УДК 512.543

Д. Н. Азаров

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Для некоторых разрешимых групп получено необходимое и достаточное условие почти аппроксимируемости конечными p-группами.

Ключевые слова: разрешимая группа, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

For some soluble groups the necessary and sufficient condition to be virtually residually a finite p-group is obtained.

Key words: soluble group, virtually residually a finite p-group.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Если множество π состоит из одного простого числа p, то множество $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с множеством $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп.

Важным обобщением понятия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является понятие почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Очевидно, что произвольная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти $\mathcal{F}$-аппроксимируемая (и, в частности, любая почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая) группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой.

Таким образом, свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Более того, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

В 1952 году К. Гирш [5] доказал, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Этот результат был усилен сначала в работе

Лернера [6], а затем в работе А. Л. Шмелькина [4]. Лернером доказано, что для каждой полициклической группы G существует конечное множество π простых чисел такое, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, а в работе А. Л. Шмелькина доказана почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы для любого простого p. Здесь будут рассмотрены обобщения перечисленных выше результатов на некоторые разрешимые группы.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой минимаксной группы. Напомним, что группа называется минимаксной, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности. Хорошо известно, что разрешимая группа удовлетворяет условию максимальности (минимальности) тогда и только тогда, когда она является полициклической группой (конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Поэтому разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Более общим требованием является существование в данной группе субнормального ряда, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Следуя Д. Робинсону (см., напр., [7, п. 5.1.6)], будем называть такие группы разрешимыми группами с конечными абелевыми тотальными рангами (*FATR*-группами).

Элемент a группы G называется полным, если для любого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется полной, если все ее элементы являются полными. Группа G называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Это равносильно тому, что она не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа является редуцированной. С другой стороны, хорошо известная теорема Робинсона (см., напр., [7, п. 5.3.8]) утверждает, что если разрешимая *FATR*-группа редуцирована, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

Таким образом, разрешимая *FATR*-группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует конечное множество π простых чисел такое, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Однако финитно аппроксимируемая разрешимая *FATR*-группа может не быть почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p. Соответствующим примером может служить прямая сумма группы всех рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с простым числом p, и группы всех рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с простым числом q, отличным от p.

Здесь будет доказан следующий результат.

Теорема 1. *Разрешимая FATR-группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа G не содержит квазицик-*

лических подгрупп и подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей.

Приведем теперь некоторые известные результаты, являющиеся непосредственными следствиями теоремы 1.

Следствие 1. *Произвольная полициклическая группа является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для каждого простого числа p.*

Как уже отмечалось, этот результат принадлежит А. Л. Шмелькину [4].

Пусть G — разрешимая минимаксная группа, $\mathcal{R}$ — субнормальный ряд группы G, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Спектром группы G называется множество $\mathrm{sp}(G)$ всех простых чисел p таких, что ряд $\mathcal{R}$ имеет квазициклический фактор типа p^∞. Очевидно, что множество $\mathrm{sp}(G)$ не зависит от выбора ряда $\mathcal{R}$. Очевидно также, что спектр группы Q_p состоит из одного простого числа p, и если H — подгруппа разрешимой минимаксной группы G, то $\mathrm{sp}(H) \subseteq \mathrm{sp}(G)$. Поэтому если $p \notin \mathrm{sp}(G)$, то группа G не содержит подгрупп, изоморфных Q_p, и мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Если разрешимая минимаксная группа G редуцирована и простое число p не принадлежит спектру группы G, то группа G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.*

Независимое доказательство этого утверждения приводится в [7, п. 5.3.9].

Рассмотрим теперь группу

$$G_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n),$$

где n — целое неотрицательное число. Эта группа принадлежит хорошо известному классу групп Баумслага — Солитэра и является финитно аппроксимируемой. Кроме того, очевидно, что G_n — разрешимая минимаксная группа и ее спектр совпадает со множеством всех простых делителей числа n. Поэтому следствие 2 обеспечивает достаточность в следующем утверждении.

