Математические заметки

Том 93 выпуск 4 апрель 2013

УДК 512.543

О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами

Д. Н. Азаров

Получено необходимое и достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения двух финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами. Это обобщает известную теорему Д. Дайер, утверждающую, что свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm8971

1. Введение. Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

Пусть A и B — произвольные группы, H и K – подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B;\, H = K,\, \varphi)$$

– свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная аппроксимируемость групп A и B. Поэтому далее будем предполагать, что группы A и B финитно аппроксимируемы. Баумслагом [1] доказана финитная аппроксимируемость группы G при дополнительном ограничении, состоящем в том, что подгруппы H и K конечны. Другим естественным ограничением является цикличность подгрупп H и K. Однако это ограничение, как показывает приведенный ниже пример, уже не гарантирует финитную аппроксимируемость группы G.

Баумслаг [1] доказал, что свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическими объединенными подгрупппами является финитно аппроксимируемой группой. Дайер [2] обобщила этот результат следующим образом.

Теорема 1. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа G обладает каким-либо свойством *почти*, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой минимаксной группы. Напомним, что группа называется *минимаксной*, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности. Хорошо известно, что разрешимая группа удовлетворяет условию максимальности (минимальности) тогда и только тогда, когда она является полициклической группой (конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Поэтому разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Более общим требованием является существование в данной группе субнормального ряда, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Следуя Робинсону (см., например, [3; п. 5.1.6]), будем называть такие группы *разрешимыми группами с конечными абелевыми тотальными рангами* (сокращенно FATR-*группами*). Здесь будет доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G – свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B содержат разрешимые* FATR-*подгруппы конечных индексов, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно. В частности, если A и B – почти разрешимые минимаксные группы, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Напомним, что подгруппа H группы A называется *финитно отделимой*, если для каждого элемента a группы A, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы A на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Хорошо известно, что почти полициклические группы финитно аппроксимируемы и в них все подгруппы финитно отделимы (см., например, [3; п. 1.3.10]). Поэтому теорема 1, доказанная Дайер, является частным случаем теоремы 2.

Заметим, что даже среди конечно порожденных групп существуют примеры групп A и B, к которым применима теорема 2, но не применима теорема 1. Иными словами, существуют конечно порожденные финитно аппроксимируемые разрешимые минимаксные группы, не являющиеся полициклическими. Соответствующим примером может служить группа

$$F = (a, b;\ b^{-1}ab = a^2).$$

Эта группа принадлежит хорошо известному классу групп Баумслага–Солитэра и является финитно аппроксимируемой [4]. Очевидно также, что F – разрешимая минимаксная группа, не являющаяся полициклической. Заметим еще, что циклическая подгруппа группы F, порожденная элементом a, не является финитно отделимой. Поэтому свободное произведение двух конечно порожденных финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами не обязано быть финитно аппроксимируемой группой.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть N – нильпотентная* FATR-*группа без кручения, H – неединичная циклическая подгруппа группы N. И пусть подгруппа H финитно отделима в группе N. Тогда для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $l = p^k$ – степень простого числа p. Обозначим через h порождающий элемент подгруппы H, а через h_1 – элемент $h^{p^{k-1}}$. Покажем, что существует целое положительное число s такое, что уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N. Допустим противное, т.е. что для любого целого положительного числа s уравнение $x^{p^s} = h^{p^{k-1}}$ разрешимо в группе N. Отсюда и из того, что в нильпотентной группе без кручения извлечение корня однозначно, следует, что для каждого целого положительного числа t в группе N существует элемент x_t такой, что ${x_t}^{p^t} = h$. Тогда

$$x_{t+1}^{p^{t+1}} = h = x_t^{p^t}.$$

Отсюда и из однозначности извлечения корня в группе N следует, что $x_{t+1}^p = x_t$. Поэтому подгруппа X группы N, порожденная всеми элементами x_t, изоморфна группе p-ичных дробей, а фактор-группа X/H является квазициклической. Но это невозможно, так как в силу финитной отделимости подгруппы H в группе N фактор-группа X/H должна быть финитно аппроксимируемой.

