ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 1 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 512.543

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ P-ГРУППАМИ НИСХОДЯЩИХ HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Д. Н. Азаров (г. Иваново)

Аннотация

Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее эндоморфизму φ. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Доказано, что если для некоторого простого числа p, не делящего n, группа G почти аппроксимируема конечными p-группами, то и группа $G(\varphi)$ почти аппроксимируема конечными p-группами. Это обобщает ряд известных результатов и в том числе теорему Д. Вайса и Т. Су о финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения почти полициклической группы.

ON THE VIRTUAL RESIDUALITY A FINITE P-GROUPS OF DESCENDING HNN-EXTENSION

D. N. Azarov

Аннотация

Let G be a group of finite general rank. And let H be a finite index subgroup in G. Let $G(\varphi)$ be a descending HNN-extension, corresponding to isomorphism $\varphi : G \to H$. It is proved that if G is virtually residually a finite p-group for any prime $p > [G : H]$, then $G(\varphi)$ is virtually residually a finite p-group. As a corollary a new proof of the known theorems is obtained.

1 Введение

Пусть G — группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$ и определяемая множеством соотношений R. И пусть φ — инъективный эндоморфизм группы G. Тогда группа

$$G(\varphi) = (a_1, a_2, \dots, t; R, t^{-1}a_1t = a_1\varphi, t^{-1}a_2t = a_2\varphi, \dots)$$

называется нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим эндоморфизму φ. Простейшим примером нисходящего HNN-расширения является группа Баумслага — Солитэра

$$B_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n),$$

где n — целое неотрицательное число.

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматривается также свойство аппроксимируемости конечными p-группами, где p — простое число, и свойство почти аппроксимируемости конечными p-группами. Напомним, что группа G обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Хорошо известно, что группа B_n финитно аппроксимируема [1]. Необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами группы B_n получено в [2]. В [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. . *Группа B_n почти аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда p не делит n.*

В 2003 году Д. Вайс и Т. Су [4] доказали следующий результат.

Теорема 2. . *Нисходящее HNN-расширение почти полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Заметим, что финитная аппроксимируемость нисходящего HNN-расширения полициклической группы является частным случаем следующего результата Г. Баумслага и Р. Бери, доказанного в работе [5] еще в 1976 году (см. также [6, п. 11.2.4]). Пусть $\mathcal{K}$ — наименьший класс разрешимых групп, содержащий единичную группу и замкнутый относительно нисходящих HNN-расширений и расширений с помощью конечных разрешимых групп. Тогда любая группа из класса $\mathcal{K}$ является финитно аппроксимируемой.

Существенным обобщением теоремы 2 является следующий результат А. Борисова и М. Сапира [7].

Теорема 3. . *Нисходящее HNN-расширение конечно порожденной линейной группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Еще одним обобщением теоремы 2 является следующий результат А. Ремтуллы и М. Ширвани [8].

Теорема 4. . *Нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа называется минимаксной, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности для подгрупп. Полициклические группы являются минимаксными и могут быть охарактеризованы как разрешимые группы с условием максимальности. Группа называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Для разрешимых минимаксных групп условие редуцированности равносильно условию финитной аппроксимируемости (см., напр., [6, п. 5.3.2]).

Напомним, что группа G называется группой конечного общего ранга, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе. Условию конечности общего ранга удовлетворяют все конечно порожденные группы, все подгруппы аддитивной группы рациональных чисел, а также все разрешимые минимаксные группы.

Здесь доказан следующий результат, обобщающий теорему 1, усиливающий и обобщающий теоремы 2 и 4, и частично обобщающий теорему 3.

Теорема 5. . *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n.*

Если для некоторого простого числа p, не делящего n, группа G почти аппроксимируема конечными p-группами, то и группа $G(\varphi)$ почти аппроксимируема конечными p-группами.

В частности, если группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p, то и группа $G(\varphi)$ почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p.

Заметим, что HNN-расширение $G(\varphi)$ финитно аппроксимируемой группы G конечного общего ранга не обязано быть финитно аппроксимируемой группой, даже если индекс $[G : G\varphi]$ конечен. Действительно, если G — группа рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с фиксированным простым числом p, и эндоморфизм φ ставит в соответствие каждому x из G число px, то G — финитно аппроксимируемая группа ранга 1, индекс $[G : G\varphi]$ конечен и равен p, но группа $G(\varphi)$ не является финитно аппроксимируемой, поскольку содержит нетривиальные полные элементы.