Следствие 3. *Группа G_n почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда p не делит n.*

Необходимость в этом утверждении легко проверяется с помощью теоремы 1.

Независимое доказательство следствия 3 приведено в [2].

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Очевидно, что любая разрешимая *FATR*-группа имеет конечный ранг.

Лемма 1. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B, т. е. A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$. И пусть группа A имеет конечный ранг. Если группы A и B почти аппроксимируемы конечными p-группами, то и группа G почти аппроксимируема конечными p-группами.*

Это утверждение даже в более общем виде доказано в работе [1].

Лемма 2. *Пусть N — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, не содержащая подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей. Тогда группа N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Хорошо известно, что в нильпотентной группе без кручения извлечение корня однозначно. Обозначим через h произвольный неединичный элемент группы N. Покажем, что существует целое положительное число s такое, что уравнение $x^{p^s} = h$ не разрешимо в группе N. Допустим противное, т. е. что для любого целого положительного числа t в группе N существует элемент x_t такой, что ${x_t}^{p^t} = h$. Тогда ${x_{t+1}}^{p^{t+1}} = h = {x_t}^{p^t}$. Отсюда и из однозначности извлечения корня в группе N следует, что $x_{t+1}^p = x_t$. Поэтому подгруппа X группы N, порожденная всеми элементами x_t, изоморфна группе p-ичных дробей, что невозможно.

Зафиксируем теперь число s, для которого уравнение $x^{p^s} = h$ не разрешимо в группе N, и рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^{sc}}$, где c — ступень нильпотентности группы N. По лемме 2 из [3] из любого элемента v подгруппы V в группе N извлекается корень степени p^s. Отсюда и из того, что уравнение $x^{p^s} = h$ не разрешимо в группе N, следует, что $h \notin V$.

Очевидно, что фактор-группа N/V является p-группой и порядки ее элементов ограничены. Покажем, что она конечна. Рассмотрим в группе N/V центральный ряд $\mathcal{R}$. Покажем, что все факторы ряда $\mathcal{R}$ конечны. Каждый такой фактор является абелевой p-группой, порядки элементов которой ограничены. Поэтому в силу теоремы Прюфера все факторы ряда $\mathcal{R}$ раскладываются в прямое произведение циклических p-групп, причем число прямых сомножителей в этих разложениях конечно за счет конечности ранга группы N. Значит, все факторы ряда $\mathcal{R}$ конечны. Следовательно, N/V — конечная p-группа.

Таким образом, V — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы N, не содержащая элемент h. Тем самым доказано, что группа N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Лемма 3. *Пусть G — разрешимая FATR-группа, не содержащая квазициклических подгрупп. Тогда в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа N, не имеющая кручения и такая, что фактор-группа G/N является полициклической.*

Доказательство. Для произвольной группы X через $Fit\,X$ будем обозначать подгруппу Фиттинга группы X, а через $\tau(X)$ — наибольшую нормальную периодическую подгруппу группы X. Хорошо известная теорема Грюнберга — Мальцева (см., напр., [7, п. 5.2.2]) утверждает, что в разрешимой *FATR*-группе X подгруппа $Fit\,X$ нильпотентна, а фактор-группа $X/Fit\,X$ почти абелева. Важным дополнением к этому результату является следующая теорема Д. Робинсона (см., напр., [7, п. 5.2.3]).

Пусть X — разрешимая группа, обладающая субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклической или периодической группой. Если наибольшая нормальная периодическая подгруппа $\tau(X)$ группы X конечна, то фактор-группа $X/Fit\,X$ является полициклической и почти абелевой.

Этот результат Робинсона может быть применен к произвольной разрешимой *FATR*-группе, поскольку любая такая группа, очевидно, обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклической или периодической группой.

