Математика и ее приложения. 2004. № 1. С. 21 – 24

УДК 512.543

Д. Н. Азаров[1]

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Ключевые слова: полициклическая группа, аппроксимируемость конечными p-группами.

Для произвольного конечного множества π простых чисел строится пример полициклической группы G, аппроксимируемой конечными p-группами для тех и только тех простых p, которые принадлежат множеству π.

Let π be a finite set of primes. We construct an example of polycyclic group G such that G is a residually finite p-group if and only if $p \in \pi$.

К. Гирш [3, 4] доказал, что всякая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Обобщая это, А. Лернер [5] показал, что всякая полициклическая группа аппроксимируется конечными π-группами для некоторого конечного набора π простых чисел. В работе К. Сексенбаева [1] доказана нильпотентность полициклической группы, аппроксимируемой конечными p-группами для бесконечного множества простых чисел p. К. Грюнберг [2] доказал, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p.

Из результатов работ [1, 2] следует, что для полициклической группы G следующие три условия равносильны.

1. G – конечно порожденная нильпотентная группа без кручения.

2. G аппроксимируется конечными p-группами для любого простого p.

3. G аппроксимируется конечными p-группами для любого p из некоторого бесконечного множества простых чисел.

[1]Ивановский государственный университет

Обозначим через π_G множество всех простых чисел p таких, что группа G аппроксимируется конечными p-группами.

Равносильность условий 1, 2 и 3 означает, что для полициклической группы G множество π_G либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел.

В данной заметке для произвольного конечного множества π простых чисел строится полициклическая группа G такая, что $\pi_G = \pi$.

Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ – произвольное конечное множество простых чисел. Обозначим через m произведение чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Теорема. *Пусть H – свободная абелева группа ранга 2, φ – автоморфизм группы H, определяемый в некотором базисе этой группы матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m+2 \end{pmatrix}.$$

И пусть G_φ – соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы H на бесконечную циклическую группу $< t >$. Тогда $\pi_{G_\varphi} = \pi$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма, легко проверяемая по индукции.

Лемма. *Пусть H – свободная абелева группа конечного ранга, φ – автоморфизм группы H и G_φ – соответствующее φ полупрямое произведение группы H на бесконечную циклическую группу $< t >$. Тогда для любого $n \geq 2$ n-й член $\gamma_n(G_\varphi)$ нижнего центрального ряда группы G_φ совпадает с подгруппой $H(\varphi - id)^{n-1}$.*

Докажем сначала лемму. При $n \geq 2$ произвольный элемент из $\gamma_n(G)(\varphi - id)$ имеет вид

$$a(\varphi - id) = t^{-1}ata^{-1},$$

где $a \in \gamma_n(G)$. Поэтому $\gamma_n(G)(\varphi - id) \subseteq \gamma_{n+1}(G)$. Верно и обратное включение. В самом деле $\gamma_{n+1}(G)$ порождается элементами вида

$$t^{-k}at^ka^{-1} \quad (a \in \gamma_n(G),\ k \in \mathbb{Z}),$$

и эти элементы принадлежат $\gamma_n(G)(\varphi - id)$, т. к. для любого $a \in$

$\gamma_n(G)$ и для любого целого положительного числа l

$$
\begin{aligned}
t^{-l}at^{l}a^{-1} &= a(\varphi^{l} - id) = a(id + \varphi + \varphi^2 + \ldots + \\
&\quad + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(G)(\varphi - id); \\
t^{l}at^{-l}a^{-1} &= a(\varphi^{-l} - id) = a(-\varphi^{-l})(\varphi^{l} - id) = \\
&= a(-\varphi^{-l})(id + \varphi + \varphi^2 + \ldots + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \\
&\in \gamma_n(G)(\varphi - id).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\gamma_{n+1}(G) = \gamma_n(G)(\varphi - id)$ при всех $n \geq 2$. Аналогично проверяется, что $\gamma_2(G) = H(\varphi - id)$. Из последних двух обстоятельств следует справедливость леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть H, φ и G_φ такие же, как в формулировке теоремы. Используя лемму, найдем индекс подгруппы $\gamma_n(G_\varphi)$ в группе H при $n \geq 2$.

$$
\begin{aligned}
&[H \ : \ \gamma_n(G_\varphi)] = [H \ : \ H(\varphi - id)^{n-1}] = \\
&\qquad = |\det(A - E)^{n-1}| = |\det(A - E)|^{n-1} = m^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для всех $n \geq 2$

$$
[H \ : \ \gamma_n(G_\varphi)] = p_1^{n-1} p_2^{n-1} \ldots p_s^{n-1}. \qquad (*)
$$

Из равенства $(*)$ следует, что если группа G_φ аппроксимируется конечными p-группами, то p должно совпадать с одним из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Иными словами, $\pi_{G_\varphi} \subseteq \pi$. Покажем теперь, что $\pi \subseteq \pi_{G_\varphi}$.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ обозначим через N_i пересечение всех подгрупп X группы G_φ со следующими свойствами:

а) X – нормальная подгруппа группы G_φ;

б) X содержится в H и имеет в H конечный p_i-индекс;

в) существует n такое, что $\gamma_n(G_\varphi) \subseteq X$.

Из равенства $(*)$ следует, что в конечной нильпотентной группе $H/\gamma_n(G_\varphi)$ существует характеристическая подгруппа индекса p_i^{n-1}. Поэтому подгруппы со свойствами а, б и в имеют сколь угодно большие p_i-индексы в подгруппе H. Следовательно, N_i имеет в H бесконечный индекс. Отсюда и из того, что H – свободная абелева группа ранга 2, заключаем, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ либо

$N_i = 1$, либо N_i – бесконечная циклическая. Однако, в группе H нет бесконечных циклических подгрупп, инвариантных в G_φ. В самом деле, эндоморфизмы $\varphi + id$ и $\varphi - id$ инъективны, и поэтому для любого неединичного элемента $a \in H$ имеем:

$$a(\varphi \pm id) \neq 1, \ a\varphi \neq a^{\pm 1}, \ t^{-1}at \neq a^{\pm 1},$$

т. е. циклическая подгруппа (a) не инвариантна в G_φ. Таким образом, $N_i = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Теперь почти очевидно, что $\pi \subseteq \pi_{G_\varphi}$, т. е. для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ группа G_φ аппроксимируется конечными p_i-групами. Это непосредственно вытекает из следующих двух обстоятельств. Во-первых, группа G_φ аппроксимируется группами G_φ/X, где X удовлетворяет условиям а, б и в (это следует из того, что $N_i = 1$). Во-вторых, если X удовлетворяет условиям а, б и в, то G_φ/X аппроксимируется конечными p_i-группами (т. к. G_φ/X нильпотентна и является расширением конечной p_i-группы H/X с помощью бесконечной циклической).

Мы видим, таким образом, что $\pi_{G_\varphi} = \pi$.

Автор благодарен Д. И. Молдаванскому за ряд ценных замечаний, возникших в ходе работы над данной заметкой.

Список использованной литературы

1. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4. Вып. 3. С. 79–83.
2. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol . 73. P. 29–62.
3. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1946. Vol. 49. P. 184–194.
4. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups // J. Lond. Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
5. *Learner A.* Residual properties of polycyclic groups // J. Math. 1964. Vol. 8. P. 536–542.