда $x \in H\backslash 1$. Поскольку $H^n = 1$ и n – $\mathcal{P}$-число, то по предложению 58 $H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Поэтому существует подгруппа N конечного индекса группы H, не содержащая x. Тогда $x\varepsilon \neq 1$, где $\varepsilon : G \to G/N$ – естественный гомоморфизм. Группа G/N является свободным произведением групп G_λ/N с одной объединенной конечной подгруппой H/N, причем $(G_\lambda/N)^n = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$. В силу рассмотренного частного случая $G/N \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Поскольку $x\varepsilon \in G/N\backslash 1$, то существует гомоморфизм ρ группы G/N на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\varepsilon\rho \neq 1$. Гомоморфизм $\sigma = \varepsilon\rho$ является искомым.

Отметим без доказательства следующее легко проверяемое утверждение.

Предложение 60. *Пусть* $F \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ *и* $Z(F)$ *– центр группы* F. *Тогда* $F/Z(F) \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

<u>Доказательство теоремы 19.</u>

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – абелева группа. Поскольку Λ содержит более одного элемента и $G_\lambda \neq H$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то $H = Z(G)$.

Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 1 и 2 из формулировки теоремы 19.

Пусть $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. По предложению 60 $G/Z(G) \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, т.е. $G/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Поскольку $G_\lambda/H \leqslant G/H$, то $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Поэтому выполняется условие 2.

Пусть N – нормальная подгруппа конечного $\mathcal{P}$-индекса n группы G. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ $(G_\lambda^n \cap H) \leqslant N$ и, следовательно, $H_n \leqslant N$. Отсюда и из того, что семейство всех подгрупп конечного $\mathcal{P}$-индекса группы G является фильтрацией, следует, что семейство $(H_n)_{n\in\overline{\mathcal{P}}}$ также является фильтрацией, т.е. выполняется условие 1.

Наоборот, предположим, что выполняются условия 1 и 2. Группа G/H является свободным произведением групп G_λ/H, причем $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ ввиду условия 2. По предложению 2 $G/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, т.е. что для любого элемента $x \in G\backslash 1$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\sigma \neq 1$. Если $x \in G\backslash H$, то такой гомоморфизм существует, поскольку $G/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Остается рассмотреть случай, когда $x \in H\backslash 1$. В силу условия 1 $x \notin H_n$ для некоторого $n \in \overline{\mathcal{P}}$. Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$

$$U_\lambda = G_\lambda^n H_n.$$

Покажем, что для любого $\lambda \in \Lambda$

$$U_\lambda \cap H = H_n. \tag{18}$$

В самом деле, пусть $h \in U_\lambda \cap H$. Поскольку $h \in U_\lambda$, то $h = g^n f$, где $g \in G_\lambda$, $f \in H_n$. Поскольку $h, f \in H$, то $g^n \in H$ и, следовательно, $g^n \in G_\lambda^n \cap H$. Поэтому $g^n \in H_n$. Поскольку f также принадлежит H_n и $h = g^n f$, то $h \in H_n$. Таким образом, $U_\lambda \cap H \subseteq H_n$. Обратное включение очевидно.

Из (18) следует, что семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо. Группа G_U является свободным произведением с одной объединенной подгруппой групп G_λ/U_λ. Поскольку $G_\lambda^n \subseteq U_\lambda$, то группы G_λ/U_λ удовлетворяют тождеству $y^n = 1$, причем n является $\mathcal{P}$-числом. По предложению 59 $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Поскольку $x \in H \backslash H_n$, то в силу (18) $x \notin U_\lambda$. Поэтому $x\rho_U \neq 1$. Поскольку $G_U \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$, то существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную $\mathcal{P}$-группу такой, что $x\rho_U\rho \neq 1$. Гомоморфизм $\sigma = \rho_U\rho$ является искомым.

Таким образом, $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Следующее утверждение вытекает из предложения 9.

Предложение 61. *Пусть все G_λ – абелевы группы. И пусть x, y – циклически несократимые элементы группы G, сопряженные в G.*

1. Если x лежит в свободном множителе, то $y = x$.

2. Если x не лежит ни в каком свободном множителе и имеет несократимую запись $x = x_1 \dots x_r$, то $y = x^*$, где x^* – циклическая перестановка произведения $x_1 \dots x_r$.