Зафиксируем теперь число s, для которого уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N, и рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^{sc}}$, где c – ступень нильпотентности группы N. По лемме 2 из [5] из любого элемента v подгруппы V в группе N извлекается корень степени p^s. Отсюда и из того, что уравнение $x^{p^s} = h_1$ неразрешимо в группе N, следует, что $h_1 \notin V$.

Очевидно, что фактор-группа N/V является p-группой. Покажем, что она конечна. По условию группа N является разрешимой FATR-группой. Ее фактор-группы могут уже не обладать этим свойством, но они наследуют от группы N свойство поли(локальной) цикличности. Поэтому в группе N/V существует субнормальный ряд $\mathscr{R}$ с локально циклическими факторами. Теперь для доказательства конечности группы N/V остается доказать, что все факторы ряда $\mathscr{R}$ конечны. Каждый такой фактор является абелевой p-группой, порядки элементов которой ограничены числом p^s, и поэтому в силу теоремы Прюфера все факторы ряда $\mathscr{R}$ раскладываются в прямое произведение циклических p-групп. Отсюда и из локальной цикличности факторов ряда $\mathscr{R}$ следует, что все эти факторы являются циклическими p-группами.

Таким образом, N/V – конечная p-группа. Из элементарных свойств конечных p-групп следует, что существует ряд

$$N/V = N_1/V \geqslant N_2/V \geqslant \dots \geqslant N_r/V = V/V,$$

где $N_{i+1}/V = (N_i/V)^p$, $i = 1, \dots, r-1$. Так как для всех $i = 2, \dots, r$ подгруппа N_i/V характеристична в N_{i-1}/V, то N_i/V характеристична в N/V. Отсюда и из того, что V характеристична в N, следует, что N_i характеристична в N для всех $i = 1, \dots, r$. Так как

$$N_i/N_{i+1} \cong (N_i/V)/(N_{i+1}/V) = (N_i/V)/(N_i/V)^p,$$

то N_i/N_{i+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$. Поскольку

$$N = N_1 \geqslant N_2 \geqslant \dots \geqslant N_r = V$$

и $h_1 \notin V$, то найдется число j такое, что $h_1 \in N_j$ и $h_1 \notin N_{j+1}$. Поэтому из того, что группа N_j/N_{j+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$, следует, что $|h_1 N_{j+1}| = p$. Отсюда и из того, что $h_1 = h^{p^{k-1}}$ следует, что $|hN_{j+1}| = p^k$. Поэтому $H \cap N_{j+1} = H^{p^k}$. Кроме того, N_{j+1} характеристична в N и имеет в N конечный индекс (так как содержит подгруппу V, имеющую в N конечный индекс). Таким образом, в качестве искомой подгруппы L мы можем взять подгруппу N_{j+1}.

Рассмотрим теперь общий случай, когда разложение числа l на простые множители имеет вид

$$l = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}.$$

В силу рассмотренного выше частного случая для каждого $i = 1, \dots, n$ в группе N существует характеристическая подгруппа L_i конечного индекса такая, что выполнено $H \cap L_i = H^{p_i^{k_i}}$. Тогда подгруппа

$$L = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$$

является характеристической подгруппой конечного индекса группы L, и, значит, $H \cap L = H^l$. Лемма доказана.

Напомним, что *свободной абелевой группой конечного ранга* называется прямое произведение конечного числа бесконечных циклических групп. К классу свободных абелевых групп конечного ранга мы причисляем еще и единичную группу.

Лемма 2. *Пусть группа P финитно аппроксимируема и содержит разрешимую* FATR*-подгруппу конечного индекса. Тогда в группе P существует нормальный ряд $1 \leqslant N \leqslant A \leqslant P$, где N – нильпотентная группа без кручения, A/N – свободная абелева группа конечного ранга, P/A – конечная группа.*

Доказательство. Для произвольной группы X через $\operatorname{Fitt} X$ будем обозначать подгруппу Фиттинга группы X, а через $\tau(X)$ – наибольшую нормальную периодическую подгруппу группы X. Хорошо известная теорема Грюнберга–Мальцева (см., например, [3; п. 5.2.2]) утверждает, что в разрешимой FATR–группе X подгруппа

$\operatorname{Fitt} X$ нильпотентна, а фактор-группа $X/\operatorname{Fitt} X$ почти абелева. Важным дополнением к этому результату является следующая теорема Робинсона (см., например, [3; п. 5.2.3]).

