ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Д. Н. Азаров (г. Иваново)

Аннотация

Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Доказано, что если существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, инъективные на подгруппах H и K, то группа G финитно аппроксимируема.

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение групп, финитно аппроксимируемая группа.

ON THE RESIDUAL FINITENESS OF GENERALIZED FREE PRODUCTS WITH CYCLIC AMALGAMATION

D. N. Azarov (Ivanovo)

Abstract

Let G be the free product of residually finite groups A and B with amalgamated cyclic subgroups H and K. It is proved that if there exist homomorphisms of the groups A and B onto virtually polycyclic groups which are injective on the subgroups H and K then G is a residually finite group.

Keywords: generalized free product of groups, residually finite group.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1. Наряду с понятием финитной аппроксимируемости изучается также аппроксимируемость группы G группами из какого-либо фиксированного класса, например, конечными p-группами, нильпотентными группами, разрешимыми группами и т.д.

Примерами финитно аппроксимируемых групп могут служить свободные группы, полициклические группы, и в частности, конечно порожденные нильпотентные группы (см., напр., [1, 2]). Свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп само является финитно аппроксимируемой группой [1].

Перейдем теперь к обобщенным свободным произведениям, т. е. к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$P = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа P порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также всевозможными соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости группы P состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости, накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения как правило накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Так Г. Баумслаг [3] доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а объединенные подгруппы H и K конечны, то группа P финитно аппроксимируема.

Другим естественным ограничением на объединенные подгруппы H и K является их цикличность. Заметим, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с циклическими объединенными подгруппами уже не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Соответствующие примеры доставляет следующий результат автора [4].

Свободное произведение P финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп A и B с собственными циклическими объединенными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Напомним, что подгруппа H группы A называется финитно отделимой, если для каждого элемента a группы A, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы A на конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Так как полициклические группы являются разрешимыми минимаксными группами и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [5, п. 1.3.10]), то частным случаем приведенного выше результата является теорема Д. Дайер [6] о финитной аппроксимируемости произвольного свободного произведения двух полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами.

Изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений было начато еще Г. Баумслагом в его фундаментальной работе [3]. В этой работе доказано, что свободное произведение двух свободных групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Более того, свободное произведение двух свободных групп с циклическим объединением аппроксимируемо конечными разрешимыми группами [7]. В [7] (и независимо в [8]) получен критерий аппроксимируемости конечными p–группами для такого свободного произведения.

В работе Баумслага [3] доказано также, что свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.

Обобщая этот результат, Д. Дайр [6] доказала, что свободное произведение двух полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. В действительности она доказала даже более общий результат: свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Мы здесь докажем следующую теорему, которая обобщает упомянутые выше результаты Д. Дайер и Г. Баумслага.

Теорема 1. *Пусть P — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, инъективные на подгруппах H и K соответственно, то группа P финитно аппроксимируема.*

Если группы A и B являются почти полициклическими, то они финитно аппроксимируемы [2], и тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ инъективны на H и K. Поэтому упомянутый выше результат Д. Дайер является непосредственным следствием теоремы 1. Ниже будут приведены другие следствия этой теоремы, частным случаем одного из которых является упомянутый выше результат Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения свободных групп с циклическим объединением.

Предположим, что группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения. Тогда они финитно аппроксимируемы и существуют гомоморфизмы групп A и B на полициклические группы без кручения, инъективные на подгруппах H и K соответственно. Действительно, если $H \neq 1$ и $K \neq 1$, то в качестве таких гомоморфизмов можно взять любые гомоморфизмы групп A и B на полициклические группы без кручения, отображающие порождающие элементы подгрупп H и K в неединичные элементы. Если же $H = 1 = K$, то существование таких гомоморфизмов очевидно. Поэтому непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат.

Следствие 1. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения, то группа P финитно аппроксимируема.*

Так как конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими (см., напр., [9, с. 150]), то частным случаем следствия 1 является следующий результат.

Следствие 2. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то группа P финитно аппроксимируема.*

Следуя А. Л. Шмелькину [10], будем называть группу G группой Магнуса, если пересечение всех членов нижнего центрального ряда группы G совпадает с единичной подгруппой, и все факторы этого ряда не имеют кручения. Знаменитая теорема Магнуса — Витта (см., напр., [9, с. 127–128]), доказанная в 30-е годы прошлого века, утверждает, что свободные группы являются группами Магнуса. Другие примеры групп Магнуса можно найти в работе [10]. Так как любая конечно порожденная группа Магнуса, очевидно, аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то частным случаем следствия 2 является следующий результат.

