УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Е. А. Туманова

Об аппроксимируемости обобщённых свободных произведений групп корневыми классами

Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. Доказано, что свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединёнными ретрактами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Это утверждение обобщает известный результат Дж. Болера и Б. Эванса о финитной аппроксимируемости произвольного свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с объединёнными ретрактами. Доказано также, что если корневой класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то свободное произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ с центральными объединёнными подгруппами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ – абстрактный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу. Класс $\mathcal{K}$ называется корневым, если выполняются следующие три условия.

1. Если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B – подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ – субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и фактор-группа A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Здесь исследуется аппроксимируемость обобщённых свободных произведений групп корневыми классами. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, или короче $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого элемента g группы G отличного от единицы существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий элемент g в элемент отличный от 1.

В [3, с. 429] приводится следующий результат К. Грюнберга: для того, чтобы любое свободное произведение групп аппроксимируемых данным корневым классом $\mathcal{K}$ само было $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой необходимо и достаточно, чтобы любая свободная группа была $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.

В [1] Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо доказали, что любая свободная группа аппроксимируема любым корневым классом. Поэтому свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Рассмотрим теперь свободное произведение P групп A и B с объединёнными подгруппами H и K . Если группы A и B аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то группа P уже не обязана быть $\mathcal{K}$-аппроксимируемой. Большинство результатов по $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы P получены в случае, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом всех конечных групп или с классом всех конечных p-групп. Оба эти класса являются корневыми.

Наиболее исследованным аппроксимационным свойством обобщённых свободных произведений является финитная аппроксимируемость, т. е. аппроксимируемость классом всех конечных групп. Исследования в данном направлении как правило представляют собой доказательство финитной аппроксимируемости свободного произведения P групп A и B с объединёнными подгруппами H и K при определенных ограничениях на группы A и B и объединяемые подгруппы H и K. Так, например, в [5] Дж. Болер и Б. Эванс доказали, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппы H и K являются ретрактами в группах A и B соответственно, то группа P финитно аппроксимируема. Мы обобщаем этот результат следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп. Тогда свободное произведение любых двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединёнными ретрактами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.*

Подобным образом могут быть обобщены и некоторые результаты об аппроксимируемости обобщённых свободных произведений конечными p-группами. Так, например, хорошо известное утверждение об аппроксимируемости конечными p-группами любого свободного произведения двух конечных p-групп с центральными объединёнными подгруппами, являющееся непосредственным следствием результата Г. Хигмена [6], допускает следующее несложное обобщение.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{K}$ *– корневой класс групп замкнутый относительно факторизации. Тогда свободное произведение любых двух групп из класса* $\mathcal{K}$ *с центральными объединёнными подгруппами является* $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой группой.*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены ниже. Заметим, что в каждой из этих теорем существенно то обстоятельство, что класс $\mathcal{K}$ является корневым. Действительно, класс $\mathcal{K}$ всех нильпотентных групп не является корневым и для него теоремы 1 и 2 уже не верны. В самом деле, пусть A и B – конечные циклические группы простых порядков, не совпадающих между собой, H и K – единичные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда свободное произведение P групп A и B с объединёнными подгруппами H и K не аппроксимируемо классом $\mathcal{K}$ всех нильпотентных групп, но при этом A, B, H и K удовлетворяют условиям каждой из теорем 1 и 2.

Достаточное условие аппроксимируемости корневым классом обобщённого свободного произведения групп в наиболее общем виде может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 3. *Свободное произведение P групп A и B с объединёнными подгруппами H и K аппроксимируемо корневым классом* $\mathcal{K}$*, если выполняются следующие два условия.*

1. *Для каждого неединичного элемента h группы P, лежащего в H, существует гомоморфизм группы P на некоторую* $\mathcal{K}$*-группу, переводящий h в элемент отличный от* 1.

2. *Для каждого элемента x группы P, принадлежащего* $A \cup B$*, но не лежащего в объединённой подгруппе H, существует гомоморфизм* σ *группы P на некоторую* $\mathcal{K}$*-группу такой, что* $x\sigma \notin H\sigma$.

В случае, когда $\mathcal{K}$ – класс всех конечных групп, теорема 3, как легко видеть, равносильна хорошо известной фильтрационной теореме Г. Баумслага [4], лежащей в основе ряда исследований по финитной аппроксимируемости обобщённых свободных произведений.