Пусть X – разрешимая группа, обладающая субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклической или периодической группой. Если наибольшая нормальная периодическая подгруппа $\tau(X)$ группы X конечна, то фактор-группа $X/\operatorname{Fitt} X$ является полициклической и почти абелевой.

Этот результат Робинсона может быть применен к произвольной разрешимой FATR-группе, поскольку любая такая группа, очевидно, обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклической или периодической группой.

По условию в группе P существует разрешимая FATR-подгруппа S конечного индекса. Без потери общности можно считать, что S нормальна в P. В силу отмеченного выше результата Грюнберга–Мальцева подгруппа $F=\operatorname{Fitt} S$ нильпотентна, а фактор-группа S/F почти абелева. Очевидно, что в разрешимой FATR-группе любая периодическая подгруппа обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Поэтому $\tau(S)$ – черниковская группа, т.е. конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп. С другой стороны, $\tau(S)$ не может содержать квазициклических подгрупп, так как группа P финитно аппроксимируема. Следовательно, $\tau(S)$ конечна. Поэтому в силу отмеченного выше результата Робинсона S/F – полициклическая группа.

Поскольку $\tau(S)$ – конечная группа, то ее подгруппа $\tau(F)$ также конечна. Обозначим через n порядок группы $\tau(F)$, а через c – ступень нильпотентности группы F. Рассмотрим степенную подгруппу

$$N=F^{n^c}.$$

Покажем, что N – группа без кручения. Пусть a – элемент конечного порядка группы N. По лемме 2 из [5] существует элемент b из F такой, что $a=b^n$. Очевидно, что b – элемент конечного порядка группы F. Так как группа F нильпотентна, то множество всех элементов конечного порядка группы F является подгруппой и, очевидно, совпадает с $\tau(F)$. Из последних двух обстоятельств следует, что $b\in\tau(F)$. Но поскольку порядок группы $\tau(F)$ равен n, то $b^n=1$, т.е. $a=1$. Таким образом, N – нильпотентная группа без кручения. Как и в доказательстве леммы 1, используя поли(локальную) цикличность группы F, легко видеть, что F/N – конечная группа.

Так как N характеристична в F и F характеристична в S, то N характеристична в S. Отсюда и из того, что S нормальна в P, следует, что N нормальна в P. Так как фактор-группы P/S, S/F и F/N являются соответственно конечной, полициклической и конечной нильпотентной группами, то P/N – почти полициклическая группа, и поэтому в силу теоремы Гирша [6] группа P/N финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что F/N – конечная подгруппа группы P/N, следует, что в группе P/N существует нормальная подгруппа L/N конечного индекса, тривиально пересекающая F/N. Поэтому L/N вложима в группу $(P/N)/(F/N)\cong P/F$, причем P/F почти абелева, так как содержит почти абелеву подгруппу S/F конечного индекса. Таким образом, группа L/N почти абелева. Отсюда и из того, что L/N имеет конечный индекс в P/N, следует, что P/N почти абелева. Обозначим через X/N абелеву подгруппу конечного индекса группы P/N. Из почти полицикличности группы P/N следует, что X/N – конечно порожденная абелева группа. Поэтому X/N содержит конечно порожденную свободную абелеву подгруппу A/N конечного индекса. Очевидно, что A/N – подгруппа конечного индекса группы P/N, и без потери общности можно считать, что A/N нормальна в P/N. Тогда A – нормальная подгруппа конечного индекса группы P.

Мы получаем, таким образом, нормальный ряд $1 \leqslant N \leqslant A \leqslant P$, где N – нильпотентная группа без кручения, A/N – свободная абелева группа конечного ранга, P/A – конечная группа. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа P финитно аппроксимируема и содержит разрешимую* FATR*-подгруппу конечного индекса. И пусть H – финитно отделимая бесконечная циклическая подгруппа группы P. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе P существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что*

$$H \cap W = H^{ml}.$$

Доказательство. По лемме 2 в группе P существует нормальный ряд $1 \leqslant N \leqslant A \leqslant P$, где N – нильпотентная группа без кручения, A/N – свободная абелева группа конечного ранга, P/A – конечная группа. Обозначим через m целое положительное число, для которого $H^m = H \cap A$.