Так как группа Баумслага — Солитэра B_n представляет собой нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы, то частным случаем теоремы 5 является следующее утверждение. Если простое число p не делит целое положительное число n, то группа B_n почти аппроксимируема конечными

p-группами. Если же p делит n, то группа B_n не является почти аппроксимируемой конечными p-группами, поскольку она содержит группу p-ичных дробей, которая, очевидно, не не аппроксимируема конечными p-группами и не обладает этим свойством почти. Таким образом, теорема 1 является следствием теоремы 5.

А. Л. Шмелькин [9] доказал, что любая полициклическая группа почти аппроксимируема конечными p–группами для каждого простого числа p. Кроме того, если φ — инъективный эдоморфизм почти полициклической группы G, то индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен (см., напр., [4, утв. 3.10]). Поэтому из теоремы 5 вытекает следующее утверждение, усиливающее теорему 2.

Следствие 1. . *Пусть G — почти полициклическая группа, φ — инъективный эндоморфизм группы G, n — индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G. Тогда для любого простого числа p, не делящего n, группа $G(\varphi)$ почти аппроксимируема конечными p-группами.*

Редуцированные разрешимые минимаксные группы почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p [6, п. 5.3.9]. Кроме того, по аналогии с упомянутым выше утверждением [4, утв. 3.10] может быть доказано, что для любого инъективного эндоморфизма φ почти разрешимой минимаксной группы G индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен. Поэтому непосредственным следствием теоремы 5 является следующее утверждение, усиливающее теорему 4.

Следствие 2. . *Нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является группой, почти аппроксимируемой конечными p-группами для всех достаточно больших простых p.*

Поскольку конечно порожденные линейные группы над полем нулевой характеристики почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p [10, Wind. 7, Prop. 19.4.9]. то еще одним следствием из теоремы 5 является следующий результат, дополняющий и частично обобщающий теорему 3.

Следствие 3. . *Пусть G — конечно порожденная группа, являющаяся линейной над полем нулевой характеристики, φ — инъективный эндоморфизм группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Тогда группа $G(\varphi)$ почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p.*

Отметим также, что класс всех групп конечного общего ранга, почти аппроксимируемых конечными p–группами для всех достаточно больших простых p, не исчерпывается конечно порожденными линейными группами над полями нулевой характеристики и редуцированными почти разрешимыми минимаксными группами. Этому классу принадлежат, например, конечные расширения конечно порожденных свободных разрешимых групп [11].

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2 Вспомогательные утверждения

Лемма 1. . *Пусть K — конечная группа, Var_K — многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Тогда любая группа конечного общего ранга из многообразия Var_K является конечной.*

Доказательство. Хорошо известно, что все конечно порожденные группы из многообразия Var_K конечны (см., напр., [12, гл. 5, п. 2, упр. 8]). Обозначим через n_r порядок свободной группы ранга r данного многообразия. Тогда порядки всех r-порожденных групп многообразия Var_K ограничены числом n_r.

Пусть теперь G — группа конечного общего ранга из многообразия Var_K. Тогда существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество M элементов группы G содержится в некоторой r-порожденной подгруппе X группы G. Тогда $|M| \leq |X| \leq n_r$. Следовательно G — конечная группа и ее порядок ограничен числом n_r. Лемма доказана.

Далее через p будем обозначать некоторое простое число.

Лемма 2. . *Пусть G — группа конечного общего ранга. И пусть M — нормальная подгруппа конечного индекса (конечного p-индекса) группы G. Тогда в группе G существует вербальная подгруппа V конечного индекса (конечного p-индекса) такая, что $V \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть

$$(f_i(x_1, x_2, \dots) = 1)_{i \in I}$$

— система всех тождеств группы G/M. Обозначим через V вербальную подгруппу группы G, порожденную всеми ее элементами $f_i(h_1, h_2, \dots)$, где $i \in I, h_1 \in G, h_2 \in G, \dots$. Тогда $V \subseteq M$ и $G/V \in Var_{G/M}$. Отсюда и из того, что группа G/V имеет конечный общий ранг, а группа G/M конечна, по лемме 1 следует конечность группы G/V. Если G/M — конечная p-группа, то в ней выполняется тождество $x^m = 1$, где m — p-число, и поскольку $G/V \in Var_{G/M}$, то и в группе G/V выполняется тождество $x^m = 1$, т.е. G/V — конечная p-группа. Лемма доказана.

