Математика и её приложения : ЖИМО. 2012. Выпуск 1 (9). С. 3–8.

УДК 512.543

Д. Н. Азаров[1]

О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп Магнуса

Ключевые слова: свободное произведение групп с объединением, финитно аппроксимируемая группа.

Доказана финитная аппроксимируемость для некоторых свободных произведений групп с циклическим объединением.

Keywords: free product of groups with amalgamated subgroups, residually finite group.

The residual finiteness for any free products of groups with cyclic amalgamated subgroups is established.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть $P = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости группы P состоит в том, что на свободные множители A и B накладываются некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения как правило накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Так Г. Баумслаг [3] доказал, что если группы A и B являются свободными, а объединенные подгруппы H и K циклические, то группа P финитно аппроксимируема.

Здесь будет доказано следующее обобщение этого результата.

Теорема 1. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения, то группа P финитно аппроксимируема.*

Так как конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими, [2, с. 150], то непосредственным следствием теоремы 1

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: azarovdn@mail.ru.

является следующий результат автора [1].

Предложение 1. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то группа P финитно аппроксимируема.*

Напомним, что группа G называется группой Магнуса, если пересечение всех членов нижнего центрального рада группы G тривиально, и все факторы это ряда не имеют кручения. Знаменитая теорема Магнуса, доказанная в 30-е годы прошлого века, утверждает, что этим свойством обладает произвольная свободная группа. Очевидно, что любая группа Магнуса аппроксимируема нильпотентными группами без кручения. Поэтому частным случаем следствия 1 является следующий результат.

Предложение 2. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B являются конечно порожденными группами Магнуса, то группа P финитно аппроксимируема.*

Отюда и из отмеченной выше теоремы Магнуса вытекает следующий, упомянутый выше, результат Г. Баумслага.

Предложение 3. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B являются свободными, то группа P финитно аппроксимируема.*

Приступим к доказательству теоремы 1.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно, $\Lambda = \{(i,j) \in I \times J : (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\}$. Для каждого $\lambda = (i,j)$ из Λ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K, \tag{1}$$

то группа P финитно аппроксимируема.

Это утверждение хорошо известно как фильтрационная теорема Г. Баумслага и доказано в [3].

Лемма 2. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы, H и K — бесконечные циклические финитно отделимые подгруппы групп A и B соответственно. P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого* *целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Тогда группа P финитно аппроксимируема.*

Доказательство. По условию в группе A существует нормальная подгруппа U конечного индекса такая, что $H \cap U = H^{mn}$. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A. Так как группа A финитно аппроксимируема и ее подгруппа H финитно отделима, то

$$\bigcap_{i\in I} A_i = 1, \bigcap_{i\in I} A_i H = H. \tag{2}$$

Пусть $U_i = A_i \cap U$ для каждого $i \in I$. Тогда U_i — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, и в силу (2)

$$\bigcap_{i\in I} U_i = 1, \bigcap_{i\in I} U_i H = H. \tag{3}$$

Так как $H \cap U = H^{mn}$, то $H \cap U_i = H^{mn} \cap A_i = H^{mnl_i}$ для подходящего целого положительного числа l_i. Так как число mnl_i делится на n, то по условию в группе B существует нормальная подгруппа V_i конечного индекса такая, что $K \cap V_i = K^{mnl_i}$. Тогда $(H \cap U_i)\varphi = H^{mnl_i}\varphi = K^{mnl_i} = K \cap V_i$. Таким образом, для каждого $i \in I$ подгруппа U_i принадлежит семейству $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, введенному в формулировке леммы 1. Отсюда и из (3) следует, что $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H$. Аналогично проверяется, что $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K$. Поэтому в силу леммы 1 группа P финитно аппроксимируема. ■

Лемма 3. *Пусть N — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, H — неединичная циклическая подгруппа группы N. Тогда для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $l = p^k$ — степень простого числа p. Обозначим через h порождающий элемент подгруппы H, а через h_1 — элемент $h^{p^{k-1}}$.

Так как конечно порожденная нильпотентная группа аппроксимируема конечными p–группами [4], то в ней существует нормальная подгруппа индекса p^s не содержащая элемент h_1. Рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^s}$. Тогда $h_1 \notin V$.