Рассмотрим сначала случай, когда $H^m \subseteq N$. Очевидно, что в этом случае $H^m = H \cap N$. Поэтому из финитной отделимости подгруппы H в группе P следует финитная отделимость подгруппы H^m в группе N. Кроме того, N – нильпотентная FATR-группа без кручения. Из последних двух обстоятельств по лемме 1 следует, что для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что

$$H^m \cap L = (H^m)^l = H^{ml}.$$

С другой стороны,

$$H^m \cap L = H \cap A \cap L = H \cap L.$$

Таким образом, $H \cap L = H^{ml}$. Поскольку L характеристична в N и N нормальна в P, то L нормальна в P. Пусть $\sigma\colon P \to P/L$ – естественный гомоморфизм. Тогда равенство $H \cap L = H^{ml}$ примет вид $H \cap \operatorname{Ker}\sigma = H^{ml}$. Так как P/A – конечная группа, A/N – свободная абелева группа конечного ранга, и N/L – конечная нильпотентная группа, то группа P/L является почти полициклической. Поэтому P/L финитно аппроксимируема. Таким образом, $H\sigma$ – конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы P/L, и поэтому существует гомоморфизм ψ группы P/L на конечную группу инъективный на $H\sigma$. Тогда

$$\operatorname{Ker}\sigma\psi \cap H = \operatorname{Ker}\sigma \cap H = H^{ml}.$$

Поэтому в качестве искомой подгруппы W можно взять подгруппу $\operatorname{Ker}\sigma\psi$.

Рассмотрим теперь случай, когда $H^m \not\subseteq N$. Пусть $\varepsilon\colon P \to P/N$ – естественный гомоморфизм. Так как $H^m \subseteq A$, то $H^m\varepsilon$ – подгруппа свободной абелевой группы $A\varepsilon = A/N$. Отсюда и из того, что $H^m \not\subseteq N$, следует, что $H^m\varepsilon$ – бесконечная циклическая подгруппа группы $A\varepsilon$. Очевидно, что $H^m\varepsilon \subseteq H\varepsilon \cap A\varepsilon$. Имеет место и обратное включение. Действительно, пусть $x \in H\varepsilon \cap A\varepsilon$, т.е. $x = h\varepsilon = a\varepsilon$, где $h \in H, a \in A$. Тогда $h^{-1}a \in N$. Отсюда и из того, что $N \subseteq A$, вытекает, что $h \in A$. Следовательно, $h \in H \cap A = H^m$, и поэтому $x \in H^m\varepsilon$. Таким образом,

$$H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon.$$

Так как $H^m\varepsilon$ – бесконечная циклическая подгруппа конечно порожденной свободной абелевой группы $A\varepsilon$, то по лемме 1 для любого целого положительного числа l в группе $A\varepsilon$ существует характеристическая подгруппа X конечного индекса такая, что

$$H^m\varepsilon \cap X = (H^m\varepsilon)^l = (H\varepsilon)^{ml}.$$

Отсюда и из того, что $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$, получаем

$$H\varepsilon \cap X = H\varepsilon \cap A\varepsilon \cap X = H^m\varepsilon \cap X = (H\varepsilon)^{ml}.$$

Так как X – характеристическая подгруппа конечного индекса группы $A\varepsilon$ и $A\varepsilon$ – нормальная подгруппа конечного индекса группы $P\varepsilon$, то X – нормальная подгруппа группы $P\varepsilon$, и фактор-группа $P\varepsilon/X$ конечна. Пусть $\rho\colon P\varepsilon \to P\varepsilon/X$ – естественный гомоморфизм. Так как ядро X гомоморфизма ρ высекает в бесконечной циклической подгруппе $H\varepsilon$ подгруппу $(H\varepsilon)^{ml}$, то порядок группы $H\varepsilon\rho$ равен ml. Поэтому если через W обозначить ядро гомоморфизма $\varepsilon\rho$, то $H \cap W = H^{ml}$. Так как $P/W \cong P\rho\varepsilon = P\varepsilon/X$ – конечная группа, то W – нормальная подгруппа конечного индекса группы P. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ – семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно,*

$$\Lambda = \{(i,j) \in I \times J : (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\}.$$