Лемма 3. . *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого простого числа p, не делящего n, группа G аппроксимируема конечными p-группами. Тогда для любого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$.*

Доказательство. Так как группа G аппроксимируема конечными p-группами, то для каждого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса, не содержащая элемент a. В силу леммы 2 в группе G существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса такая, что $V \subseteq M$. Очевидно, что элемент a не принадлежит подгруппе V. Так как подгруппа V является вербальной, то $V\varphi \subseteq V$. Очевидно также, что $V\varphi \subseteq H$. Таким образом, $V\varphi \subseteq V \cap H$. Поэтому для доказательства равенства $V\varphi = V \cap H$ нам остается проверить, что индексы подгрупп $V\varphi$ и $V \cap H$ конечны и совпадают между собой.

Так как индекс $[G : V]$ является p-числом и p не делит $[G : H]$, то индексы $[G : V]$ и $[G : H]$ взаимно просты. Поэтому

$$[G : V \cap H] = [G : V][G : H]. \tag{1}$$

С другой стороны, φ — изоморфизм группы G на подгруппу H и поэтому $[G : V] = [H : V\varphi]$. Отсюда и из того, что $V\varphi \subseteq H \subseteq G$ получаем:

$$[G : V\varphi] = [G : H][H : V\varphi] = [G : H][G : V]. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что индексы $[G : V \cap H]$ и $[G : V\varphi]$ конечны и совпадают между собой. Лемма доказана.

Лемма 4. . *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H. И пусть $\mathcal{P}$ — класс групп, замкнутый относительно подгрупп. Если группа G содержит подгруппу конечного индекса, принадлежащую классу $\mathcal{P}$, то в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, принадлежащая классу $\mathcal{P}$ и такая, что $P\varphi = P \cap H$. В частности, если группа G почти аппроксимируема конечными p-группами, то в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, аппроксимируемая конечными p-группами и такая, что $P\varphi = P \cap H$.*

Доказательство. Пусть M — подгруппа группы G конечного индекса, принадлежащая классу $\mathcal{P}$. В силу леммы 2 в группе G существует вербальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \subseteq M$. Так как класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно подгрупп, то подгруппа V принадлежит классу $\mathcal{P}$. А поскольку подгруппа V является вербальной, то $V\varphi \subseteq V$.

Для каждого целого неотрицательного числа i через V_i будем обозначать множество всех элементов x группы G таких, что $x\varphi^i \in V$. Очевидно, что V_i — нормальная подгруппа конечного индекса группы G,

$$V_{i+1}\varphi = V_i \cap H \tag{3}$$

и

$$V_i \cong V_i\varphi^i \leq V. \tag{4}$$

Так как $V \in \mathcal{P}$ и класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно подгрупп, то в силу (4) $V_i \in \mathcal{P}$ для произвольного i. Поскольку $V\varphi \subseteq V$, то

$$V = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots .$$

Отсюда и из того, что V — подгруппа конечного индекса группы G следует, что существует целое положительное число j такое, что $V_j = V_{j+1}$. Тогда при $i = j$ равенство (3) принимает вид $V_j\varphi = V_j \cap H$. Таким образом, подгруппа $P = V_j$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма доказана.

Лемма 5. . *Пусть φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен. И пусть P — подгруппа конечного индекса группы G, удовлетворяющая равенству $P\varphi = P \cap H$. Тогда $[G : H] = [P : P \cap H]$.*

Доказательство. Так как φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, то $[G : P] = [H : P\varphi]$. Отсюда и из того, что $P\varphi = P \cap H$ следует, что $[G : P] = [H : P \cap H]$. Умножая это равенство на $[G : H]$, получаем

$$[G : H][G : P] = [G : H][H : P \cap H] = [G : P \cap H] = [G : P][P : P \cap H].$$

Сокращая это равенство на $[G : P]$, получаем требуемое равенство $[G : H] = [P : P \cap H]$.

Лемма 6. . *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого простого числа p, не делящего n, группа G почти аппроксимируема конечными p-группами. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, удовлетворяющая равенству $P\varphi = P \cap H$ и такая, что для любого неединичного элемента $a \in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$.*

Доказательство. По лемме 4 в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, аппроксимируемая конечными p-группами и такая, что $P\varphi = P \cap H$. Так как индекс подгруппы H в группе G конечен, и P - подгруппа конечного индекса группы G, удовлетворяющая равенству $P\varphi = P \cap H$, то по лемме 5 $[P : P \cap H] = n$. Очевидно, что в группе конечного общего ранга все подгруппы конечного индекса имеют конечный общий ранг. Поэтому P — группа конечного общего ранга. Так как $P\varphi = P \cap H$, то ограничение $\bar{\varphi}$ изоморфизма φ на подгруппу P является изоморфизмом группы P на подгруппу $P \cap H$.

