ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 3 (2010)

УДК 512.543

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ

Д. Н. Азаров (г. Иваново)

Аннотация

Пусть G — группа конечного общего ранга. Доказано, что если группа G финитно аппроксимируема (почти аппроксимируема конечными p-группами), то финитно аппроксимируемыми (почти аппроксимируемыми конечными p-группами) являются группа автоморфизмов группы G а также расщепляемое расширение группы G с помощью произвольной группы, обладающей свойством финитной аппроксимируемости (почти аппроксимируемости конечными p-группами). С помощью этого результата доказано, что если свободное произведение P двух полициклических групп с объединенными подгруппами конечных индексов является финитно аппроксимируемой группой, то группа P почти аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p.

1 Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента x отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Группа G называется почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Как показал А. Л. Шмелькин (1968 г.), примером почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы (для каждого простого числа p) является произвольная полициклическая группа (см., напр., [1], с. 200). Заметим, что среди полициклических групп только конечно порожденные нильпотентные группы без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для любого простого числа p [2, 3].

Примером финитно аппроксимируемой группы, не являющейся почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни при каком p, является прямое произведение по всем простым p групп порядка p. Примеры такого рода существуют также и среди конечно порожденных групп, поскольку любая счетная финитно аппроксимируемая группа вложима в конечно порожденную финитно аппроксимируемую группу [4].

В 1963 году Д. М. Смирнов [5] и Г. Баумслаг [6] доказали финитную аппроксимируемость группы автоморфизмов конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы. В 1968 году А. И. Мальцевым [7] была установлена финитная аппроксимируемость расщепляемого расширения конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы.

Простые примеры показывают, что условие конечной порожденности группы существенно как в теореме Мальцева, так и в теореме Смирнова – Баумслага. Ослабляя это условие до требования конечности общего ранга группы, автор настоящей работы в [8] получил следующие два результата.

Теорема 1. *Группа автоморфизмов финитно аппроксимируемой группы конечного общего ранга является финитно аппроксимируемой группой.*

Теорема 2. *Расщепляемое расширение финитно аппроксимируемой группы конечного общего ранга с помощью финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа G имеет конечный общий ранг r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой r-порожденной подгруппе группы G. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [9]. Очевидно, что любая конечно порожденная группа имеет конечный общий ранг. С другой стороны существуют группы конечного общего ранга, которые не имеют конечной системы порождающих и при этом являются финитно аппроксимируемыми. Примеры таких групп можно найти уже среди локально циклических групп.

Хорошо известно, что теоремы 1 и 2 не могут быть непосредственно распространены с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Так, например, свободные абелевы группы $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p, но группы их автоморфизмов этим свойством уже не обладают. Тем не менее, доказанные ниже теоремы 3 и 4 утверждают почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость для группы автоморфизмов $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного общего ранга и для расщепляемого расширения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного общего ранга с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы.

Теорема 3. *Пусть G — расщепляемое расширение группы H конечного общего ранга с помощью группы K. Если группы H и K почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, то и группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

В [10, теорема 1.5] доказано, что группа автоморфизмов конечно порожденной $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Ослабляя условия конечной порожденности и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G до условий конечности общего ранга и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, мы получаем следующий результат.

Теорема 4. *Группа автоморфизмов почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного общего ранга является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Поскольку свободные группы $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p, то в качестве следствия из теоремы 4 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Группа автоморфизмов конечно порожденной почти свободной группы почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.*

Очевидно, что если группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и $\mathcal{F}_q$-аппроксимируема для двух различных простых чисел p и q, то она является группой без кручения. Поэтому из следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Группа автоморфизмов конечно порожденной почти свободной группы почти вся без кручения.*

Так как голоморф произвольной группы F является расщепляемым расширением группы F с помощью группы автоморфизмов группы F, то объединяя между собой теоремы 1–4, мы получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть F — произвольная группа конечного общего ранга. Голоморф группы F является финитно аппроксимируемой (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группой тогда и только тогда, когда группа F финитно аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема).*

Рассмотрим теперь свободные произведения групп с объединенной подгруппой. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — изоморфные подгруппы групп A и B соответственно, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Далее через P будем обозначать свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная аппроксимируемость групп A и B. Поэтому далее будем предполагать, что группы A и B финитно аппроксимируемы. Г. Баумслагом [11] доказана финитная аппроксимируемость группы P при дополнительном ограничении, состоящем в том, что подгруппы H и K конечны. Другим естественным ограничением является конечность индексов подгрупп H и K в группах A и B соответственно. Однако, это ограничение уже не гарантирует финитную аппроксимируемость группы P. Соответствующий пример построен в [12]. При данном ограничении мы исследуем финитную аппроксимируемость и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы P, предполагая дополнительно, что группы A и B являются полициклическими. Используя теорему 3, мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть группы A и B являются полициклическими. И пусть подгруппы H и K имеют конечные индексы в группах A и B соответственно. Тогда следующие три условия равносильны между собой.*