Пусть, как и выше, P – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединёнными относительно изоморфизма φ. Рассмотрим частный случай, когда $A = B$ и φ – тождественное отображение. В этом случае группа P обозначается через $A \underset{H}{*} A$. В [7] доказывается, что эта группа аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда группа A аппроксимируема конечными p-группами и подгруппа H группы A отделима в классе конечных p-групп. Данный результат также допускает обобщение на случай аппроксимируемости произвольным корневым классом [1].

Далее будут приведены доказательства сформулированных выше теорем 1-3.

2. О свободном произведении групп с центральной объединённой подгруппой

Пусть A и B – группы, H и K – изоморфные подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Пусть, как и выше, P – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединёнными относительно изоморфизма φ.

Если дополнительно предположить, что H и K – центральные подгруппы в группах A и B соответственно, то наряду с обобщённым свободным произведением P можно рассматривать ещё и обобщённое прямое произведение $\overline{P}$ групп A и B с объединёнными подгруппами H и K. Группа $\overline{P}$ представляет собой фактор-группу прямого произведения $A \times B$ по подгруппе, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Хорошо известно и легко проверяется, что группы A и B естественным образом вложимы в обобщённое прямое произведение $\overline{P}$. Очевидно также, что тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ могут быть продолжены до гомоморфизма ρ: $P \to \overline{P}$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп замкнутый относительно факторизации. И пусть P – свободное произведение групп A и B из класса $\mathcal{K}$ с центральными объединёнными подгруппами H и K. Покажем, что группа P аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Рассмотрим обобщённое прямое произведение $\overline{P}$ групп A и B с объединёнными подгруппами H и K. Так как группы A и B принадлежат классу $\mathcal{K}$, то их прямое произведение $A \times B$ также принадлежит $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, следует, что группа $\overline{P}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Как отмечалось выше, существует гомоморфизм ρ группы P на группу $\overline{P}$, продолжающий тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм ρ группы P на группу $\overline{P}$ из класса $\mathcal{K}$ инъективный на свободных множителях A и B. Поэтому $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы P вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Свободное произведение P групп A и B с объединённой подгруппой H аппроксимируемо корневым классом $\mathcal{K}$, если группы A и B $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и существует гомоморфизм группы P на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ инъективный на подгруппе H.*

Доказательство этой леммы, основанное на теореме Х. Нейман [2, с. 122], приводится в [1].

3. Одно достаточное условие аппроксимируемости корневым классом обобщённого свободного произведения

Здесь будет доказана сформулированная выше теорема 3.

Пусть A и B – группы, H и K – изоморфные подгруппы групп A и B, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть P – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединёнными относительно изоморфизма φ.

Пусть M и N – нормальные подгруппы групп A и B соответственно. Подгруппы M и N будем называть φ-совместимыми, если $(H \cap M)\varphi = K \cap N$. Далее будем предполагать, что подгруппы M и N φ-совместимы. Обозначим через φ_{MN} отображение подгруппы HM/M группы A/M на подгруппу KN/N группы B/N, определенное по правилу:

$$(hM)\varphi_{MN} = h\varphi N,$$

где $h \in H$. Легко видеть, что отображение φ_{MN} корректно определено и является изоморфизмом. Поэтому можно рассмотреть свободное произведение P_{MN} групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединёнными относительно изоморфизма φ_{MN}. Пусть $\rho_M : A \to A/M$ и $\sigma_N : B \to B/N$ – естественные гомоморфизмы. Рассмотрим эти гомоморфизмы как отображения групп A и B в группу P_{MN}. Тогда гомоморфизмы ρ_M и σ_N согласованы относительно φ и поэтому могут быть продолжены до гомоморфизма ρ_{MN} группы P на группу P_{MN}. Очевидно, что $A\rho_{MN} = A/M$, $B\rho_{MN} = B/N$ и

$$H\rho_{MN} = HM/M = KN/N = K\rho_{MN}.$$

Описанные выше построения восходят к Г. Баумслагу [4].

Лемма 2. *Пусть P – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединёнными относительно изоморфизма φ, W – нормальная подгруппа группы P и фактор-группа P/W принадлежит корневому классу $\mathcal{K}$. Тогда подгруппы $M = A \cap W$ и $N = B \cap W$ φ-совместимы и группа P_{MN} $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Очевидно, что естественный гомоморфизм $\varepsilon : P \to P/W$ проходит через гомоморфизм ρ_{MN}, т. е.

$$\varepsilon = \rho_{MN}\,\sigma,$$

где σ – некоторый гомоморфизм группы P_{MN} на группу P/W.