Таким образом, P — группа конечного общего ранга, $\bar{\varphi}$ — изоморфизм группы P на ее подгруппу $P \cap H$, индекс $n = [P : P \cap H]$ конечен и при этом для некоторого простого числа p, не делящего n, группа P аппроксимируема конечными p-группами. Поэтому в силу леммы 3 для любого неединичного элемента

$a \in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\bar{\varphi} = V \cap (P \cap H)$. Последнее равенство может быть переписано в виде $V\varphi = V \cap H$. Лемма доказана.

Лемма 7. . *Пусть φ — инъективный эндоморфизм группы G,*

$$G(\varphi) = (G, t; t^{-1}Gt = G\varphi)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть V — подгруппа группы G такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$. И пусть для каждого целого числа i

$$V_i = t^{-i}Vt^i, G_i = t^{-i}Gt^i.$$

Тогда подмножества

$$\bar{V} = \bigcup_{i\in Z} V_i, \bar{G} = \bigcup_{i\in Z} G_i$$

являются подгруппами группы $G(\varphi)$, $\bar{V} \subseteq \bar{G}$ и для каждого целого положительного числа i имеет место равенство

$$\bar{V} \cap G_i = V_i. \tag{5}$$

Если сверх того V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то $\bar{V}$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $\bar{G}$ и $[G : V] = [\bar{G} : \bar{V}]$.

Доказательство. Так как

$$t^{-1}Vt = V\varphi = V \cap G\varphi \subseteq V,$$

то для любого целого числа k

$$t^{-k-1}Vt^{k+1} \subseteq t^{-k}Vt^k,$$

то есть

$$\cdots \subseteq V_1 \subseteq V_0 \subseteq V_{-1} \subseteq \ldots. \tag{6}$$

Поэтому

$$\bar{V} = \bigcup_{i\in Z} V_i = \bigcup_{i\leq 0} V_i \tag{7}$$

— подгруппа группы $G(\varphi)$. Аналогично проверяется, что

$$\cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 \subseteq G_{-1} \subseteq \ldots. \tag{8}$$

и поэтому $\bar{G}$ — подгруппа группы $G(\varphi)$. Очевидно также, что $\bar{V} \subseteq \bar{G}$.

Так как $V\varphi = V \cap G\varphi$, то

$$V\varphi^2 = V\varphi \cap G\varphi^2 = V \cap G\varphi \cap G\varphi^2 = V \cap G\varphi^2,$$

и вообще для любого целого неотрицательного числа n

$$V\varphi^n = V \cap G\varphi^n,$$

то есть

$$t^{-n}Vt^n = V \cap t^{-n}Gt^n,$$

откуда

$$V = t^nVt^{-n} \cap G = V_{-n} \cap G.$$

Отсюда и из (7) следует, что $V = \bar{V} \cap G$ и поэтому для любого целого числа i

$$V_i = t^{-i}Vt^i = t^{-i}\bar{V}t^i \cap t^{-i}Gt^i = \bar{V} \cap G_i.$$

Таким образом, равенство (5) доказано.

Пусть теперь V — нормальная подгруппа группы G. Очевидно, что для любого целого числа i подгруппа V_i нормальна в группе G_i и тогда в силу условий (6) и (8) $\bar{V}$ — нормальная подгруппа группы $\bar{G}$. Предположим еще, что индекс подгруппы V в группе G конечен и равен s. Так как в силу (5) для каждого целого положительного числа i

$$G_i\bar{V}/\bar{V} \cong G_i/G_i \cap \bar{V} = G_i/V_i \cong G/V,$$

то подгруппы $G_i\bar{V}/\bar{V}$ конечны и имеют один и тот же порядок s. А поскольку объединение этих подгрупп совпадает с $\bar{G}/\bar{V}$, то $\bar{G}/\bar{V}$ — конечная группа порядка s. Таким образом, $[G : V] = s = [\bar{G} : \bar{V}]$ Лемма доказана.

3 Доказательство теоремы 5

Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G,

$$G(\varphi) = (G, t; t^{-1}Gt = G\varphi)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n.

Предположим, что для некоторого простого числа p, не делящего n, группа G почти аппроксимируема конечными p-группами. Покажем, что и группа $G(\varphi)$ почти аппроксимируема конечными p-группами.

По лемме 6 в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, удовлетворяющая равенству $P\varphi = P \cap G\varphi$ и такая, что для любого неединичного элемента $a \in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$.