Следующее утверждение вытекает из предложения 60.

Предложение 62. *Пусть все G_λ – абелевы группы. Если $G \in {}_R\mathcal{F}$, то H – финитно отделимая подгруппа группы G.*

Предложение 63. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – абелева группа и $G \in {}_R\mathcal{F}$. Тогда группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.*

Доказательство. Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}$, то по предложению 62 H – финитно отделимая подгруппа группы G.

Пусть x и y – несопряженные элементы группы G. Покажем, что существует гомоморфизм σ группы G на конечную группу B такой, что $x\sigma \nsim_B y\sigma$. Без потери общности можно считать, что x и y – циклически несократимые элементы, имеющие записи $x = x_1 \dots x_r$ и $y = y_1 \dots y_s$.

Поскольку $G \in {}_R\mathcal{F}$ и H – финитно отделимая подгруппа группы G, то существует нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что выполняются следующие условия:

1. Если $x \notin H$, то $x_i \notin HN$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$;

2. Если $y \notin H$, то $y_j \notin HN$ для всех $j = 1, 2, \dots, s$;

3. Если $r = s = 1$, то $xN \neq yN$;

4. Если $r = s > 1$, то $yN \neq x^*N$ для любой циклической перестановки x^* произведение $x_1 \dots x_r$.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ $U_\lambda = G_\lambda \cap N$. Тогда семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо. Группа G_U является свободным произведением конечных групп ограниченных порядков с одной объединенной подгруппой. По следствию 1.1 группа G_U финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Поскольку естественный гомоморфизм $G \to G/N$ проходит через $\rho_{_U}$, то из 1–4 получаем:

1^0. Если $x \notin H$, то $x_i\rho_{_U} \notin H\rho_{_U}$ для всех $i = 1, \ldots, r$, т.е. элемент $x\rho_{_U}$ циклическми несократим и имеет циклически несократимую запись $x_1\rho_{_U} \ldots x_r\rho_{_U}$;

2^0. Если $y \notin H$, то $y_j\rho_{_U} \notin H\rho_{_U}$ для всех $j = 1, \ldots, s$, т.е. элемент $y\rho_{_U}$ циклически несократим и имеет циклически несократимую запись $y_1\rho_{_U} \ldots y_s\rho_{_U}$;

3^0. Если $r = s = 1$, то $x\rho_{_U} \neq y\rho_{_U}$;

4^0. Если $r = s > 1$, то $y\rho_{_U} \neq (x\rho_{_U})^*$ для любой циклической перестановки $(x\rho_{_U})^*$ произведения $x_1\rho_{_U} \ldots x_r\rho_{_U}$.

Если $r \neq s$, то ввиду 1^0 и 2^0 элементы $x\rho_{_U}$ и $y\rho_{_U}$ имеют циклически несократимые записи, длины которых различны, и, следовательно, $x\rho_{_U} \nsim {}_{G_U} y\rho_{_U}$ в силу предложения 61. Если $r = s = 1$, то ввиду 3^0 $x\rho_{_U}$ и $y\rho_{_U}$ – различные элементы группы G_U, лежащие в свободных сомножителях и, следовательно, $x\rho_{_U} \nsim {}_{G_U} y\rho_{_U}$ согласно предложения 61. Если же $r = s > 1$, то в силу 4^0 $y\rho_{_U} \neq (x\rho_{_U})^*$ для любой циклической перестановки произведения $x_1\rho_{_U} \ldots x_r\rho_{_U}$. И снова по предложению 61 заключаем, что $x\rho_{_U} \nsim {}_{G_U} y\rho_{_U}$.

Таким образом, $x\rho_{_U} \nsim {}_{G_U} y\rho_{_U}$. Поскольку группа G_U финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу B такой, что $x\rho_{_U}\rho \nsim$ $\nsim {}_B y\rho_{_U}\rho$. Гомоморфизм $\sigma = \rho_{_U}\rho$ является искомым.

<u>Доказательства следствий 19.1 и 19.2.</u>

Следствие 19.1 непосредственно вытекает из теоремы 19. Следствие 19.2 вытекает из теоремы 19 и предложения 63.