Для каждого $\lambda = (i,j)$ из Λ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K, \tag{1}$$

то группа G финитно аппроксимируема. Если группа G финитно аппроксимируема, группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $K \neq B$, то выполняются условия (1) и, в частности, подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Доказательство. Первое утверждение леммы 4 хорошо известно как фильтрационная теорема Баумслага и доказано в [1]. Второе утверждение леммы представляет собой обращение фильтрационной теоремы Баумслага, и оно доказано в [7].

Лемма 5. *Пусть A и B – финитно аппроксимируемые группы, H и K – бесконечные циклические финитно отделимые подгруппы групп A и B соответственно; G – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными* *относительно изоморфизма φ. И пусть существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что*

$$H \cap M = H^{ml} \qquad \text{и} \qquad K \cap N = K^{nl}.$$

Тогда группа G финитно аппроксимируема.

Доказательство. По условию в группе A существует нормальная подгруппа U конечного индекса такая, что $H \cap U = H^{mn}$. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ – семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A. Так как группа A финитно аппроксимируема и ее подгруппа H финитно отделима, то

$$\bigcap_{i\in I} A_i = 1, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i H = H. \tag{2}$$

Пусть $U_i = A_i \cap U$ для каждого $i \in I$. Тогда U_i – нормальная подгруппа конечного индекса группы A, и в силу (2)

$$\bigcap_{i\in I} U_i = 1, \qquad \bigcap_{i\in I} U_i H = H. \tag{3}$$

Так как $H \cap U = H^{mn}$, то

$$H \cap U_i = H^{mn} \cap A_i = H^{mnl_i}$$

для подходящего целого положительного числа l_i. Так как число mnl_i делится на n, то по условию в группе B существует нормальная подгруппа V_i конечного индекса такая, что $K \cap V_i = K^{mnl_i}$. Тогда

$$(H \cap U_i)\varphi = H^{mnl_i}\varphi = K^{mnl_i} = K \cap V_i.$$

Таким образом, подгруппа U_i принадлежит семейству $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ для каждого $i \in I$. Отсюда и из (3) следует, что

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H.$$

Аналогично проверяется, что

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K.$$

Поэтому в силу леммы 4 группа G финитно аппроксимируема.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть G – свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. И пусть группы A и B содержат разрешимые FATR-подгруппы конечных индексов. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Так как группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, то *необходимость* в доказываемом утверждении обеспечивается вторым утверждением леммы 4.

Докажем теперь *достаточность*. Пусть подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Так как свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой, то мы можем считать, что подгруппы H и K бесконечны. Поскольку группы A и B финитно аппроксимируемы и содержат разрешимые FATR-подгруппы конечных индексов, а бесконечные циклические подгруппы H и K финитно отделимы в A и B соответственно, то в силу леммы 3 существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что

$$H \cap M = H^{ml} \qquad \text{и} \qquad K \cap N = K^{nl}.$$

Мы видим, таким образом, что выполняются все условия леммы 5, в силу которой группа G финитно аппроксимируема. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. Baumslag, “On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 193–209.

[2] J. L. Dyer, “On the residual finiteness of generalized free products”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133** (1968), 131–143.

[3] J. Lennox, D. J. Robinson, *The Theory of Infinite Soluble Groups*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford, 2004.

[4] G. Baumslag, D. Solitar, “Some two-generator one-relator non-Hopfian groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 199–201.

[5] А. И. Мальцев, “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та*, **18**:5 (1958), 49–60.

[6] K. A. Hirsch, “On infinite soluble groups (IV)”, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 81–85.

[7] M. Shirvani, “A convers to a residual finiteness theorem of G. Baumslag”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:3 (1988), 703–706.

Д. Н. Азаров
Ивановский государственный университет
E-mail: azarovdn@mail.ru

Поступило
17.01.2011