1. *Группа P финитно аппроксимируема.*
2. *Группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.*
3. *В подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$.*

Далее будут приведены доказательства теорем $3, 4, 5$. Для полноты изложения мы воспроизведем также и доказательства ранее опубликованных теорем 1 и 2.

2 Доказательство теорем

Следующее утверждение является обобщением классической теоремы М. Холла, утверждающей, что конечно порожденная группа может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.

Предложение 1. *Группа конечного общего ранга может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.*

Доказательство. Пусть A — произвольная группа, s — целое положительное число. Через $n(A, s)$ будем обозначать число всех подгрупп группы A индекса s, а через $N(A, s)$ — число всех подгрупп группы A, индекс которых не превосходит s.

Пусть H — конечно порожденная группа с не более чем r образующими. Тогда число $n(H, s)$ конечно и

$$n(H, s) \leqslant (s\,!)^r$$

(см. напр. [13, с. 250]). Поэтому

$$N(H, s) \leqslant f(r, s), \tag{1}$$

где $f(r, s) = \sum\limits_{k=1}^{s} (k\,!)^r$.

Пусть G — группа конечного общего ранга r. Покажем, что число $n(G, s)$ конечно и не превосходит $f(r, s)$. Допустим противное. Тогда в G существуют попарно различные подгруппы G_1, G_2, $\ldots$, G_m индекса s, где $m > f(r, s)$. Так как все G_i имеют в группе G один и тот же конечный индекс s, то для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ подгруппа G_i не содержится в G_j и поэтому можно зафиксировать элемент

$$a_{ij} \in G_i \setminus G_j. \tag{2}$$

Поскольку общий ранг группы G равен r, то в G существует подгруппа H с не более чем r образующими, содержащая все a_{ij}. Тогда для H выполняется неравенство (1). С другой стороны, из (2) следует, что подгруппы H_1, H_2, $\ldots$, H_m, высекаемые в H подгруппами G_1, G_2, $\ldots$, G_m, попарно различны и, кроме того, для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$[H : H_i] \leqslant [G : G_i] = s.$$

Поэтому $N(H, s) \geqslant m > f(r, s)$, что противоречит неравенству (1). Поэтому число $n(G, s)$ конечно и не превосходит $f(r, s)$.

Предложение 2. *Если группа G конечного общего ранга финитно аппроксимируема ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируема), то для каждого неединичного элемента a группы G существует характеристическая подгруппа N группы G конечного индекса (конечного p-индекса), не содержащая элемент a.*

Доказательство. Так как G финитно аппроксимируема ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируема) и $a \neq 1$, то в G существует нормальная подгруппа H конечного индекса (конечного p-индекса), не содержащая элемент a. Пусть N — пересечение всех нормальных подгрупп группы G, индекс которых совпадает с $[G : H]$. По предложению 1 число таких подгрупп конечно. Поэтому N — подгруппа конечного индекса (конечного p-индекса) группы G. Очевидно, что N — характеристическая подгруппа и $a \notin N$.

Доказательство. **(теорема 1)** Пусть G — финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга. Покажем, что ее группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ также финитно аппроксимируема.

Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ и $\varphi \neq 1$. Тогда $a^{-1} \cdot a\varphi \neq 1$ для некоторого элемента a группы G. Поэтому в силу предложения 2 в G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса, не содержащая элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Характеристичность подгруппы N позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\rho : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/N$, сопоставляющий каждому автоморфизму ψ группы G автоморфизм $\overline{\psi}$ группы G/N, действующий по правилу $(xN)\overline{\psi} = x\psi N$. Так как $a^{-1} \cdot a\varphi \notin N$, то $aN \neq a\varphi N$, т.е. $aN \neq (aN)\overline{\varphi}$. Поэтому $\overline{\varphi} \neq 1$. Таким образом, ρ — гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} G$ в конечную группу $\operatorname{Aut} G/N$, переводящий φ в неединичный элемент $\overline{\varphi}$. Поэтому группа $\operatorname{Aut} G$ финитно аппроксимируема. Теорема 1 доказана.

Доказательство. **(теорема 2)** Пусть G — финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга, P — расщепляемое расширение группы G с помощью финитно аппроксимируемой группы F. Покажем, что группа P финитно аппроксимируема.