Гомоморфизм σ инъективен на объединяемой подгруппе $H\rho_{MN}$ группы P_{MN}. Действительно, пусть $\overline{h} \in H\rho_{MN}$ и $\overline{h}\sigma = 1$. Тогда $\overline{h} = h\rho_{MN}$ для некоторого h из H и

$$h\varepsilon = h\rho_{MN}\,\sigma = \overline{h}\sigma = 1.$$

Поэтому $h \in W$. Отсюда и из того, что $h \in A$ следует, что $h \in M$ и поэтому $h\rho_{MN} = 1$, т. е. $\overline{h} = 1$. Инъективность гомоморфизма σ на подгруппе $H\rho_{MN}$ доказана.

Так как

$$A/M = A\,/\,A \cap W \cong AW/W \leq \mathrm{P/W},$$
$$B/N = B\,/\,B \cap W \cong BW/W \leq \mathrm{P/W}$$

и $P/W \in \mathcal{K}$, то свободные множители A/M и B/N свободного произведения P_{MN} принадлежат классу $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что группа P_{MN} обладает гомоморфизмом σ на $\mathcal{K}$-группу P/W, инъективным на объединяемой подгруппе $H\rho_{MN}$, по лемме 1 заключаем, что группа P_{MN} $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп, P – свободное произведение групп A и B с подгруппами H

и K объединёнными относительно изоморфизма φ, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1. Для каждого неединичного элемента h группы P, принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм σ группы P на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $h\sigma \neq 1$.

2. Для каждого элемента x группы P из $A \cup B$, не лежащего в объединённой подгруппе H, существует гомоморфизм σ группы P на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.

Покажем, что группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема, т. е. что для каждого неединичного элемента g группы P существует гомоморфизм σ группы P на $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\sigma \neq 1$. Условие 1 позволяет ограничиться случаем, когда $g \notin H$.

Пусть $g = x_1 x_2 \cdots x_r$ – несократимая запись элемента g. Поскольку $g \notin H$, то слоги x_k не лежат в H, причём если $r>1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Ввиду условия 2 для каждого $k = 1,2,...,r$ существует гомоморфизм σ_k группы P на $\mathcal{K}$-группу такой, что

$$x_k\sigma_k \notin H\sigma_k .$$

Пусть

$$W = \bigcap_{k=1}^{r} Ker\sigma_k .$$

Так как для всех $k = 1,2,...,r$

$$P/Ker\sigma_k \in \mathcal{K} \quad \text{и} \quad P/W \leq \prod_{k=1}^{r} P/Ker\sigma_k ,$$

то $P/W \in \mathcal{K}$. Поскольку все σ_k проходят через естественный гомоморфизм $\varepsilon : P \to P/W$ и $x_k\sigma_k \notin H\sigma_k$, то $x_k\varepsilon \notin H\varepsilon$ для всех $k = 1,2,...,r$.

Введем обозначения:

$$M = A \cap W , N = B \cap W .$$

Поскольку $P/W \in \mathcal{K}$, то по лемме 2 подгруппы M и N φ-совместимы и группа P_{MN} $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как гомоморфизм $\varepsilon : P \to P/W$ проходит через гомоморфизм ρ_{MN} и $x_k \varepsilon \notin H\varepsilon$, то $x_k \rho_{MN} \notin H\rho_{MN}$ для всех $k = 1,2,\ldots,r$. Поэтому все сомножители в записи

$$g\rho_{MN} = x_1\rho_{MN}\, x_2\rho_{MN} \cdots x_r\rho_{MN}$$

лежат в свободных множителях A/M и B/N группы P_{MN}, но не входят в объединённую подгруппу $H\rho_{MN}$. Причём если $r>1$, то соседние сомножители в этой записи лежат в разных свободных сомножителях группы P_{MN}. Поэтому данная запись несократима, и следовательно $g\rho_{MN} \neq 1$. Отсюда и из того, что группа P_{MN} $\mathcal{K}$-аппроксимируема следует, что существует гомоморфизм ρ группы P_{MN} на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\rho_{MN}\rho \neq 1$. Тогда гомоморфизм $\sigma = \rho_{MN}\rho$ является искомым. Теорема доказана.

