УДК 512.543

Д. Н. Азаров, И. В. Чижова

Об аппроксимируемости конечными *p*-группами расщепляемых расширений групп

Пусть G – расщепляемое расширение конечно порождённой группы A с помощью группы B. И пусть группы A и B аппроксимируемы конечными p-группами. Доказано, что если подгруппа B субнормальна в группе G, то группа G аппроксимируема конечными p-группами. Рассматривается также вопрос об обратимости этого результата при дополнительных ограничениях на группы A и B. Одним из таких ограничений является конечность группы A. Доказано также, что если для каждого простого числа p группа G аппроксимируема конечными p-группами и является расщепляемым расширением свободной абелевой группы A конечного ранга с помощью разрешимой группы B, то подгруппа B субнормальна в группе G.

1. Введение

Пусть G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B, т.е. A – нормальная подгруппа группы G, B – подгруппа группы G, $G = AB$ и $A \cap B = 1$.

В [3] А. И. Мальцев доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы и группа A конечно порождена, то группа G финитно аппроксимируема.

Этот результат не может быть распространён с финитной аппроксимируемости на $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость, т. е. на аппроксимируемость конечными p-группами. Действительно, легко видеть, что группа $P = \langle a, b;\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема только при $p = 2$. Группа P является расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, где A и B – бесконечные циклические подгруппы группы P, порождённые элементами a и b соответственно. Группы A и B аппроксимируемы конечными p-группами для любого простого числа p, но группа P этим свойством уже не обладает.

Существуют и более содержательные примеры такого рода. Так в [1] для каждого конечного множества π простых чисел строится расщепляемое расширение свободной абелевой группы ранга 2 с помощью бесконечной циклической группы, которое $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемо для всех простых чисел из π и только для них.

Вернёмся к случаю произвольного расщепляемого расширения G группы A с помощью группы B. Если дополнительно потребовать, чтобы подгруппа B группы G была нормальной, то G – прямое произведение подгрупп A и B и в этом случае из $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости групп A и B очевидно следует $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость группы G. Ослабляя требование нормальности подгруппы B до требования субнормальности, мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G – расщепляемое расширение конечно порождённой $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы A с помощью $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы B. Если подгруппа B субнормальна в группе G, то группа G является $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой.*

Этот результат позволяет совсем просто доказать хорошо известную теорему Грюнберга [5], утверждающую, что конечно порождённая нильпотентная группа без кручения $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Действительно, пусть G – конечно порождённая нильпотентная группа без кручения, r – полициклический ранг группы G. Так как в нильпотентной группе все подгруппы субнормальны и группа G является расщепляемым расширением некоторой своей подгруппы A полициклического ранга $r-1$ с помощью бесконечной циклической группы B, то по теореме 1 из $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости группы A следует $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость группы G. Таким образом, упомянутая выше теорема Грюнберга может быть доказана индукцией по r.

Утверждение, обратное к теореме 1 неверно. В самом деле, рассмотренное выше расширение P циклической группы A с помощью циклической группы B аппроксимируемо конечными 2-группами, но в силу теоремы 1 подгруппа B не субнормальна.

В следующих двух теоремах, доказанных в работе, вводятся некоторые дополнительные ограничения на подгруппы A и B, при которых субнормальность подгруппы B не только достаточна, но и необходима для F_p-аппроксимируемости группы G.

Теорема 2. *Пусть G – расщепляемое расширение конечной p-группы A с помощью $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы B. Группа G является $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда подгруппа B субнормальна в группе G.*

Теорема 3. *Пусть G – расщепляемое расширение свободной абелевой группы A конечного ранга с помощью разрешимой группы B, аппроксимируемой конечными p-группами для каждого простого числа p. Тогда следующие два утверждения равносильны между собой.*

1. *Группа G является $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой для каждого простого числа p.*
2. *Подгруппа B субнормальна в группе G.*

Грюнберг [5] доказал, что свободные разрешимые группы $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемы для каждого простого числа p. Поэтому из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть G – расщепляемое расширение свободной абелевой группы A конечного ранга с помощью свободной разрешимой группы B. Группа G является $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой для каждого простого числа p тогда и только тогда, когда подгруппа B субнормальна в группе G.*

2. Доказательство теорем

Хорошо известно, что если H – нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G, то из $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости группы H следует $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость группы G [5]. Поэтому если $H = H_0 \le H_1 \le H_2 \le \ldots \le H_s = G$ и для каждого $k = 0,1,2,\ldots,s-1$ H_k – нормальная подгруппа конечного p-индекса группы H_{k+1}, то из $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости группы H следует $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость группы G. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть H – субнормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Если группа H $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема, то и группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема.*

Доказательство теоремы 1. Пусть G – расщепляемое расширение конечно порождённой $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы A с помощью $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группы B, и пусть подгруппа B субнормальна в группе G. Покажем, что группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента a из G указать нормальную подгруппу N группы G, не содержащую элемент a и такую, что фактор-группа G/N $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема. Если $a \notin A$, то в качестве N можно взять A, так как $G/A \cong B$ – $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемая группа. Пусть теперь $a \in A$. Так как группа A $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема, то в A существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса, не содержащая элемент a. Обозначим через N пересечение всех нормальных подгрупп группы A, индекс которых совпадает с $[G:M]$. Число таких подгрупп конечно, поскольку группа A конечно порождена. Поэтому A/N – конечная p-группа. Так как

N характеристична в A и A нормальна в G, то N нормальна в G, причём $a \notin N$ поскольку $a \notin M$ и $N \subseteq M$. Поэтому для завершения доказательства теоремы нам остаётся проверить $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость группы G/N. Эта группа очевидно является расщепляемым расширением конечной p-группы A/N с помощью группы BN/N, изоморфной группе B. Поэтому BN/N – $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемая подгруппа конечного p-индекса группы G/N, причём подгруппа BN/N субнормальна в G/N, так как B субнормальна в G. Отсюда по предложению 1 следует $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемость группы G/N. Теорема доказана.

