УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Е. А. Сергина

О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых групп Баумслага – Солитэра

Доказано, что группа Баумслага – Солитэра типа $(1, n)$ почти аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда p не делит n.

1. Введение

Напомним, что группой Баумслага – Солитэра называется группа

$$G(m,n) = \left\langle a, b; b^{-1}a^m b = a^n \right\rangle,$$

где m и n – ненулевые целые числа.

Эта группа представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы A с порождающим элементом a. Здесь рассматривается частный случай, когда данное HNN-расширение является нисходящим, т. е. когда $m = \pm 1$. Без потери общности можно считать, что $m = 1$.

Хорошо известно, что группа $G(1,n)$ финитно аппроксимируема [5]. Пусть p – произвольное простое число. Группа $G(1,n)$ аппроксимируема конечными p-группами (или, короче, $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда p делит $n-1$. Этот результат получен Д. И. Молдаванским (см. [4, теорема 11] или [3]). Д. И. Молдаванским и О. А. Ивановой исследован также вопрос об аппроксимируемости группы $G(1,n)$ конечными $\{p,q\}$-группами, где p и q – простые числа (см. их статью в этом же сборнике или в [2]).

Здесь будет получено необходимое и достаточное условие почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости группы $G(1,n)$. Напомним, что группа G называется почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой, если она содержит $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса. Заметим, что свойство почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемостью. Ниже будет доказан следующий результат.

Теорема. *Группа $G(1,n)$ является почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда p не делит n.*

Отметим без доказательства, что если p не делит n, то в качестве $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой подгруппы конечного индекса группы $G(1,n)$ можно взять нормальное замыкание элементов a и b^{p-1}.

Сформулированная выше теорема дополняет результат Д. Н. Азарова [1] о почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения произвольной полициклической группы для всех достаточно больших простых чисел p. Этот результат не содержит описания всех простых чисел p, для которых упомянутое HNN-расширение почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемо. Сформулированная теорема даёт такое описание для частного случая, когда база нисходящего HNN-расширения является бесконечной циклической группой.

2. Вспомогательные леммы

Пусть p – простое число. Элемент g группы G будем называть p-полным, если для любого целого положительного числа s уравнение

$$x^{p^s} = g \tag{1}$$

разрешимо в группе G.

Лемма 1. *Если группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема, то она не содержит p-полных элементов отличных от единицы.*

Доказательство. Пусть g – p-полный элемент $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы G. И пусть φ – произвольный гомоморфизм группы G на конечную p-группу. Так как в конечной p-группе очевидно нет p-полных элементов отличных от 1, а элемент $g\varphi$ наследует p-полноту от элемента g, то $g\varphi = 1$. Отсюда и из $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости группы G следует, что $g = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если группа G почти* $\boldsymbol{F_p}$*-аппроксимируема, то она не содержит p-полных элементов бесконечного порядка.*

Доказательство. Пусть g – p-полный элемент почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы G. Обозначим через F какую-нибудь нормальную $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G, а через n – индекс подгруппы F в группе G. Тогда $g^n \in F$, и из разрешимости уравнения (1) в G следует разрешимость в группе F для любого целого положительного числа s уравнения $x^{p^s} = g^n$. Таким образом, g^n – p-полный элемент $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы F. Поэтому в силу леммы 1 $g^n = 1$, и, следовательно, порядок элемента g конечен. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если абелева группа G не содержит p-полных элементов отличных от 1, то она* $\boldsymbol{F_p}$*-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть абелева группа G не содержит p-полных элементов отличных от 1. И пусть g – неединичный элемент группы G. Тогда для некоторого целого положительного числа s уравнение (1) не разрешимо в группе G. Поэтому элемент g не принадлежит подгруппе $N = G^{p^s}$, т. е. элемент gN фактор-группы G/N отличен от единицы. Так как группа G/N является абелевой p-группой с ограниченными порядками элементов, то по первой теореме Прюфера группа G/N раскладывается в прямое произведение циклических p-групп и поэтому является $\boldsymbol{F}_p$-аппроксимируемой группой. Отсюда и из того, что gN – неединичный элемент группы G/N следует, что существует гомоморфизм φ группы G/N на конечную p-группу такой, что $(gN)\varphi \neq 1$. Тогда произведение естественного гомоморфизма $G \to G/N$ и гомоморфизма φ отображает элемент g в неединичный элемент некоторой конечной p-группы. Поэтому группа G $\boldsymbol{F}_p$-аппроксимируема. Лемма доказана.