4. О свободном произведении групп с объединёнными ретрактами

Напомним, что подгруппа B группы G называется ретрактом, если в группе G существует нормальная подгруппа A такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$, т. е. такая, что G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B.

Лемма 3. *Пусть B – ретракт группы G. Если группа G аппроксимируема классом $\mathcal{K}$, замкнутым относительно подгрупп и расширений, то подгруппа B группы G $\mathcal{K}$-отделима, т. е. для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе B, в группе G существует нормальная подгруппа M такая, что $G/M \in \mathcal{K}$ и $g \notin BM$.*

Доказательство. По условию в группе G существует нормальная подгруппа A такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$.

Пусть группа G аппроксимируема классом $\mathcal{K}$ замкнутым относительно подгрупп и расширений. И пусть g – произвольный элемент группы G, не принадлежащий подгруппе B. Покажем, что в группе G существует нормальная подгруппа M такая, что $G/M \in \mathcal{K}$ и $g \notin BM$.

Элемент g может быть однозначно записан в виде $g = a_0 b_0$, где $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Так как $g \notin B$, то $a_0 \neq 1$. Отсюда и из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G следует, что в группе G существует нормальная подгруппа N такая, что $G/N \in \mathcal{K}$ и $a_0 \notin N$. Покажем, что подгруппа

$$M = (A \cap N)(B \cap N)$$

является искомой.

Покажем сначала, что подгруппа M нормальна в группе G, т. е. что

$$(ab)^{-1} hkab \in M$$

для произвольных элементов a, b, h, k из подгрупп A, B, $A \cap N$ и $B \cap N$ соответственно. Пусть

$$u = (ab)^{-1} hab .$$

Тогда

$$(ab)^{-1} hkab = u(ab)^{-1} kab = ub^{-1}a^{-1}kak^{-1}bb^{-1}kb = uvw,$$

где

$$v = b^{-1}[a, k^{-1}]b, \ w = b^{-1}kb .$$

Так как $h \in A \cap N$ и подгруппа $A \cap N$ нормальна в G, то $u \in A \cap N$. Поскольку $a \in A$, $k \in N$ и подгруппы A и N нормальны в G, то

$$[a, b] \in A \cap N ,$$

и, следовательно, $v \in A \cap N$. Так как N нормальна в G, то $B \cap N$ нормальна в B и поэтому $w \in B \cap N$. Мы видим, таким образом, что элемент

$$(ab)^{-1} hkab = uvw$$

принадлежит подгруппе M, т. е. M нормальна в G.

Покажем теперь, что подгруппа MB не содержит g. Допустим противное, т. е. что $g \in MB$. Так как

$$MB = (A \cap N)(B \cap N)B = (A \cap N)B,$$

то $g \in (A \cap N)B$. Отсюда и из единственности записи $g = a_0 b_0$ следует, что $a_0 \in A \cap N$, что невозможно, поскольку $a_0 \notin N$.

Покажем теперь, что фактор-группа G/M является расщепляемым расширением группы AM/M с помощью группы BM/M. Очевидно, что AM/M нормальна в G/M и G/M является произведением подгрупп AM/M и BM/M. Поэтому нам остаётся только доказать, что

$$AM/M \cap BM/M = 1.$$

Но это почти очевидно, поскольку

$$AM \cap BM = \big(A(A \cap N)(B \cap N)\big) \cap \big((A \cap N)(B \cap N)B\big) =$$
$$= \big(A(B \cap N)\big) \cap \big((A \cap N)B\big) = (A \cap N)(B \cap N) = M.$$

Так как $M = (A \cap N)(B \cap N)$, то $M \subseteq N$ и $A \cap N \subseteq M$. Из этих двух включений следует, что

$$A \cap M = A \cap N.$$

Тогда

$$AM/M \cong A/A \cap M = A/A \cap N \cong AN/N \leq G/N \in \mathcal{K}.$$

Отсюда и из того, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подгрупп следует, что $AM/M \in \mathcal{K}$. Аналогично проверяется, что $BM/M \in \mathcal{K}$.

Таким образом, группа G/M является расщепляемым расширением группы AM/M из класса $\mathcal{K}$ с помощью группы

BM/M из $\mathcal{K}$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно расширений следует, что $G/M \in \mathcal{K}$.