<u>Доказательство следствия 19.3.</u>

В доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть выполняются условия 1 и 2 из формулировки следствия 19.3. Из условия 1 следует, что $H_n = 1$ для $\mathcal{P}$-числа n. Поэтому $(H_n)_{n \in \overline{\mathcal{P}}}$ – фильтрация. Из условия 2 и конечности группы H следует, что $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Таким образом, выполняются условия 1 и 2 из формулировки теоремы 19, в силу которой $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Доказательство следствия 19.4.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ G_λ – абелева группа. И пусть для каждого простого числа $p \in \mathcal{P}$ p-периоды групп $\tau(G_\lambda/H)$ конечны и ограничены некоторым числом p^{s_p}. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. необходимость очевидна ввиду теоремы 19.

Пусть теперь G_λ, $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Покажем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Зафиксируем какую-нибудь подгруппу M конечного $\mathcal{P}$-индекса m группы H. И пусть Π – подмножество множества $\mathcal{P}$, состоящее из всех простых делителей числа m. Поскольку Π – конечное множество, то порядки Π-элементов групп $\tau(G_\lambda/H)$ ограничены числом

$$k = \prod_{p\in\Pi} p^{s_p}.$$

Рассмотрим Π-число $n = km$.

Пусть $\lambda \in \Lambda$. Покажем, что

$$(G_\lambda^n \cap H) \leqslant M. \tag{19}$$

Пусть $x \in G_\lambda^n \cap H$. Тогда $x \in H$ и $x = g^n$ для некоторого $g \in \in G_\lambda$. Поскольку n – Π-число и $g^n \in H$, то gH – Π-элемент группы $\tau(G_\lambda/H)$ и, следовательно, $(gH)^k = 1$, т.е. $g^k \in H$. Отсюда следует, что $g^{km} \in M$, поскольку $[H : M] = m$. Таким образом, $x \in M$. Мы доказали включение (19), из которого следует, что $H_n \leqslant M$.

Таким образом, для любой подгруппы M конечного $\mathcal{P}$-индекса группы H существует $\mathcal{P}$-число n такое, что $H_n \leqslant M$. Множество всех подгрупп M конечного $\mathcal{P}$-индекса группы H является фильтрацией, поскольку $H \leqslant G_\lambda$ и $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$. Поэтому множество $(H_n)_{n\in\overline{\mathcal{P}}}$ также является фильтрацией. Отсюда и из того, что $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ для любого $\lambda \in \Lambda$, по теореме 19 заключаем, что $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Доказательство следствия 19.5.

Пусть все G_λ – абелевы $\mathcal{P}$-группы и для каждого простого p p-периоды групп G_λ конечны и ограничены. Тогда p-периоды групп $\tau(G_\lambda/H) = G_\lambda/H$ также конечны и ограничены. По предложению 58 $G_\lambda \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ и $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Ввиду следствия 19.4 $G \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

В [7] доказано, что ограниченная разрешимая группа финитно аппроксимируема и все ее подгруппы финитно отделимы. Поэтому все фактор-группы ограниченной разрешимой группы финитно аппроксимируемы. Более того, любая фактор-группа ограниченной разрешимой группы сама является ограниченной разрешимой группой.

Предложение 64. *Ограниченная абелева группа $A \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $\tau(A)$ – $\mathcal{P}$-группа.*

<u>Доказательство.</u> Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\tau(A)$ – $\mathcal{P}$-группа. И пусть $a \in A\backslash 1$. Тогда найдется простое число $p \in \mathcal{P}$ такое, что a не принадлежит подгруппе $M = (a^p)$, т.е. $|aM| = p$. В самом деле, если $|a| = \infty$, то в качестве p можно взять любое число из $\mathcal{P}$. Если же $|a| < \infty$, то в качестве p нужно взять простой делитель порядка элемента a. Поскольку $A/M \in {}_R\mathcal{F}$, то существует гомоморфизм φ группы A/M на конечную группу B, такой, что $|(aM)\varphi| = p$. Пусть π – проекция группы B на наибольшую p-подгруппу P группы B. Тогда $(aM)\varphi\pi \neq 1$. Таким образом, $A \in {}_R\mathcal{F}_\mathcal{P}$.