Очевидно, что N/V — конечная p–группа. Из элементарных свойств конечных p–групп следует, что существует ряд $N/V = N_1/V \geq N_2/V \geq \cdots \geq N_r/V = V/V$, где $N_{i+1}/V = (N_i/V)^p$, $i = 1, \ldots, r-1$. Так как для всех $i = 2, \ldots, r$ подгруппа N_i/V характеристична в N_{i-1}/V, то N_i/V характеристична в N/V. Отсюда и из того, что V характеристична в N следует, что N_i характеристична в N для всех $i = 1, \ldots, r$. Так как $N_i/N_{i+1} \cong (N_i/V)/(N_{i+1}/V) = (N_i/V)/(N_i/V)^p$, то N_i/N_{i+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$. Поскольку $N = N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_r = V$ и

$h_1 \notin V$, то найдется число j такое, что $h_1 \in N_j$ и $h_1 \notin N_{j+1}$. Поэтому из того, что группа N_j/N_{j+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$, следует, что $| h_1 N_{j+1} |= p$. Отсюда и из того, что $h_1 = h^{p^{k-1}}$ следует, что $| hN_{j+1} |= p^k$. Поэтому $H \cap N_{j+1} = H^{p^k}$. Кроме того N_{j+1} характеристична в N и имеет в N конечный индекс (так как содержит подгруппу V, имеющую в N конечный индекс). Таким образом, в качестве искомой подгруппы L мы можем взять подгруппу N_{j+1}.

Рассмотрим теперь общий случай, когда разложение числа l на простые множители имеет вид $l = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$. В силу рассмотренного выше частного случая для каждого $i = 1, \ldots, n$ в группе N существует характеристическая подгруппа L_i конечного индекса такая, что $H \cap L_i = H^{p_i^{k_i}}$. Тогда подгруппа $L = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ является характеристической подгруппой конечного индекса группы L, и $H \cap L = H^l$. Лемма доказана. ■

Лемма 4. *Пусть G — полициклическая группа. Тогда в группе G существует нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq G$, где N — нильпотентная группа без кручения, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения, G/A — конечная группа.*

Это утверждение хорошо известно (см., напр., [2] с. 197).

Лемма 5. *Пусть G полициклическая группа И пусть H — бесконечная циклическая подгруппа группы G. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе G существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

Доказательство. По лемме 4 в группе G существует нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq G$, где N — нильпотентная группа без кручения, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения, G/A — конечная группа. Обозначим через m целое положительное число, для которого $H^m = H \cap A$.

Рассмотрим сначала случай, когда $H^m \subseteq N$. Очевидно, что в этом случае $H^m = H \cap N$. Кроме того, N — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Из последних двух обстоятельств по лемме 3 следует, что для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H^m \cap L = (H^m)^l = H^{ml}$. С другой стороны, $H^m \cap L = H \cap A \cap L = H \cap L$. Таким образом, $H \cap L = H^{ml}$. Поскольку L характеристична в N, и N нормальна в G, то L нормальна в G. Пусть $\sigma : G \to G/L$ — естественный гомоморфизм. Тогда равенство $H \cap L = H^{ml}$ примет вид $H \cap Ker\,\sigma = H^{ml}$. Как и любая полициклическая группа, G/L финитно аппроксимируема [5]. Таким образом, $H\sigma$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/L, и поэтому существует гомоморфизм ψ группы G/L на конечную группу инъективный на $H\sigma$. Тогда $Ker\,\sigma\psi \cap H = Ker\,\sigma \cap H = H^{ml}$. Поэтому в качестве искомой подгруппы W можно взять подгруппу $Ker\,\sigma\psi$.

Рассмотрим теперь случай, когда $H^m \not\subseteq N$. Пусть $\varepsilon : G \to G/N$ — естественный гомоморфизм. Так как $H^m \subseteq A$, то $H^m\varepsilon$ — подгруппа конечно порожденной абелевой группы без кручения $A\varepsilon = A/N$. Отсюда и из того, что $H^m \not\subseteq N$ следует, что $H^m\varepsilon$ — бесконечная циклическая подгруппа группы $A\varepsilon$. Очевидно, что $H^m\varepsilon \subseteq H\varepsilon \cap A\varepsilon$. Имеет место и обратное включение. Действительно, пусть $x \in H\varepsilon \cap A\varepsilon$, то есть $x = h\varepsilon = a\varepsilon$, где $h \in H, a \in A$. Тогда $h^{-1}a \in N$. Отсюда и из того, что $N \subseteq A$, вытекает, что $h \in A$. Следовательно, $h \in H \cap A = H^m$, и поэтому $x \in H^m\varepsilon$. Таким образом, $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$. Так как $H^m\varepsilon$ — бесконечная циклическая подгруппа конечно порожденной абелевой группы без кручения $A\varepsilon$, то по лемме 3 для любого целого положительного числа l в группе $A\varepsilon$ существует характеристическая подгруппа X конечного индекса такая, что $H^m\varepsilon \cap X = (H^m\varepsilon)^l = (H\varepsilon)^{ml}$. Отсюда и из того, что $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$ получаем: $H\varepsilon \cap X = H\varepsilon \cap A\varepsilon \cap X = H^m\varepsilon \cap X = (H\varepsilon)^{ml}$. Так как X — характеристическая подгруппа конечного индекса группы $A\varepsilon$, и $A\varepsilon$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $G\varepsilon$, то X — нормальная подгруппа группы $G\varepsilon$, и фактор-группа $G\varepsilon/X$ конечна. Пусть $\rho : G\varepsilon \to G\varepsilon/X$ — естественный гомоморфизм. Так как ядро X гомоморфизма ρ высекает в бесконечной циклической подгруппе $H\varepsilon$ подгруппу $(H\varepsilon)^{ml}$, то порядок группы $H\varepsilon\rho$ равен ml. Поэтому если через W обозначить ядро гомоморфизма $\varepsilon\rho$, то $H \cap W = H^{ml}$. Так как $G/W \cong G\rho\varepsilon = G\varepsilon/X$ — конечная группа, то W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Лемма доказана. ■