Следствие 3. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B являются конечно порожденными группами Магнуса, то группа P финитно аппроксимируема.*

Как и любые группы Магнуса свободные группы аппроксимируемы нильпотентными группами без кручения. Кроме того, свободные группы аппроксимируемы конечно порожденными свободными группами. Из последних двух обстоятельств следует, что любая свободная группа аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Поэтому из следствия 2 вытекает упомянутый выше результат Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. В действительности, имеет место следующее обобщение этого результата Г. Баумслага, которое будет доказано с помощью теоремы 1.

Теорема 2. *Свободное произведение двух почти свободных групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Приступим теперь к доказательствам теорем 1 и 2.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно. И пусть еще*

$$\Lambda = \{(i,j) \in I \times J : (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\}.$$

Для каждого $\lambda = (i,j)$ из Λ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K, \tag{1}$$

то группа P финитно аппроксимируема.

Это утверждение хорошо известно как фильтрационная теорема Г. Баумслага и оно доказано в фундаментальной работе [3].

Лемма 2. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы, H и K — бесконечные циклические финитно отделимые подгруппы групп A и B соответственно. Пусть, как и выше, P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Тогда группа P финитно аппроксимируема.*

Доказательство. По условию в группе A существует нормальная подгруппа U конечного индекса такая, что $H \cap U = H^{mn}$. Пусть, как и в формулировке леммы 1, $(A_i)_{i\in I}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A. Так как группа A финитно аппроксимируема и ее подгруппа H финитно отделима, то

$$\bigcap_{i\in I} A_i = 1, \bigcap_{i\in I} A_i H = H. \tag{2}$$

Пусть $U_i = A_i \cap U$ для каждого $i \in I$. Тогда U_i — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, и в силу (2)

$$\bigcap_{i \in I} U_i = 1, \bigcap_{i \in I} U_i H = H. \tag{3}$$

Так как $H \cap U = H^{mn}$, то $H \cap U_i = H^{mn} \cap A_i = H^{mnl_i}$ для подходящего целого положительного числа l_i. Так как число mnl_i делится на n, то по условию в группе B существует нормальная подгруппа V_i конечного индекса такая, что $K \cap V_i = K^{mnl_i}$. Тогда

$$(H \cap U_i)\varphi = H^{mnl_i}\varphi = K^{mnl_i} = K \cap V_i.$$

Таким образом, для каждого $i \in I$ подгруппа U_i принадлежит семейству $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, введенному в формулировке леммы 1. Отсюда и из (3) следует, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda H = H.$$

Аналогично проверяется, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda K = K.$$

Таким образом, выполняются условия (1) и поэтому в силу леммы 1 группа P финитно аппроксимируема.

Лемма 3. *Пусть A — конечно порожденная абелева группа без кручения, H — неединичная циклическая подгруппа группы A. Тогда для любого целого положительного числа l в группе A существует степенная подгруппа L такая, что $H \cap L = H^l$.*

Доказательство. Пусть B — максимальная циклическая подгруппа группы A, содержащая H. Тогда $H = B^k$ для подходящего $k > 0$, и существует подгруппа C группы A такая, что $A = B \times C$. Рассмотрим степенную подгруппу $L = A^{kl}$. Очевидно, что $L = B^{kl} \times C^{kl}$ и поэтому $L \cap B = B^{kl}$. Таким образом, $L \cap H = L \cap B \cap H = B^{kl} \cap H = B^{kl} \cap B^k = B^{kl} = H^l$. Лемма доказана.

Далее под нормальным рядом группы G понимается конечный ряд $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_r = 1$, все члены которого являются нормальными подгруппами группы G.

Лемма 4. *В произвольной почти полициклической группе существует нормальный ряд, каждый фактор которого является либо конечной группой, либо конечно порожденной абелевой группой без кручения.*

Доказательство. Пусть G — почти полициклическая группа, и пусть S полициклическая подгруппа конечного индекса группы G. Без потери общности можно считать, что S нормальна в G. Обозначим через S_n n–й коммутант группы S. Тогда мы получаем нормальный ряд группы G

$$G \geq S = S_0 \geq S_1 \geq S_2 \geq \cdots \geq 1.$$

Рассмотрим уплотнение этого ряда

$$G \geq S = S_0 \geq T_0 \geq S_1 \geq T_1 \geq S_2 \geq T_2 \geq \cdots \geq 1,$$

где T_i/S_{i+1} — конечная часть группы S_i/S_{i+1}. Построенное уплотнение удовлетворяет всем требованиям леммы 4.