<u>Доказательства следствий 19.6 и 19.7.</u>

Следствие 19.6 вытекает из теоремы 19 и предложения 64. Докажем следствие 19.7. Пусть Λ – конечное множество и все G_λ – ограниченные абелевы группы. По определению ограниченной абелевой группы все примарные компоненты ее конечной части конечны. Поэтому примарные компоненты групп $\tau(G_\lambda/H)$ имеют конечные порядки, причем эти порядки ограничены, поскольку Λ – конечное множество. Отсюда следует, что к рассматриваемому свободному произведению можно применить следствие 19.4. Справедливость следствия 19.7 вытекает из следствия 19.4 и предложения 64.

<u>Доказательство следствия 19.8.</u>

Пусть все G_λ – ограниченные абелевы группы без кручения. Покажем, что условия 1–3 из формулировки следствия 19.8 равносильны.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

Импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу предложения 42. Остается проверить импликацию $2 \Rightarrow 3$.

Пусть существует простое число p такое, что для любого $\lambda \in \Lambda$ $\tau(G_\lambda/H)$ – p-группа. По предложению 64 $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_p$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Поскольку группа G/H является свободным произведением групп $G_\lambda/H \in {}_R\mathcal{F}_p$, то по предложению 2 $G/H \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Зафиксируем простое число $q \neq p$. Покажем, что $G \in {}_R(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q)$. Если $g \in G \backslash H$, то существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу такой, что $g\sigma \neq 1$, поскольку $G/H \in {}_R\mathcal{F}_p$.

Пусть теперь $g \in H \backslash 1$. Поскольку H – ограниченная разрешимая группа без кручения, то по предложению 64 $H \in {}_R\mathcal{F}_q$. Поэтому $g \notin$ $\notin H^{q^n}$ для достаточно большого числа n.

Пусть $\lambda \in \Lambda$. Поскольку $\tau(G_\lambda/H)$ – p-группа и $(p,q)=1$, то

$$G_\lambda^{q^n} \cap H = H^{q^n}.$$

Отсюда следует, что семейство

$$U = (G_\lambda^{q^n})_{\lambda \in \Lambda}$$

совместимо и $g\rho_U \neq 1$. По предложению 59 $G_U \in {}_R\mathcal{F}_q$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную q-группу такой, что $g\rho_U\rho \neq 1$.

Таким образом, для любого $g \in G \backslash 1$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную p-группу или на конечную q-группу такой, что $g\sigma \neq 1$.

§*16. О свободном произведении ограниченных разрешимых групп с одной циклической объединенной подгруппой.*

Предложение 65. *Пусть a – элемент бесконечного порядка ограниченной абелевой группы A. Тогда для любого целого положительного числа n существует целое положительное число k такое, что $|aA^k| = n$.*

Доказательство. Пусть n – целое положительное число. Покажем, что $|aA^k| = n$ для некоторого целого положительного числа k. Опуская тривиальный случай, когда $n = 1$, будем считать, что $n > 1$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда $n = p^s$, где p – простое число, $s > 0$. По предложению 64 $A/\tau(A) \in {}_R\mathcal{F}_p$. Поэтому

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A^{p^i} \leqslant \tau(A).$$

Отсюда и из того, что элемент

$$v = a^{p^{s-1}}$$

не принадлежит $\tau(A)$, следует, что

$$v \in A^{p^{j-1}} \backslash A^{p^j}$$

для некоторого целого положительного числа j. При этом

$$|vA^{p^j}| = p$$

и, следовательно,

$$|aA^{p^j}| = p^s = n.$$

Пусть теперь n – произвольное целое положительное число. И пусть

$$n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}, \tag{20}$$

где $p_1, \dots, p_r$ – попарно различные простые числа. Ввиду рассмотренного частного случая для каждого $l = 1, \dots, r$ существует целое положительное число j_l такое, что