Предложение 2. *Пусть группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема и является расщепляемым расширением группы A с помощью группы B. Тогда подгруппа B $\boldsymbol{F_p}$-отделима в группе G.*

Это предложение (даже в более общем виде) доказано Д. Н. Азаровым и Е. А. Тумановой (см. лемму 3 из их статьи в этом же сборнике). Вопрос о справедливости этого предложения был поставлен Е. В. Соколовым в 2006 году.

Предложение 3. *Пусть G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. И пусть C – централизатор подгруппы A в подгруппе B, т.е. множество всех элементов из B, перестановочных с каждым элементом из A. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Подгруппа C нормальна в группе G и фактор-группа G/C является расщепляемым расширением группы AC/C изоморфной группе A с помощью группы B/C изоморфной некоторой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,A$.*

2. *Если группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема то фактор-группа G/C также $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема.*

Доказательство. 1. Пусть $\sigma : B \to \operatorname{Aut} A$ – сопровождающий гомоморфизм, т. е. отображение, сопоставляющее каждому элементу b группы B автоморфизм φ_b группы A, определённый по правилу $a\varphi_b = b^{-1}ab$ для каждого элемента a из A. Очевидно, что $\operatorname{Ker}\sigma = C$. Поэтому подгруппа C нормальна в B и фактор-группа B/C вложима в группу $\operatorname{Aut} A$. Так как C нормальна в B, $G = AB$ и A поэлементно перестановочна с C, то C нормальна в G. Очевидно, что фактор-группа G/C является расщепляемым расширением группы $AC/C \cong A/A \cap C = A$ с помощью группы B/C.

2. Пусть группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема. Покажем, что подгруппа C группы G $\boldsymbol{F_p}$-отделима. Пусть g – произвольный элемент группы G, не лежащий в C.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \in B$. В этом случае в группе A существует элемент a такой, что $ag \neq ga$. Тогда в силу $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемости группы G существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу P такой, что $a\varphi g\varphi \neq g\varphi\, a\varphi$. Это означает, что элемент $g\varphi$ не принадлежит централизатору D подгруппы $A\varphi$ в подгруппе $B\varphi$. Отсюда и из очевидного включения $C\varphi \subseteq D$ следует, что $g\varphi \notin C\varphi$.

Рассмотрим теперь случай, когда $g \notin B$. Так как группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема и является расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, то в силу предложения 2 подгруппа B группы G $\boldsymbol{F_p}$-отделима. Поэтому существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $g\varphi \notin B\varphi$. Отсюда и из того, что $C \subseteq B$, следует, что $g\varphi \notin C\varphi$.

Таким образом, в любом случае существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $g\varphi \notin C\varphi$. Поэтому подгруппа C группы G F_p-отделима. Отсюда следует, что фактор-группа G/C F_p-аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема и является расщепляемым расширением конечной группы A с помощью группы B. Тогда подгруппа B субнормальна в группе G.*

Доказательство. Обозначим через C централизатор подгруппы A в подгруппе B. По предложению 3 фактор-группа G/C $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема и является расщепляемым расширением группы AC/C, изоморфной группе A, с помощью группы B/C, изоморфной некоторой подгруппе группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$. Отсюда и из конечности группы A следует конечность группы G/C. Таким образом, G/C – конечная $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемая группа. Поэтому G/C – конечная p-группа. Хорошо известно [2, с. 140], что в любой нильпотентной группе, и, в частности в любой конечной p-группе, все подгруппы субнормальны. Поэтому подгруппа B/C субнормальна в группе G/C. Отсюда следует, что B субнормальна в G. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть для каждого простого числа p группа G $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируема и является расщепляемым расширением свободной абелевой группы A конечного ранга с помощью разрешимой группы B. Тогда подгруппа B субнормальна в группе G.*

Доказательство. Пусть как и выше C – централизатор подгруппы A в подгруппе B. По предложению 3 фактор-группа G/C F_p-аппроксимируема для каждого простого числа p и является расщепляемым расширением группы AC/C изоморфной группе A с помощью группы B/C, вложимой в группу $\operatorname{Aut} A$. Так как A – свободная абелева группа конечного ранга, то группа $\operatorname{Aut} A$

совпадает с группой целочисленных матриц. Следовательно, B/C – разрешимая группа целочисленных матриц и потому в силу теоремы Мальцева [2, с. 194] группа B/C полициклична. Отсюда и из того, что группа G/C является расширением свободной абелевой группы $AC/C \cong A$ конечного ранга с помощью группы B/C, следует, что G/C – полициклическая группа. Сексенбаев [4] доказал, что если полициклическая группа F_p-аппроксимируема для каждого простого числа p, то она нильпотентна. Поэтому группа G/C нильпотентна. Так как в нильпотентной группе все подгруппы субнормальны, то подгруппа B/C субнормальна в группе G/C. Отсюда следует, что подгруппа B субнормальна в группе G. Предложение доказано.

Доказательства теорем 2 и 3. Достаточность в теоремах 2 и 3 обеспечивается теоремой 1, а необходимость – предложениями 4 и 5.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами полициклических групп // Математика и её приложения. Иваново. 2004. № 1. С. 21-24.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука. 1972.
3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. ин-та. 1968. Т. 31. № 5. С. 49-60.
4. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 6. Вып. 3. С. 79-83.
5. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math, Soc. 1967, Vol. 7. P. 29-62.