После некоторого перерыва, возникшего ввиду отсутствия подходящих кандидатур, на кафедре возобновилась подготовка аспирантов. К работе по научному руководству аспирантами приступил и весьма преуспел в этом Д. Н. Азаров. Его аспирант А. В. Розов в декабре 2013 г. блестяще защитил кандидатскую диссертацию. Причем эта защита состоялась всего через два месяца после окончания аспирантуры — событие для нашей кафедры беспрецедентное.

Д. Н. Азаров, несомненно, является ведущим научным работником нашей кафедры. В настоящее время, будучи в должности старшего научного сотрудника, он опубликовал ряд статей в важнейших научных журналах и занимается подготовкой докторской диссертации. При этом успевает руководить научно-исследовательской работой студентов и аспирантов.

Таким образом, имеются достаточные основания утверждать, что научно-исследовательская деятельность в области комбинаторной теории групп на нашем факультете будет успешно продолжаться.

В 70-х гг. прошлого века, желая отразить все направления выполняемой научно-исследовательской работы, мы переименовали кафедру высшей алгебры, назвав ее кафедрой алгебры и математической логики. Со временем по разным причинам вторая часть названия стала отражать лишь существование прикрепленной к кафедре соответствующей учебной дисциплины. Теперь, с приходом на кафедру Б. Я. Солона, у нас, несомненно, возобновится научно-исследовательская работа по математической логике и теории алгоритмов.

УДК 512.543

Д. Н. Азаров

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ *p*-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГРУПП И СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Сделан обзор основных результатов о почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых классов групп и свободных конструкций.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенной подгруппой, HNN-расширение, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

A survey of the main results on the virtual residual p-finiteness of certain classes of groups and free constructions.

Key words: free product with amalgamated subgroups, HNN-extension, virtually residually a finite p-group.

Пусть K — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой группами из класса K (или, короче, K-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы

G на некоторую группу из класса K, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом K, если она содержит K-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Обозначим через F и F_p соответственно класс всех конечных групп и класс всех конечных p-групп. Тогда понятие F-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости, которое введено А. И. Мальцевым в 1940 г. в статье «О представлении бесконечных групп матрицами» [13]. Термин «аппроксимируемость» появился в другой статье Мальцева в 1949 г. [14]. На английском языке он введен Ф. Холлом в 1955 г.

А. И. Мальцев [13] доказал F-аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Следствиями этого результата являются теорема Гирша о F-аппроксимируемости полициклических групп [28] и хорошо известная теорема Ивасавы о F_p-аппроксимируемости свободных групп. Мальцевым [11] также доказана финитная аппроксимируемость для расщепляемого расширения конечно порожденной F-аппроксимируемой группы с помощью F-аппроксимируемой группы.

Д. М. Смирнов и Г. Баумслаг независимо друг от друга доказали, что группа автоморфизмов конечно порожденной F-аппроксимируемой группы сама является F-аппроксимируемой [20, 23].

Все перечисленные результаты и большинство других известных результатов о финитной аппроксимируемости не могут быть распространены на F_p-аппроксимируемость. Например, полициклическая группа финитно аппроксимируема, но она не обязана быть F_p-аппроксимируемой, даже если в ней отсутствует кручение. Тем не менее любая полициклическая группа почти F_p-аппроксимируема для каждого простого p. Этот, ставший уже классическим, результат был доказан А. Л. Шмелькиным [21].

В дальнейшем результат Шмелькина был в том или ином виде распространен на другие классы групп, но при этом выяснилось, что свойство почти аппроксимируемости конечными p-группами в ряде случаев выполняется не для всех p, а для всех достаточно больших p.

Так, Г. А. Носков доказал, что свойством почти F_p-аппроксимируемости для всех достаточно больших p обладают все конечно порожденные группы, являющиеся расширениями абелевых групп с помощью нильпотентных [17]. Д. Робинсоном было доказано аналогичное утверждение для финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп [30, sect. 5.3.9]. Наконец, знаменитая теорема В. П. Платонова [18] утверждает, что конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики почти F_p-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Отсюда следует, что любая такая группа почти вся без кручения (лемма Сельберга).

Вообще, надо заметить, что свойство линейности и свойство почти F_p-аппроксимируемости тесно связаны между собой. А. Лубоцкий [31] получил характеризацию конечно порожденных линейных групп над полями нулевой характеристики в терминах, близких к почти F_p-аппроксимируемости. Мы не приводим здесь формулировку этого результата, отметим только, что из него вытекает результат Платонова.