$$|aA^{p_l^{j_l}}| = p_l^{s_l}. \tag{21}$$

Пусть

$$k = p_1^{j_1} \dots p_r^{j_r}. \tag{22}$$

Покажем, что

$$A^k = \bigcap_{l=1}^{r} A^{p_l^{j_l}} \tag{23}$$

Пусть

$$x \in \bigcap_{l=1}^{r} A^{p_l^{j_l}},$$

т.е. для каждого $l = 1, \dots, r$ существует элемент $x_l \in A$ такой, что

$$x = x_l^{p_l^{j_l}}.$$

Для каждого $l = 1, \dots, r$ введем обозначение:

$$k_l = k/p_l^{j_l}.$$

Тогда

$$x^{k_l} = x_l^k.$$

Поэтому для любого $l = 1, \ldots, r$ $x^{k_l} \in A^k$. Отсюда и из того, что числа $k_1, \ldots, k_r$ взаимно просты в совокупности, следует $x \in A^k$. Таким образом,

$$\bigcap_{l=1} A^{p_l^{j_l}} \subseteq A^k.$$

Поскольку обратное включение очевидно, то равенство (23) доказано.

Из (20) – (23) получаем:

$$|aA^k| = \prod_{l=1}^{r} |aA^{p_l^{j_l}}| = \prod_{l=1}^{r} p_l^{s_l} = n.$$

Предложение доказано.

Пусть h – элемент бесконечного порядка группы F. Группу F будем называть почти мощной относительно элемента h, если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n найдется гомоморфизм группы F на конечную группу, переводящий h в элемент порядка mn.

Предложение 66. *Пусть B – конечное расширение ограниченной разрешимой группы C. Группа B является почти мощной относительно любого своего элемента бесконечного порядка.*

Доказательство. Пусть $h \in B$ и $|h| = \infty$. Рассмотрим ряд коммутантов группы C :

$$C = C^{(1)} \geqslant C^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant C^{(r)} = 1.$$

Очевидно, что найдется число $j = 1, \ldots, r-1$ такое, что

$$|hC^{(j)}| = m < \infty, \quad |hC^{(j+1)}| = \infty.$$

Введем обозначения:

$$\overline{B} = B/C^{(j+1)}, \quad A = C^{(j)}, \quad \overline{A} = A/C^{(j+1)}, \quad \overline{h} = hC^{(j+1)}.$$

Очевидно, что

$$|\overline{h}| = \infty, \quad |\overline{h}\ \overline{A}| = m. \tag{24}$$

Зафиксируем целое положительное число n. Поскольку $\overline{h}^m$ – элемент бесконечного порядка ограниченной абелевой группы $\overline{A}$, то по предложению 65

$$|\overline{h}^m\overline{A}^k| = n \tag{25}$$

для некоторого целого положительного числа k.

Поскольку $A \trianglelefteq B$, то $\overline{A} \trianglelefteq \overline{B}$ и, следовательно, $\overline{A}^k \trianglelefteq \overline{B}$. Введем обозначения:

$$\overline{\overline{B}} = \overline{B}/\overline{A}^k, \quad \overline{\overline{h}} = \overline{h}\ \overline{A}^k.$$

Поскольку B является конечным расширением ограниченной разрешимой группы, то $\overline{\overline{B}}$ обладает тем же свойством. Поэтому $\overline{\overline{B}} \in {}_R\mathcal{F}$. Далее, из (24) и (25) следует, что

$$(\overline{h}) \cap \overline{A} = (\overline{h}^m), \quad (\overline{h}^m) \cap \overline{A}^k = (\overline{h}^{mn}).$$

Отсюда получаем:

$$(\overline{h}) \cap \overline{A}^k = (\overline{h}) \cap \overline{A} \cap \overline{A}^k = (\overline{h}^m) \cap \overline{A}^k = (\overline{h}^{mn}),$$

Поэтому $|\overline{\overline{h}}| = mn$. Отсюда, учитывая финитную аппроксимируемость группы $\overline{\overline{B}}$, заключаем, что существует гомоморфизм ψ группы $\overline{\overline{B}}$ на конечную группу такой, что $|\overline{\overline{h}}\psi| = mn$.

Пусть φ – произведение естественных гомоморфизмов $B \to \overline{B}$, $\overline{B} \to \overline{\overline{B}}$ и гомоморфизма ψ. Тогда $|h\varphi| = |\overline{\overline{h}}\psi| = mn$. Таким образом, группа B является почти мощной относительно элемента h.