Для доказательства финитной аппроксимируемости группы P достаточно для каждого ее неединичного элемента a указать нормальную подгруппу N группы P, не содержащую элемент a и такую, что группа P/N финитно аппроксимируема. Если $a \notin G$, то в качестве N можно взять G (так как $P/G \cong F$

— финитно аппроксимируемая группа). Если же $a \in G$, то по предложению 2 в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса, не содержащая элемент a. Так как N характеристична в G и G нормальна в P, то N нормальна в P. Поэтому нам остается доказать финитную аппроксимируемость группы P/N. Эта группа является расщепляемым расширением конечной группы G/N с помощью группы FN/N, изоморфной F, и финитная аппроксимируемость группы P/N вытекает из приведенной выше теоремы Мальцева. Теорема 2 доказана.

Пусть A — произвольная группа, p — простое число. Рассмотрим подгруппу $A'A^p$, где A' — коммутант группы A, A^p — степенная подгруппа. Если A — конечная p-группа, то подгруппа $A'A^p$, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Если A — конечная p-группа, то группа Γ всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, является p-группой. Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [14, с. 562]). Мы обобщаем результат Ф. Холла следующим образом.

Предложение 3. *Пусть A — конечная нормальная p-подгруппа группы G, $\Phi \leqslant \operatorname{Aut} G$ и подгруппа A Φ-допустима. Если все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Φ — p-группа.*

Доказательство. Пусть $\alpha : \Phi \to \operatorname{Aut} A$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому автоморфизму φ из Φ его ограничение на A. Так как $\Phi/\operatorname{Ker}\alpha \cong \Phi\alpha$, то для доказательства предложения достаточно показать, что $\Phi\alpha$ и $\operatorname{Ker}\alpha$ — p-группы.

В силу отмеченного выше результата Ф. Холла группа Γ всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю $A'A^p$, является p-группой. Так как все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю $A'A^p$, то $\Phi\alpha \subseteq \Gamma$. Отсюда и из того, что Γ — p-группа, следует, что $\Phi\alpha$ — p-группа.

Пусть теперь $\varphi \in \operatorname{Ker}\alpha$. Так как $\operatorname{Ker}\alpha \subseteq \Phi$, то φ действует тождественно по модулю $A'A^p$ и, в частности, по модулю A. Поэтому если $x \in G$, то $x\varphi = xa$, где $a \in A$. Так как $\varphi \in \operatorname{Ker}\alpha$, то φ тождественно на A и поэтому $a\varphi = a$. Отсюда и из того, что $x\varphi = xa$ следует, что $x\varphi^n = xa^n$ для любого натурального n. Беря здесь в качестве n порядок p^k группы A будем иметь: $a^n = 1$, $x\varphi^n = x$. Поэтому φ — p–элемент и, следовательно, $\operatorname{Ker}\alpha$ — p-группа.

Доказательство. **(теорема 4)** Пусть G — почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга. Покажем, что группа $\operatorname{Aut} G$ также почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Пусть H — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G. По предложению 1 число всех подгрупп группы G индекса $[G : H]$ конечно. Поэтому пересечение A всех таких подгрупп имеет в G конечный индекс. Кроме того, очевидно, что A — характеристическая $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа группы G.

Так как G — группа конечного общего ранга и A — подгруппа конечного индекса группы G, то A — группа конечного общего ранга. Тем же свойством обладает и ее фактор-группа $A/A'A^p$. Отсюда и из того, что $A/A'A^p$ — абелева группа периода p, следует, что $A/A'A^p$ — конечная группа. Таким образом $A'A^p$ — характеристическая подгруппа конечного индекса группы A. Отсюда и из того, что A — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G, следует, что $A'A^p$ — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G .

Характеристичность подгруппы $A'A^p$ группы G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\sigma : \mathrm{Aut}\, G \to \mathrm{Aut}\, G/A'A^p$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм $\overline{\varphi}$ группы $G/A'A^p$, действующий по правилу $(xA'A^p)\overline{\varphi} = x\varphi A'A^p$. Ядро Γ гомоморфизма σ состоит из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Так как $A'A^p$ — подгруппа конечного индекса группы G, то группа $\mathrm{Aut}\, G/A'A^p$ конечна. Поэтому Γ — подгруппа конечного индекса группы $\mathrm{Aut}\, G$ и для доказательства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $\mathrm{Aut}\, G$ нам остается доказать $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы Γ.