Пусть для каждого целого числа i

$$P_i = t^{-i}Pt^i, G_i = t^{-i}Gt^i.$$

По лемме 7 подмножества

$$\bar{P} = \bigcup_{i \in Z} P_i, \bar{G} = \bigcup_{i \in Z} G_i$$

являются подгруппами группы $G(\varphi)$ причем поскольку P — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то в силу леммы 7 $\bar{P}$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $\bar{G}$ и $[G : P] = [\bar{G} : \bar{P}]$.

Покажем, что группа $\bar{P}$ аппроксимируема конечными p-группами, то есть что для каждого неединичного элемента a группы $\bar{P}$ в группе $\bar{P}$ существует нормальная подгруппа конечного p-индекса, не содержащая элемент a. Так как элемент a очевидно сопряжен с некоторым элементом из подгруппы P, то без потери общности можно считать, что $a \in P$. Поэтому в группе P существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$. Так как V — вербальная подгруппа конечного индекса группы P и P — нормальная подгуппа конечного индекса группы G, то V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Пусть для кождого целого числа i

$$V_i = t^{-i} V t^i, \bar{V} = \bigcup_{i \in Z} V_i.$$

Так как $V\varphi = V \cap G\varphi$ и V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то по лемме 7 $\bar{V}$ — подгруппа группы $G(\varphi)$, для любого целого i выполняется равенство $G_i \cap \bar{V} = V_i$ (и, в частности, $G \cap \bar{V} = V$), $\bar{V}$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $\bar{G}$ и $[G : V] = [\bar{G} : \bar{V}]$. Очевидно, что $\bar{V} \subseteq \bar{P} \subseteq \bar{G}$. Поэтому $[\bar{G} : \bar{V}] = [\bar{G} : \bar{P}][\bar{P} : \bar{V}]$. Отсюда и из того, что $[G : V] = [\bar{G} : \bar{V}]$ и $[G : P] = [\bar{G} : \bar{P}]$, следует, что $[G : V] = [G : P][\bar{P} : \bar{V}]$. Но, с другоий стороны, $[G : V] = [G : P][P : V]$. Из последних двух равенств получаем $[P : V] = [\bar{P} : \bar{V}]$. А поскольку $[P : V]$ — степень числа p, то и $[\bar{P} : \bar{V}]$ — степень числа p. Таким образом, $\bar{V}$ — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $\bar{P}$. Так как $a \in P \subseteq G$, $a \notin V$ и $G \cap \bar{V} = V$, то $a \notin \bar{V}$. Мы видим, таким образом, что группа $\bar{P}$ аппроксимируема конечными p-группами. Отсюда и из того, что индекс $[\bar{G} : \bar{P}]$ конечен, следует, что группа $\bar{G}$ почти аппроксимируема конечными p-группами.

Так как группа $\bar{G}$ совпадает с объединением возрастающей последовательности подгрупп G_i, изоморфных группе G, и группа G имеет конечний общий ранг, то и группа $\bar{G}$ также имеет конечный общий ранг. Легко также видеть, что группа $G(\varphi)$ является расщепляемым расширением группы $\bar{G}$ с помощью циклической группы, порожденной элементом t.

Таким образом, $G(\varphi)$ — расщепляемое расширение группы $\bar{G}$ конечного общего ранга, почти аппроксимируемой конечными p-группами, с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому почти аппроксимируемость конечными p-группами группы $G(\varphi)$ вытекает из следующего результата, доказанного в [13].

Расщепляемое расширение группы конечного ранга, почти аппроксимируемой конечными p-группами, с помощью группы, почти аппроксимируемой конечными p-группами, само является группой, почти аппроксимируемой конечными p-группами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199-201.

[2] Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129-140.

[3] Азаров Д. Н., Сергина Е. А. О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых групп Баумслага — Солитэра // Научн. тр. Иван. гос ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 21–28.

[4] Hsu T., Wise D. Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182:1 P. 65–78.

[5] Baumslag G., Bieri R. Constructable soluble groups // Math. Z. 1976. V. 151. P. 249–267.

[6] Lennox J., Robinson D. The theory of infinite soluble groups. Oxford.: Clarendon press. 2004.

[7] Borisov A., M. Sapir M. Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // ArXiv math. 2003. 0309121V1 [math. GR].

[8] Rhemtulla A. H., Shirvani M. The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain solyble groups // Illions J. of Math. 2003. V. 47. P. 477–484.

[9] Шмелькин А. Л. Полициклические группы // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9. С. 234-235.

[10] Lubotzky A., Segal D. Subgroup growth. Progress in Mathematics. V. 212. Birkhauser verlag.: Basel. 2003.

[11] Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

[12] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972.

[13] Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. Вып. 3(35). С. 11–21.

Ивановский государственный университет.
Поступило 14.05.2012