Лемма 5. *Пусть G — почти полициклическая группа. И пусть $H = (h)$ — бесконечная циклическая подгруппа группы G. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий подгруппу H на подгруппу порядка ml.*

Доказательство. По лемме 4 в группе G существует нормальный ряд

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_r = 1,$$

каждый фактор которого является либо конечной группой, либо конечно порожденной абелевой группой без кручения. Так как $H \cap G_0 = H$ и $H \cap G_r = 1$, то найдется i, для которого $H \cap G_i \neq 1$ и $H \cap G_{i+1} = 1$. Введем следующие обозначения: $F = G/G_{i+1}$, $A = G_i/G_{i+1}$, $K = HG_{i+1}/G_{i+1}$. Так как $H \cap G_{i+1} = 1$, то K — бесконечная циклическая подгруппа группы F. А так как $H \cap G_i \neq 1$, то $K \cap A \neq 1$, и поэтому $K \cap A = K^m$ для подходящего $m > 0$. Таким образом, K^m — бесконечная циклическая подгруппа группы A. Следовательно, фактор $A = G_i/G_{i+1}$ исходного ряда бесконечен, и поэтому A — конечно порожденная абелева группа без кручения. Отсюда по лемме 3 следует, что для любого целого положительного числа l в группе A существует степенная подгруппа L конечного индекса такая, что $K^m \cap L = K^{ml}$. Так как A нормальна в F и L — степенная подгруппа в A, то L нормальна в F. Кроме того, $K \cap L = K \cap A \cap L = K^m \cap L = K^{ml}$. Поэтому порядок подгруппы KL/L группы F/L равен ml. Отсюда и из того, что почти полициклическая группа F/L финитно аппроксимируема [2], следует, что существует гомоморфизм ϕ группы F/L на конечную группу V такой, что порядок подгруппы $(KL/L)\phi$ равен ml. Обозначим через ρ и σ естественные гомоморфизмы $G \to F$ и $F \to F/L$. Тогда $\rho\sigma\phi$ — гомоморфизм группы G на конечную группу V, переводящий подгруппу H на подгруппу $H\rho\sigma\phi = K\sigma\phi = (KL/L)\phi$ порядка ml. Этот гомоморфизм является искомым.

Лемма 6. *Пусть H — бесконечная циклическая подгруппа группы G. И пусть существует гомоморфизм φ группы G на почти полициклическую группу, инъективный на H. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе G существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

Доказательство. Так как φ инъективен на подгруппе H, то $H\varphi$ — бесконечная циклическая подгруппа почти полициклической группы $G\varphi$. По лемме 5 существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм τ группы $G\varphi$ на конечную группу, переводящий подгруппу $H\varphi$ на подгруппу $H\varphi\tau$ порядка ml. Тогда ядро W гомоморфизма $\varphi\tau$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G, и $H \cap W = H^{ml}$.

Лемма 7. *В произвольной почти полициклической группе все подгруппы финитно отделимы.*

Это утверждение хорошо известно (см., напр., [5, п. 1.3.10]).

Лемма 8. *Пусть $H = (h)$ — циклическая подгруппа финитно аппроксимируемой группы G. И пусть существует гомоморфизм φ группы G на почти полициклическую группу, инъективный на H. Тогда подгруппа H финитно отделима в группе G.*

Доказательство. Так как в финитно аппроксимируемой группе любая конечная подгруппа финитно отделима, то мы можем предполагать далее, что подгруппа H бесконечна. Обозначим через D ядро гомоморфизма φ. Тогда G/D — почти полициклическая группа и порядок ее элемента hD бесконечен. Обозначим через Δ множество пересечений подгруппы D со всеми нормальными подгруппами конечного индекса группы G. Так как группа G финитно аппроксимируема, то пересечение всех ее нормальных подгрупп конечного индекса совпадает с единичной подгруппой. Поэтому $\bigcap\limits_{N\in\Delta} N = 1$. Если $N \in \Delta$, то группа G/N вложима в прямое произведение группы G/D и некоторой конечной группы. Поэтому для любой подгруппы N из Δ группа G/N является почти полициклической. Очевидно также что для любой подгруппы N из Δ порядок элемента hN группы G/N бесконечен. Заметим еще, что пересечение любых двух подгрупп из Δ само принадлежит множеству Δ.

Пусть $x \in G \setminus H$. Мы утверждаем, что существует нормальная подгруппа N_x группы G такая, что $N_x \in \Delta$ и $x \notin HN_x$. Действительно, предположим противное. Тогда для каждой подгруппы $N \in \Delta$ существует целое число n такое, что $xN = h^nN$. Пусть $M \in \Delta$. Тогда $xM = h^mM$ для некоторого целого m. Так как $x \neq h^m$ и $\bigcap\limits_{N\in\Delta} N = 1$, то существует подгруппа $L \in \Delta$ такая, что $xL \neq h^mL$. Так как подгруппа $S = M \cap L$ принадлежит множеству Δ, то существует целое s такое, что $xS = h^sS$. Поэтому $xM = h^sM$, и следовательно $h^mM =$

$h^s M$. Так как порядок элемента hM бесконечен, то $m = s$. Таким образом, $xS = h^s S = h^m S$. Это противоречит тому, что $xL \neq h^m L$ и $S \subseteq L$.