Пусть $\gamma \in \Gamma$ и $\gamma \neq 1$. Тогда $x^{-1} \cdot x\gamma \neq 1$ для некоторого элемента x группы G. Так как автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то $x^{-1} \cdot x\gamma \in A'A^p$ и, в частности, $x^{-1} \cdot x\gamma \in A$. Отсюда и из того, что A — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга, по предложению 2 заключаем, что существует характеристическая подгруппа N конечного p-индекса группы A такая, что $x^{-1} \cdot x\gamma \notin N$. Учитывая еще, что A — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G, заключаем, что N — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G.

Характеристичность подгруппы N группы G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования ρ группы $\mathrm{Aut}\, G$ в конечную группу $\mathrm{Aut}\, G/N$, сопоставляющий каждому автоморфизму ψ группы G автоморфизм $\overline{\psi}$ группы G/N, действующий по правилу $(gN)\overline{\psi} = g\psi N$. Поскольку $x^{-1} \cdot x\gamma \notin N$, то $\overline{\gamma} \neq 1$, т. е. ρ отображает автоморфизм γ из Γ в неединичный элемент группы $\Gamma\rho$, причем группа $\Gamma\rho$ конечна как подгруппа конечной группы $\mathrm{Aut}\, G/N$. Поэтому для завершения доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы Γ нам остается только проверить, что подгруппа $\Phi = \Gamma\rho$ группы $\mathrm{Aut}\, G/N$ является p-группой.

Так как A — нормальная подгруппа группы G и N — подгруппа конечного p-индекса группы A, то A/N — конечная нормальная p-подгруппа группы G/N. Поскольку A характеристична в G и автоморфизмы группы G/N, принадлежащие Φ, индуцируются некоторыми автоморфизмами группы G, то подгруппа A/N Φ-допустима в G/N. Так как автоморфизмы из Φ индуцируются автоморфизмами из Γ, действующими тождественно по модулю $A'A^p$, то автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^pN/N = (A/N)'(A/N)^p$.

Таким образом, A/N — конечная нормальная p-подгруппа группы G/N, $\Phi \leqslant \mathrm{Aut}\, G/N$, A/N Φ-допустима в G/N и все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $(A/N)'(A/N)^p$. Поэтому в силу предложения 3 Φ — p-группа. Теорема 4 доказана.

Предложение 4. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. И пусть θ — сопровождающий гомоморфизм, т. е. гомоморфизм группы B в группу $\operatorname{Aut} A$, сопоставляющий каждому элементу x из B автоморфизм $\overline{x}$ группы A, действующий по правилу $a\overline{x} = x^{-1}ax$ для каждого элемента a из A. Если группы A и $B\theta$ являются конечными p-группами и группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то группа G также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Очевидно, что подгруппа $H = \operatorname{Ker}\theta$ инвариантна в B и централизует подгруппу A. Поэтому H инвариантна в G. Так как $B/H \cong B\theta$ — p-группа, то H имеет в B конечный p-индекс. Отсюда и из того, что $[G : B] = |A|$ — степень числа p, следует, что H — подгруппа конечного p-индекса группы G. Так как H — подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы B, то H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Таким образом, группа G содержит нормальную $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу H конечного p-индекса. Отсюда следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G.

Предложение 5. *Пусть P — расщепляемое расширение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы A конечного общего ранга с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы C. Тогда группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $\omega : C \to \operatorname{Aut} A/A'A^p$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу c из C автоморфизм $\tilde{c}$ группы $A/A'A^p$, действующий по правилу

$$\big(aA'A^p\big)\tilde{c} = c^{-1}acA'A^p,$$

где $a \in A$. Обозначим через B ядро гомоморфизма ω. Тогда для каждого элемента a из A и для каждого элемента b из B

$$b^{-1}aba^{-1} \in A'A^p. \tag{3}$$

Так как A — группа конечного общего ранга, то группа $A/A'A^p$ конечна. Отсюда и из того, что фактор-группа C/B изоморфна некоторой подгруппе группы $\operatorname{Aut} A/A'A^p$ следует, что B — подгруппа конечного индекса группы C. Поэтому произведение $G = AB$ является подгруппой конечного индекса группы P и для доказательства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы P нам достаточно доказать $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G.

Очевидно, что G является расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, причем B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы C. Доказательство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G будет состоять в том, что для каждого неединичного элемента x группы G мы укажем нормальную подгруппу N группы G, не содержащую x и такую, что группа G/N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $x \notin A$, то в качестве N можно взять A, поскольку

$G/A \cong B$ — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Пусть теперь $x \in A$. По предложению 2 существует характеристическая подгруппа N конечного p-индекса группы A, не содержащая x. Поскольку N характеристична в A и A нормальна в G, то N нормальна в G. Для завершения доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G нам остается только доказать $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы $\overline{G} = G/N$.