В силу отмеченного выше результата Грюнберга — Мальцева подгруппа $F = Fit\,G$ нильпотентна. Очевидно, что в разрешимой *FATR*-группе любая периодическая подгруппа обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Поэтому $\tau(G)$ — черниковская группа, т. е. конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп. С другой стороны, по условию $\tau(G)$ не может содержать квазициклических подгрупп, и, следовательно, $\tau(G)$ конечна. Поэтому в силу отмеченного выше результата Робинсона G/F — полициклическая группа.

Поскольку $\tau(G)$ — конечная группа, то ее подгруппа $\tau(F)$ также конечна. Обозначим через n порядок группы $\tau(F)$, а через c — ступень нильпотентности группы F. Рассмотрим степенную подгруппу $N = F^{n^c}$. Покажем, что N — группа без кручения. Пусть a — элемент конечного порядка группы N. По лемме 2 из [3] существует элемент b из F такой, что $a = b^n$. Очевидно, что b — элемент конечного порядка группы F. Так как группа F нильпотентна, то множество всех элементов конечного порядка группы F является подгруппой и, очевидно, совпадает с $\tau(F)$. Из последних двух обстоятельств следует, что $b \in \tau(F)$. Но поскольку порядок группы $\tau(F)$ равен n, то $b^n = 1$, т. е. $a = 1$. Таким образом, N — нильпотентная группа без кручения. Как и в доказательстве леммы 2, используя конечность ранга группы F, легко видеть, что F/N — конечная группа. Так как N характеристична в F и F характеристична в G, то N характеристична в G. Так как фактор-группы G/F и F/N являются соответственно полициклической и конечной нильпотентной группами, то G/N — полициклическая группа.

Лемма 4. *Пусть G — разрешимая FATR-группа, не содержащая квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных группе Q_p. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. По лемме 3 в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа N без кручения такая, что фактор–группа G/N является полициклической. Последнее обстоятельство позволяет рассмотреть субнормальный ряд

$$1 \leqslant N = G_1 \leqslant G_2 \leqslant \cdots \leqslant G_n = G,$$

в котором все факторы, начиная со второго, являются циклическими группами. Индукцией по n покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $n = 1$, то $G = N$ — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, и по лемме 2 она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Предположим теперь, что группа G_{n-1} почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и покажем, что группа G также почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это очевидно, если фактор-группа G/G_{n-1} конечна. Поэтому можно считать, что G/G_{n-1} — бесконечная циклическая группа, т. е. что G — расширение группы G_{n-1} с помощью бесконечной циклической группы. Хорошо известно и легко проверяется, что любое такое расширение расщепляемо. Таким образом, группа G является расщепляемым расширением почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы G_{n-1} конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому в силу леммы 1 группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Лемма 5. *Пусть G — произвольная почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Тогда группа G не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных группе Q_p.*

Доказательство. Так как группа G финитно аппроксимируема, а квазициклические группы не обладают этим свойством, то группа G не содержит квазициклических подгрупп. Предположим теперь, что G содержит подгруппу, изоморфную группе Q_p. Так как группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то в группе Q_p существует подгруппа H конечного индекса, являющаяся $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Очевидно, что H изоморфна группе Q_p. Из последних двух обстоятельств следует, что группа Q_p $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Но это неверно, поскольку группа Q_p не содержит собственных подгрупп конечного p-индекса. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 1 обеспечивается леммами 4 и 5.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 11, вып. 3 (35). С. 11—21.
2. *Азаров Д. Н., Сергина Е. А.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых групп Баумслага — Солитэра // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Сер.: Математика. Вып. 6 (2008). С. 21—28.
3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49—60.
4. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
5. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.
6. *Learner A.* Residual properties of polycyclic groups // J. Math. 1964. Vol. 8. P. 536—542.
7. *Lennox J., Robinson D.* The Theory of Infinite Soluble Groups. Oxford. : Clarendon Press, 2004. 342 p.