Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 4 (2001)

УДК 512.543

Д. Н. Азаров

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Доказано, что сверхразрешимая группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда группа G вложима в прямое произведение $A \times B$, где A – конечно порожденная нильпотентная группа, B – сверхразрешимая группа, такая, что все элементы конечного порядка группы B являются 2-элементами.

1. Напомним, что группа G называется полициклической, если она обладает субнормальным рядом с циклическими факторами. По известной теореме Гирша (см., напр.: [2]) произвольная полициклическая группа является финитно аппроксимируемой.

Среди полициклических групп особое место занимают сверхразрешимые группы, т.е. группы обладающие нормальными рядами с циклическими факторами. Для сверхразрешимых групп в [1] получены следующие результаты:

Теорема 1. *Если сверхразрешимая группа аппроксимируется конечными p-группами для нечетного простого числа p, то она нильпотента.*

Теорема 2. *Сверхразрешимая группа аппроксимируется конечными 2-группами тогда и только тогда, когда все элементы конечного порядка этой группы являются 2-элементами.*

С помощью этих результатов в настоящей работе устанавливается следующий критерий нильпотентной аппроксимируемости сверхразрешимой группы:

Теорема 3. *Сверхразрешимая группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда группа G вложима в прямое произведение $A \times B$, где A – конечно порожденная нильпотентная группа, B – сверхразрешимая группа такая, что все элементы конечного порядка группы B являются 2-элементами.*

2. Доказательство теоремы 3. Достаточность в теореме 3 легко устанавливается с помощью теоремы 2.

Для доказательства необходимости рассмотрим в сверхразрешимой группе G нижний центральный ряд

$$G = \gamma_1(G) = G_1 \geq \gamma_2(G) = G_2 \geq \dots \ .$$

Очевидно, что найдется номер s такой, что для всех $t \geq s$ G_t/G_{t+1} – конечная группа. Пусть Π – множество всех простых делителей порядка группы G_s/G_{s+1}.

Покажем, что G_{s+1}/G_{s+2} – конечная Π-группа. Пусть q – простое число и q делит $|G_{s+1}/G_{s+2}|$. Тогда q делит $|G_s/G_{s+2}|$. Отсюда и из того, что G_s/G_{s+2} – конечная нильпотентная группа, следует, что множество $\overline{H}$ всех элементов группы G_s/G_{s+2}, порядки которых взаимно просты с q, является собственной характеристической подгруппой q-индекса группы G_s/G_{s+2}. Так как $\overline{H}$ – характеристическая подгруппа группы G_s/G_{s+2}, инвариантной в G/G_{s+2}, то $\overline{H}$ инвариантна в G/G_{s+2}. Пусть H – нормальная подгруппа группы G такая, что $\overline{H} = H/G_{s+2}$. Так как $\overline{H} \leq G_s/G_{s+2}$, то $G_{s+2} \leq H \leq G_s$. Легко видеть, что

$$\gamma_s(G/H) = G_s/H \cong (G_s/G_{s+2})/\overline{H}.$$

Отсюда и из того, что $\overline{H}$ — собственная подгруппа q-индекса группы G_s/G_{s+2}, следует, что $\gamma_s(G/H)$ – неединичная конечная q-группа. Поэтому с учетом очевидной нильпотентности группы G/H будем иметь:

$$|\gamma_s(G/H) \ / \ \gamma_{s+1}(G/H)| = q^l,$$

где $l > 0$. С другой стороны,

$$\gamma_s(G/H) \ / \ \gamma_{s+1}(G/H) = (G_s/H) \ / \ (G_{s+1}H/H) \cong$$
$$\cong G_s/G_{s+1}H \cong (G_s/G_{s+1}) \ / \ (G_{s+1}H/G_{s+1}).$$

Следовательно

$$|(G_s/G_{s+1}) \ / \ (G_{s+1}H/G_{s+1})| = q^l,$$

и поэтому q делит $|G_s/G_{s+1})$, т.е. $q \in \Pi$. Тем самым доказано, что G_{s+1}/G_{s+2} – конечная Π-группа.

Теперь очевидная индукция позволяет утверждать, что для всех $t \geq s$ G_t/G_{t+1} – конечная Π-группа. Поэтому для всех $t \geq s$ G_s/G_t – конечная Π-группа. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество, которое получается добавлением к множеству Π всех простых делителей порядка конечной части группы G/G_s. Тогда для любого $t \geq s$ конечная часть группы G/G_t будет $\mathcal{P}$-группой и поэтому группа G/G_t аппроксимируется классом

$$\mathcal{K} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{F}_p,$$

где $\mathcal{F}_p$ – класс всех конечных p-групп. (Данное аппроксимационное свойство конечно порожденной нильпотентной группы G/G_t легко проверяется с помощью доказанного в [2] утверждения о том, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p.)

Пусть группа G аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда группа G аппроксимируется фактор-группами вида G/G_t, где $t \geq s$, и, следовательно, G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$.

Пусть $p_1 = 2$. И пусть $p_2, \ldots, p_n$ – все нечетные простые числа, входящие в $\mathcal{P}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через M_i пересечение всех нормальных подгрупп конечного p_i-индекса группы G. Тогда из аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{K}$ следует, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = 1.$$

Пусть

$$M = \bigcap_{i=2}^{n} M_i.$$

Тогда $M_1 \cap M = 1$, и поэтому с точностью до изоморфизма G – подгруппа группы $G/M_1 \times G/M$. Заметим, что G/M_1 – сверхразрешимая группа и все ее элементы конечного порядка являются 2-элементами. Поэтому для доказательства теоремы нам остается установить, что G/M – конечно порожденная нильпотентная группа.

Для каждого $i \geq 2$ G/M_i – сверхразрешимая группа, аппроксимируемая конечными p_i-группами, причем p_i – нечетное простое число. Поэтому в силу теоремы 1 для каждого $i \geq 2$ G/M_i — конечно порожденная нильпотентная группа. Отсюда и из того, что

$$G/M \leq \prod_{i=2}^{n} G/M_i,$$

следует, что G/M – конечно порожденная нильпотентная группа.

Список использованной литературы

1. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып.2 (1999). С. 8 – 9.
2. *Grunberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29 – 62.