Лемма 6. *Пусть группа G аппроксимируема полициклическими группами без кручения. И пусть H — бесконечная циклическая подгруппа группы G. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе G существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

<u>Доказательство</u>. Так как группа G аппроксимируема полициклическими группами без кручения, то существует гомоморфизм φ группы G на полициклическую группу такой, что $H\varphi$ — бесконечная циклическая группа. По лемме 5 существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе $G\varphi$ существует нормальная подгруппа V конечного индекса такая, что $H\varphi \cap V = (H\varphi)^{ml}$. Пусть ψ — произведение гомоморфизма φ и естественного гомоморфизма $G\varphi \to G\varphi/V$. Тогда ядро W гомоморфизма ϕ является искомой подгруппой группы G, то есть $H \cap W = H^{ml}$. ■

Лемма 7. *Пусть группа C аппроксимируема полициклическими группами без кручения. Тогда все циклические подгруппы группы C финитно отделимы.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $T = (t)$ — циклическая подгруппа группы C. И

пусть x — элемент группы C, не принадлежащий T. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы C на конечную группу такой, что $x\varphi \notin T\varphi$. Если $T = 1$, то существование такого гомоморфизма следует из очевидной финитной аппроксимируемости группы C. Пусть теперь $T \neq 1$. Тогда T — бесконечная циклическая группа.

Пусть Δ — семейство всех нормальных подгрупп группы C, не содержащих t, фактор–группы по которым являются полициклическими группами без кручения. Покажем, что существует подгруппа $N \in \Delta$, такая, что $xN \notin TN/N$. Допустим противное. Тогда если M и N принадлежат Δ, то подгруппа $L = M \cap N$ также принадлежит Δ и существуют целые числа m, n и l такие, что $xM = t^m M, xN = t^n N, xL = t^l L$. Так как $L \leq M$ и $L \leq N$, то $xM = t^l M, xN = t^l N$. Из последних равенств следует, что $t^m M = t^l M, t^n N = t^l N$. Отсюда и из того, что порядки элементов tM и tN бесконечны, следует, что $m = l = n$. Таким образом, существует целое положительное число s такое, что для любой подгруппы N из Δ выполняется равенство $xN = t^s N$. Так как группа C аппроксимируема полициклическими группами без кручения, то пересечение всех подгрупп из Δ тривиально. Из последних двух обстоятельств получаем $x = t^s$, что не возможно, так как $x \notin H$.

Таким образом, существует подгруппа $N \in \Delta$ такая, что $xN \notin TN/N$, то есть $x\varepsilon \notin T\varepsilon$, где ε — естественный гомоморфизм группы C на группу C/N. Так как в произвольной полициклической группе все подгруппы финитно отделимы, то существует гомоморфизм ϕ группы C/N на конечную группу такой, что $x\varepsilon\phi \notin T\varepsilon\phi$. Таким образом, подгруппа T группы C финитно отделима. Лемма доказана ■

Справедливость теоремы 3 обеспечивается леммами 2, 6 и 7.

Список литературы

1. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость некоторых свободных произведений групп с циклическим объединением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. – 1997. – Вып. 1. – С. 4–10.

2. *Каргаполов, М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука. 1972. – 239 с.

3. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – V. 106 (2). – P. 193-209.

4. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1957. – V. 7. – P. 29–62.

5. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. – 1952. – V. 27. – P. 81-85.

Поступила в редакцию 01.03.2013.