Таким образом, существует подгруппа $N_x \in \Delta$ такая, что $x \notin HN_x$, то есть $x\varepsilon \notin H\varepsilon$, где ε — естественный гомоморфизм группы G на группу G/N_x. Так как G/N_x — почти полициклическая группа, то по лемме 7 в ней все подгруппы финитно отделимы. Поэтому существует гомоморфизм ϕ группы G/N_x на конечную группу такой, что $x\varepsilon\phi \notin H\varepsilon\phi$. Таким образом, подгруппа H группы G финитно отделима.

Лемма 9. *Произвольная свободная группа аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.*

Доказательство. По упомянутой выше теореме Магнуса — Витта [9, с. 127–128] пересечение всех членов нижнего центрального ряда свободной группы совпадает с единичной подгруппой, а факторы этого ряда являются свободными абелевыми группами. Поэтому свободные группы аппроксимируемы нильпотентными группами без кручения. Кроме того, свободные группы аппроксимируемы конечно порожденными свободными группами. Из последних двух обстоятельств следует, что любая свободная группа аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.

Лемма 10. *Пусть группа G почти свободна. И пусть $H = (h)$ — циклическая подгруппа группы G. Тогда существует гомоморфизм группы G на почти полициклическую группу, инъективный на H.*

Доказательство. Если подгруппа H конечна, то из очевидной финитной аппроксимируемости группы G следует, что существует гомоморфизм группы G на конечную группу, инъективный на H. Этот гомоморфизм будет искомым, так как конечная группа является почти полициклической.

Будем теперь предполагать, что H — бесконечная циклическая подгруппа. Так как группа G почти свободна, то в ней существует свободная подгруппа F конечного индекса. Без потери общности можно считать, что подгруппа F нормальна в группе G. Обозначим через m целое положительное число такое, что $h^m \in F$. Так как h^m — неединичный элемент свободной группы F, то по лемме 9 найдется нормальная подгруппа M группы F такая, что F/M — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения и $h^m \notin M$. Тогда порядок элемента h^m по модулю подгруппы M бесконечен. Поэтому $H \cap M = 1$. Так как M — нормальная подгруппа группы F и F — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то число всех подгрупп группы G сопряженных с M конечно, и любая такая подгруппа $x^{-1}Mx$ нормальна в F, причем $F/x^{-1}Mx \cong F/M$. Поэтому если теперь обозначить через N пересечение всех подгрупп группы G сопряженных с M, то N нормальна в G, и группа F/N вложима в прямое произведение конечного числа групп $F/x^{-1}Mx \cong F/M$. Отсюда и из того, что F/M — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, следует, что и группа F/N обладает тем же свойством. В частности, группа F/N является полициклической (см., напр., [9, с. 150]). Поэтому G/N — почти полициклическая группа. А так как $H \cap N = 1$, то естественный гомоморфизм $G \to G/N$ инъективен на H.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Докажем сначала теорему 1. Пусть P — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Предположим, что существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, инъективные на подгруппах H и K соответственно. Покажем, что группа P финитно аппроксимируема. Если подгруппы H и K конечны, то группа P финитно аппроксимируема в силу отмеченного выше результата Г. Баумслага [3]. Предположим теперь, что H и K бесконечны. По лемме 8 подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно, а по лемме 6 существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Поэтому в силу леммы 2 группа P финитно аппроксимируема.

Докажем теперь теорему 2. Пусть P — свободное произведение почти свободных групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Очевидно, что группы A и B финитно аппроксимируемы. По лемме 10 существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, которые инъективны на H и K. Поэтому в силу теоремы 1 группа P финитно аппроксимируема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.

2. Hirsh K. A. On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.

3. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.

4. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Математические заметки. 2013. Т. 93, вып. 4. С. 483—491.

5. Lennox J., Robinson D. The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.

6. Dyer J. On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 133, № 1. P. 131—143.

7. Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Математические заметки. 1998. Т. 64, вып. 1. С. 3—8.

8. Kim G., Tang C. Y. On generalized free products of residually finite p-groups // J. of Algebra. 1998. Vol. 201. P. 317—327.

9. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

10. Шмелькин А. Л. О нижнем центральном ряде свободного произведения групп // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 1. Р. 129—137.

Ивановский государственный университет
Поступило 18.09.2013