Предложение 67. *Пусть B – конечное расширение группы C, аппроксимируемой ограниченными разрешимыми группами без кручения. Тогда группа B является почти мощной относительно любого своего элемента бесконечного порядка.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $h \in B$ и $|h| = \infty$. Тогда для некоторого целого положительного числа k $h^k \in C$. Поскольку $h^k \neq 1$ и C аппроксимируется ограниченными разрешимыми группами без кручения, то найдется нормальная подгруппа N группы C такая, что $h^k \notin N$ и C/N – ограниченная разрешимая группа без кручения. Поскольку $h^k \in C \backslash N$, то $|h^k N| = \infty$. Пусть

$$M = \bigcap_{i=1}^{r} b_i^{-1} N b_i,$$

где $b_1, \ldots, b_r$ – система представителей смежных классов группы B по подгруппе C. Тогда $M \trianglelefteq B$, $|h^k M| = \infty$ и, следовательно, $|hM| = \infty$. Поскольку

$$C/M \leqslant \prod_{i=1}^{r} C/b_i^{-1} N b_i$$

и для каждого $i = 1, \ldots, r$

$$C/b_i^{-1} N b_i \cong C/N,$$

то C/M – ограниченная разрешимая группа. Отсюда и из того, что

$$B/M \big/ C/M \cong B/C,$$

следует, что B/M – конечное расширение ограниченной разрешимой группы. По предложению 66 группа B/M является почти мощной относительно элемента hM. Поэтому группа B является почти мощной относительно элемента h.

Предложение 68. *Пусть $\mathcal{K}$ – класс групп без кручения такой, что выполняются два условия:*

1. Если $X \in \mathcal{K}$ и $Y < X$, то $Y \in \mathcal{K}$;

2. Если $X \in \mathcal{K}$ и $Y \in \mathcal{K}$, то $X \times Y \in \mathcal{K}$.

Если группа $C \in {}_R\mathcal{K}$, то все циклические подгруппы группы C $\mathcal{K}$-отделимы.

Доказательство. Пусть $C \in {}_R\mathcal{K}$ и $T = (t) \leqslant C$. Покажем, что подгруппа T $\mathcal{K}$-отделима. Опуская тривиальный случай, когда $t = 1$, будем предполагать, что $t \neq 1$. Ясно, что $|t| = \infty$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{D}$ всех нормальных подгрупп D группы C таких, что $t \notin D$ и $C/D \in \mathcal{K}$. Поскольку $C \in {}_R\mathcal{K}$, то класс $\mathcal{D}$ содержит хотя бы одну подгруппу D_0. Покажем, что $\mathcal{D}$ – фильтрация. Пусть $c \in C \backslash 1$. Поскольку $C \in {}_R\mathcal{K}$, то существует нормальная подгруппа H группы C такая, что $c \notin H$ и $C/H \in \mathcal{K}$. Пусть $D_1 = H \cap D_0$. Поскольку $C/H \in \mathcal{K}$ и $C/D_0 \in \mathcal{K}$, то $C/D_1 \in \mathcal{K}$ ввиду условий 1 и 2. Кроме того, $c \notin D_1$ и $t \notin D_1$. Поэтому D_1 – подгруппа из $\mathcal{D}$, не содержащая c. Таким образом, $\mathcal{D}$ – фильтрация.

Пусть $x \in C \backslash T$. Покажем, что $xN \notin TN/N$ для некоторой подгруппы $N \in \mathcal{D}$. Допустим противное. Пусть $M, N \in \mathcal{D}$. Из условий 1 и 2 следует, что подгруппа $\mathcal{L} = M \cap N$ также принадлежит $\mathcal{D}$.

Тогда существуют целые числа m, n и l такие, что
$$xM = t^m M, \quad xN = t^n N, \quad x\mathcal{L} = t^l \mathcal{L}.$$
Поскольку $\mathcal{L} \leqslant M$ и $\mathcal{L} \leqslant N$, то
$$xM = t^l M, \quad xN = t^l N.$$
Поэтому
$$t^m M = t^l M, \quad t^n N = t^l N.$$
Поскольку $|tM| = |tN| = \infty$, то $m = l = n$. Таким образом, существует целое число d такое, что для любой подгруппы $D \in \mathcal{D}$
$$xD = t^d D.$$
Отсюда и из того, что $\mathcal{D}$ – фильтрация, следует $x = t^d$, что невозможно. Таким образом, существует подгруппа $N \in \mathcal{D}$ такая, что $xN \notin TN/N$. Поэтому подгруппа T группы C $\mathcal{K}$-отделима.