Группа $\overline{G}$ является расщепляемым расширением конечной p-группы $\overline{A} = A/N$ с помощью группы $\overline{B} = BN/N$, причем $\overline{B} \cong B$ — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Из (3) следует, что для любых элементов aN и bN из $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно

$$(bN)^{-1}aNbN(aN)^{-1} \in A'A^pN/N = \overline{A}'\overline{A}^p.$$

Поэтому, если $\theta : \overline{B} \to \operatorname{Aut}\overline{A}$ — сопровождающий гомоморфизм, то автоморфизмы из $\overline{B}\theta$ действуют тождественно по модулю подгруппы $\overline{A}'\overline{A}^p$ конечной p-группы $\overline{A}$. Отсюда в силу отмеченного выше результата Ф. Холла $\overline{B}\theta$ — конечная p-группа.

Таким образом, группа $\overline{G}$ является расщепляемым расширением конечной p-группы $\overline{A}$ с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы $\overline{B}$ и образ $\overline{B}\theta$ подгруппы $\overline{B}$ относительно сопровождающего гомоморфизма $\theta : \overline{B} \to \operatorname{Aut}\overline{A}$ является p-группой. Поэтому в силу предложения 4 группа $\overline{G}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Доказательство. **(теорема 3)** Пусть G — расщепляемое расширение группы H конечного общего ранга с помощью группы K и группы H и K почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Обозначим через A и C $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые подгруппы конечных индексов групп H и K соответственно. Ввиду предложения 1 мы можем считать, что подгруппа A характеристична в H и, следовательно, нормальна в G. Подгруппа $P = AC$, очевидно, имеет конечный индекс в G, является расщепляемым расширением группы A с помощью группы C, причем A имеет конечный общий ранг как подгруппа конечного индекса группы H конечного общего ранга. Поэтому в силу предложения 5 группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и поскольку $[G : P] < \infty$, группа G также почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Теорема 3 доказана.

Доказательство. **(теорема 5)** Пусть A и B — полициклические группы, H и K — подгруппы конечных индексов групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Покажем, что следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа P финитно аппроксимируема.

2. Группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

3. В подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$.

Равносильность условий 1 и 3 доказана в [12], импликация 2 $\Rightarrow$ 1 очевидна. Поэтому нам остается доказать импликацию 3 $\Rightarrow$ 2. Пусть выполняется условие 3. Будем считать группы A и B подгруппами группы P. Тогда $A \cap B = H = K$

и $U = V$ — нормальная подгруппа группы P. Фактор-группа P/U является свободным произведением конечных групп A/U и B/U с объединенной подгруппой H/U. Хорошо известно [11], что свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой является почти свободной группой. Поэтому в группе P/U существует свободная подгруппа G/U конечного индекса. Так как G имеет конечный индекс в P, то для доказательства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы P достаточно установить это свойство для G. Группа G является расширением группы U с помощью свободной группы. Хорошо известно, что любое такое расширение расщепляемо. Поэтому группа G является расщепляемым расширением полициклической группы U с помощью свободной группы. Так как произвольная полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, а все свободные группы $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, то в силу теоремы 3 группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Теорема 5 доказана.

Автор благодарен Д. И. Молдаванскому за помощь при написании этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972.

[2] Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

[3] Сексенбаев К. К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4. Вып. 3. С. 79–83.

[4] Wilson J. S. Embedding theorems for residually finite groups // Math. J. 1980. V. 174. № 2. P. 149–157.

[5] Смирнов Д. М. К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. мат. ж. 1963. Т. 15. С. 453–457.

[6] Baumslag G. Automorphism groups of residually finite groups // J.London Math. Soc. 1963. V. 38. P. 117–118.

[7] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иванѓосйн-та. 1958. Т. 18. № 5. С. 49–60.

[8] Азаров Д. Н. О группах конечного общего ранга // ВестнЍванѓосўн-та. 2004. Вып. 3. С. 100–104.

[9] Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22. № 2. С. 351–352.

[10] Paris L. Residual p-properties of mapping class groups and surface groups // arXiv: math. GR/0703703v1. 23 Mar 2007.

[11] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans.Amer.Math.Soc. 1963. V. 21. № 5. P. 491–506.

[12] Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами конечных индексов // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2007. Вып. 3. С. 55–59.

[13] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука. 1967.

[14] Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука. 1966.

Ивановский государственный университет
Поступило 17.11.09