Напомним, что группа G называется группой конечного общего ранга, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе. Наименьшее такое число r называется общим рангом группы G. В [1] приводится следующий результат.

Лемма 4. *Расщепляемое расширение почти $\boldsymbol{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного общего ранга с помощью почти $\boldsymbol{F}_p$-аппроксимируемой группы является почти $\boldsymbol{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

3. Доказательство основного результата

Рассмотрим группу Баумслага – Солитэра

$$G = G(1,n) = \left\langle a, b;\, b^{-1}ab = a^n \right\rangle$$

Покажем, что группа G является почти $\boldsymbol{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда p не делит n.

Обозначим через H нормальное замыкание элемента a в группе G, т.е. подгруппу группы G, порожденную всеми элементами вида $a_i = b^{-i}ab^i$, где i – произвольное целое число. Тогда соотношение $a^n = b^{-1}ab$ принимает вид $a_0^n = a_1$, и вообще

$$a_{i-k}^{n^k} = a_i \qquad (2)$$

для любого целого i и для любого целого неотрицательного числа k. Поэтому H является объединением бесконечной возрастающей последовательности циклических подгрупп

$$(a_0) \leq (a_{-1}) \leq (a_{-2}) \leq \cdots \qquad (3)$$

Отсюда следует, что H – абелева группа без кручения ранга 1.

Если простое число p делит n, то в силу (2) элемент a_i является p-полным элементом группы G и тогда по лемме 2 группа G не является почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой.

Предположим теперь, что p не делит n, т. е. что p и n взаимно просты, и покажем, что в этом случае группа G почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема.

Покажем сначала, что в группе H нет p-полных элементов отличных от 1. Пусть g – p-полный элемент группы H. Тогда для любого целого положительного числа s в группе H существует элемент g_s такой, что

$$g_s^{p^s} = g \qquad (4)$$

Так как $H = \bigcup_{i \in Z} (a_i)$, то

$$g = a_i^r, \quad g_s = a_{i_s}^{r_s}, \qquad (5)$$

где i, i_s, r, r_s – подходящие целые числа. Ввиду (3) числа i_s можно подобрать так, чтобы они не превосходили число i. Тогда $i_s = i - k_s$, где $k_s \geq 0$, и поэтому в силу (2)

$$a_{i_s}^{n^{k_s}} = a_i. \qquad (6)$$

Из равенств (4), (5) и (6) получаем: $a_{i_s}^{r_s p^s} = g_s^{p^s} = g = a_i^r = a_{i_s}^{rn^{k_s}}$.

Отсюда и из того, что порядок элемента a_{i_s} бесконечен следует, что $r_s p^s = rn^{k_s}$. Поэтому в силу взаимной простоты чисел p и n при любом s число p^s делит r. Следовательно, $r = 0$, т. е. $g = 1$.

Таким образом, H – абелева группа, не содержащая p-полных элементов отличных от 1. Поэтому в силу леммы 3 группа H $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема. Очевидно, что группа G является расщепляемым расширением группы H с помощью циклической группы B, порожденной элементом b, причем H имеет конечный общий ранг и $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема, а группа B также $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема как бесконечная циклическая группа. Поэтому в силу леммы 4 группа G почти $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Тез. докл. межд. алгебраической конф., посв. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Москва. 2008. С. 25–26.
2. *Иванова О. А.* Об аппроксимируемости конечными группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых. Иваново. 2008. С. 16–17.
3. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129–140.
4. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость групп и свободные конструкции // Юбилейный сборник научных статей ИвГУ. Иваново. 1998. Ч. 2. С. 183–197.
5. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.