Поскольку все подгруппы ограниченной разрешимой группы финитно отделимы [7], то следующее утверждение является следствием предложения 68.

Предложение 69. *Пусть группа C аппроксимируется ограниченными разрешимыми группами без кручения. Тогда все циклические подгруппы группы C финитно отделимы.*

Предложение 70. *Пусть B – конечное расширение группы C.*

1. Если C – ограниченная разрешимая группа, то все подгруппы группы B финитно отделимы.

2. Если C аппроксимируется ограниченными разрешимыми группами без кручения, то все циклические подгруппы группы B финитно отделимы.

Доказательство. Легко проверить, что если все подгруппы группы C финитно отделимы, то и все подгруппы группы B финитно отделимы. Отсюда вытекает первое утверждение предложения 70, поскольку все подгруппы ограниченной разрешимой группы финитно отделимы.

Легко также проверить, что если все циклические подгруппы группы C финитно отделимы, то и все циклические подгруппы группы B финитно отделимы. Отсюда и из предложения 69 вытекает справедливость второго утверждения.

Пусть G – свободное произведение групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объединенной бесконечной циклической подгруппой $H = (h)$.

Предложение 71. *Пусть Λ – конечное множество и для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является почти мощной относительно h. Тогда группа G является почти мощной относительно h.*

<u>Доказательство.</u> По условию для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует целое положительное число m_λ такое, что для любого целого положительного числа k существует гомоморфизм группы G_λ на конечную группу, переводящий h в элемент порядка $m_\lambda k$. Пусть

$$m = \prod_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda.$$

И пусть k – произвольное целое положительное число. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что $|hU_\lambda| = mk$. Семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ совместимо и группа $G_{_U} \in {}_R\mathcal{F}$ по теореме Г.Баумслага. Поскольку $|h\rho_{_U}| = mk$, то существует гомоморфизм ρ группы $G_{_U}$ на конечную группу такой, что $|h\rho_{_U}\rho| = mk$. Таким образом, группа G является почти мощной относительно элемента h.

Предложение 72. *Пусть Λ – конечное множество и для каждого $\lambda \in \Lambda$ выполняются два условия:*

1. Группа G_λ является почти мощной относительно h;

2. Подгруппа H группы G_λ финитно отделима.

Тогда группа $G \in {}_R\mathcal{F}$.

<u>Доказательство.</u> В силу предложения 5 для доказательства финитной аппроксимируемости группы G достаточно проверить выполнение двух условий:

(i) Для любого $h^k \in H\backslash 1$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную группу такой, что $h^k\sigma \neq 1$.

(ii) Для любого $\mu \in \Lambda$ и для любого $x \in G_\mu\backslash H$ существует гомоморфизм σ группы G на конечную группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.

Условие (i) выполняется ввиду предложения 71. Проверим условие (ii).

Пусть $\mu \in \Lambda,\ x \in G_\mu\backslash H$. Поскольку H – финитно отделимая подгруппа группы G_μ, то существует подгруппа M конечного индекса группы G_μ такая, что $x \notin HM$. Пусть $k = |hM|$. По предложению 71 существует целое положительное число m и нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такие, что $|hN| = mk$. Пусть $U_\mu = G_\mu \cap M \cap N$. Тогда $x \notin HU_\mu$ и $|hU_\mu| = mk$. Если $\lambda \in \Lambda$ и

$\lambda \neq \mu$, то положим $U_\lambda = G_\lambda \cap N$. Семейство $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ совместимо и $G_{U} \in {}_R\mathcal{F}$. Поскольку $x \notin HU_\mu$, то $x\rho_{U}$ не принадлежит конечной подгруппе $H\rho_{U}$ группы $G_{U} \in {}_R\mathcal{F}$. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы G_{U} на конечную группу такой, что $x\rho_{U}\rho \notin H\rho_{U}\rho$.