Итак, M – нормальная подгруппа группы G, $g \notin MB$ и $G/M \in \mathcal{K}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть P – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединёнными относительно изоморфизма φ, причём K – ретракт группы B. И пусть M – нормальная подгруппа группы A. Тогда естественный гомоморфизм $\varepsilon : A \to A/M$ может быть продолжен до гомоморфизма $\sigma : P \to A/M$.*

Доказательство. По условию леммы в группе B существует нормальная подгруппа V такая, что B – расщепляемое расширение группы V с помощью K. Пусть

$$L = (H \cap M)\varphi .$$

Так как $H \cap M$ нормальна в H, то L нормальна в K. Подгруппа $N = VL$ нормальна в B, так как N является прообразом нормальной подгруппы L группы K относительно гомоморфизма $\pi : B \to K$, определенного по правилу:

$$(vk)\pi = k ,$$

где $v \in V$, $k \in K$. Так как

$$K \cap N = L = (H \cap M)\varphi ,$$

то подгруппы M и N групп A и B φ-совместимы. Поэтому можно рассматривать свободное произведение P_{MN} групп A/M и B/N с объединёнными подгруппами HM/M и KN/N, а также гомоморфизм

$$\rho_{MN} : P \to P_{MN} ,$$

продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Так как $B = KV$ и $V \subseteq N$, то $B = KN$. Поэтому свободный сомножитель B/N группы P_{MN} совпадает с объединяемой подгруппой KN/N. Отсюда следует, что $P_{MN} = A/M$. Поэтому гомоморфизм ρ_{MN} отображает P на A/M, причём по определению ρ_{MN} продолжает естественный гомоморфизм $A \to A/M$. Мы видим, таким образом, что гомоморфизм $\sigma = \rho_{MN}$ является искомым. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть P – свободное произведение групп A и B с объединёнными ретрактами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, замкнутым относительно подгрупп и расширений, то имеют место следующие два утверждения.*

1. *Для каждого неединичного элемента h группы P, лежащего в H, существует гомоморфизм σ группы P на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $h\sigma \neq 1$.*

2. *Для каждого элемента x группы P, принадлежащего подмножеству $A \cup B$ и не лежащего в объединённой подгруппе H, существует гомоморфизм σ группы P на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $x\sigma \notin H\sigma$.*

Доказательство. 1. Пусть $h \in H$ и $h \neq 1$. Так как группа *A* $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то в группе *A* существует нормальная подгруппа *M* такая, что $h \notin M$ и $A/M \in \mathcal{K}$. По лемме 4 существует гомоморфизм $\sigma : P \to A/M$, продолжающий естественный гомоморфизм $\varepsilon : A \to A/M$. Так как ядро гомоморфизма ε совпадает с M и $h \notin M$, то $h\sigma \neq 1$.

2. Пусть $x \in A \cup B$ и $x \notin H$. Без потери общности можно считать, что $x \in A$. Так как группа *A* $\mathcal{K}$-аппроксимируема и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подгрупп и расширений, то по лемме 3 ретракт *H* группы *A* является $\mathcal{K}$-отделимой подгруппой. Поэтому в группе *A* существует нормальная подгруппа *M* такая, что $A/M \in \mathcal{K}$ и $x \notin HM$. Так как *K* – ретракт группы *B*, то

по лемме 4 существует гомоморфизм $\sigma : P \to A/M$, продолжающий естественный гомоморфизм $\varepsilon : A \to A/M$. Тогда

$$H\sigma = H\varepsilon = HM/M\ ,\ x\sigma = x\varepsilon = xM\ .$$

Отсюда и из того, что $x \notin HM$ следует, что $x\sigma \notin H\sigma$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{K}$ – корневой класс групп, P – свободное произведение $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп A и B с объединёнными ретрактами H и K. Покажем, что группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Так как корневой класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подгрупп и расширений, то к P применима лемма 5. Поэтому выполняются утверждения 1 и 2 из формулировки леммы 5. Но тогда в силу теоремы 3 группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.*, *Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединённой подгруппой корневым классом групп // Научн. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6–10.
2. *Линдон Р.*, *Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир. 1980. 447 с.
3. *Магнус В.*, *Каррас А.*, *Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука. 1974. 455 с.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193–209.
5. *Boler J.*, *Evans B.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 37. № 1. P. 50–52.
6. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1963. Vol. 1. P. 301–305.
7. *Kim G.*, *McCarron J.* On amalgamated free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1993. Vol. 162. P. 1–11.