Таким образом, выполняется условие (ii).

Предложение 73. *Пусть Λ – конечное множество. Группа $G \in {}_R\mathcal{F}$, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:*

1. Свободные сомножители G_λ являются конечными расширениями ограниченных разрешимых групп;

2. Свободные сомножители G_λ являются конечными расширениями групп, аппроксимируемых ограниченными разрешимыми группами без кручения.

Это утверждение вытекает из предложений 72, 66, 67, 70. Очевидно, что предложение 73 распространяется и на случай, когда $|H| < \infty$.

Теорема 20 является частным случаем предложения 73.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горяга А.В.* Пример конечного расширения ФАС-группы, не являющегося ФАС-группой // Сиб. мат.ж. 1986. т. 27. № 3. с. 203 – 205.
2. *Залесский П.А., Тавгень О.И.* Замкнутость орбит и финитная аппроксимируемость относительно сопряженности свободных амальгамированных произведение // Мат. заметки. 1995. т. 58. № 4. с. 525 – 535.
3. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука. 1972.
4. *Курош А.Г.* Теория групп. М.: Наука. 1967.
5. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир. 1980.
6. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука. 1974.
7. *Мальцев А.И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин–та. Иваново, 1958. т. 18. № 5. с. 49 – 60.
8. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. т. 12. № 1. с. 3 – 36.
9. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. v. 106. p. 193 – 209.
10. *Baumslag G.* On the residual nilpotence of certain one - relator groups // Communs Pure and Appl. Math. 1968. v.21. № 5. p. 491 – 506.
11. *Boler J.* The free products of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. v. 37. № 1. p. 50 – 52.
12. *Brunner A., Burns R., Solitar D.* The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation // Contemp Math. 1984. v. 33 p. 90 – 115.
13. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. v. 133. № 1. p. 131 – 143.
14. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN-extensions // J. Austral. Math. Soc. 1980. v. A29. № 1. p. 35 – 51.
15. *Gildenhuys D.* One-relator groups that are residually of prime power order // J. Austral. Math. Soc. 1975. v. A19. p. 385 – 410.

16. *Grunberg K.W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. v. 7. p. 29 – 62.
17. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. v. 1. p. 301 – 305.
18. *Neumann B.* An essau on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. of London. 1954. v. 246. p. 503 – 554.
19. *Raptis E., Varsas D.* The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups. A characterization // J. Austral. Math. Soc. 1992. v. 35. № 3. p. 408 – 420.
20. *Shirvani M.* A convers to a residual finiteness theorem of G.Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. v. 104. № 3. p. 703 – 706.
21. *Stebe P.* A residual property of sertain groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. v. 26. p. 37 – 42.
22. *Stebe P.* Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Amer. Matn. Soc. 1971. v. 156. p. 119 – 129.
23. *Tang C.Y.* On the subgroup separability of generalized free products of nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. v. 113. № 2. p. 313 – 318.
24. *Tretkoff M.* The residual finiteness of certain amalgamated free products // Wath Z. 1973. № 2. p. 179 – 182.
25. *Азаров Д.Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журнал. 1997. Т. 38 № 1. С. 3 – 13.
26. *Азаров Д.Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64 № 1. С. 3 – 8.
27. *Азаров Д.Н.* Аппроксимационные свойства свободных произведений нильпотентных групп с циклическим объединением // Международная алгебраическая конференция памяти Д. К. Фаддева: С.-Петербург. 1997. Тез.докл. С. 153.
28. *Азаров Д.Н.* Финитная аппроксимируемость некоторых свободных произведений групп с циклическим объединением // Научн. труды Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 1. Иваново 1997. С. 4 – 10.
29. *Азаров Д.Н.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения ограниченных разрешимых групп с циклическим объединением // Научн. труды Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2. Иваново 1999. С. 3 – 4.

30. *Азаров Д.Н., Иванова Е.А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Там же. С. 5 – 7.
31. *Азаров Д.Н., Молдаванский Д.И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Там же. С. 8 – 9.
32. *Азаров Д.Н.* Финитная аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Иваново. 1999. 55 с. Деп. в ВИНИТИ 28.04.99 № 1371 – B99.