Одним из обобщений понятия конечно порожденной группы является понятие группы конечного общего ранга [12]. Группа G имеет конечный общий ранг, если существует число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

Результаты Мальцева и Смирнова — Баумслага о группах автоморфизмов и расщепляемых расширениях легко обобщаются с конечно порожденных групп на группы конечного общего ранга. Однако, как уже отмечалось, эти результаты нельзя распространить с финитной аппроксимируемости на F_p-аппроксимируемость. Тем не менее удается перенести эти результаты на почти F_p-аппроксимируемость. Иными словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если группа G конечного общего ранга F-аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема), то финитно аппроксимируемыми (почти F_p-аппроксимируемыми) являются группа автоморфизмов группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью финитно аппроксимируемой (почти F_p-аппроксимируемой) группы* [2].

Следствием этой теоремы являются упомянутые выше теоремы Мальцева, Смирнова — Баумслага, а также нетривиальный результат А. Лубоцкого [32] о почти F_p-аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной почти F_p-аппроксимируемой группы. Недавно этот результат был заново доказан Л. Паризом [35] для частного случая — группы автоморфизмов конечно порожденной свободной группы. Заметим еще, что доказательство, приведенное Лубоцким, использует нетривиальные топологические методы, в то время как доказательство теоремы 1, опубликованное в [2], элементарно.

Наряду с группами конечного общего ранга рассматриваются группы конечного специального ранга [12]. Их еще называют группами конечного ранга Прюфера, а чаще просто группами конечного ранга. Группа G имеет конечный ранг, если существует число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это требование является более жестким, чем конечность общего ранга.

А. Лубоцкий и А. Манн [33] доказали, что F-аппроксимируемая группа конечного ранга почти локально разрешима. В связи с этим нетривиальным результатом отметим следующий результат автора данной статьи.

Теорема 2. *Если группа конечного ранга F_p-аппроксимируема для всех простых p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна* [9].

Ранее такая теорема была доказана К. Сексенбаевым [19] для полициклических групп. Заметим, что любая полициклическая группа имеет конечный ранг.

Ряд аппроксимационных свойств полициклических групп удается в том или ином виде распространить на разрешимые группы конечного ранга. Так, например, Д. Робинсон получил следующее нетривиальное обобщение теоремы Гирша о финитной аппроксимируемости полициклических групп на случай разрешимых групп конечного ранга: *разрешимая группа конечного ранга F-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована* [30, sect. 5.3.2] . Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Группа называется полной, если из любого ее элемента в ней можно извлечь корень любой натуральной степени. Заметим, что любая F-аппроксимируемая группа редуцирована.

Мы не располагаем p-аналогом теоремы Робинсона, но для свойства почти F_p-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга удалось доказать следующий критерий.

Теорема 3. *Разрешимая группа конечного ранга является почти F_p-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее периодический радикал конечен и она не содержит подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей* [4].

Отсюда в качестве следствия вытекает следующий результат Д. Робинсона: *если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти F_p-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p* [30, sect. 5.3.9].

В самом деле, напомним, что минимаксные группы — это группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет либо условию минимальности, либо условию максимальности для подгрупп. Разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие рядом, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический. Если мы теперь удалим все простые числа, соответствующие квазициклическим факторам, то для каждого оставшегося простого p в данной группе нет подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей. Если вдобавок предположить, что разрешимая минимаксная группа редуцирована, то ее периодический радикал будет конечным, и тогда в силу теоремы 3 данная группа почти F_p-аппроксимируема для указанных выше простых p.

Примером разрешимой минимаксной группы может служить группа Баумслага — Солитэра типа (1, n). Легко проверяется, что если простое число p не делит n, то группа Баумслага — Солитэра типа (1, n) не содержит подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей, и тогда по теореме 3 она почти F_p-аппроксимируема. В действительности имеет место следующий критерий, который годится для всех групп Баумслага — Солитэра (а не только для разрешимых).

Теорема 4. *Группа Баумслага — Солитэра типа (m, n) является почти F_p-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или m совпадает с ±1 и p не делит n, или n совпадает с ±1 и p не делит m, или модули чисел m и n совпадают* [3].

Напомним, что группа Баумслага — Солитэра типа (m, n) является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или m совпадает с ±1, или n совпадает с ±1, или модули чисел m и n совпадают [25, 34]. Критерий F_p-аппроксимируемости для групп Баумслага — Солитэра был найден Д. И. Молдаванским [15].

Группы Баумслага — Солитэра являются простейшими примерами HNN-расширений. Для HNN-расширений нам также удалось получить ряд результатов. Начнем с нисходящих HNN-расширений, т. е. со случая, когда одна из связанных подгрупп совпадает с базой HNN-расширения. Для финитной аппроксимируемости таких HNN-расширений Д. И. Молдаванский получил один общий фильтрационный критерий [16], с помощью которого впоследствии были доказаны более конкретные результаты, и в частности следующий.

Теорема 5. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, G(φ) — соответствующее нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы Gφ в группе G конечен и равен n. Если группа G почти F_p-аппроксимируема для некоторого простого p, не делящего n, то группа G(φ) финитно аппроксимируема и даже почти F_p-аппроксимируема* [5].

Эта теорема может быть применена, например, если база HNN-расширения является редуцированной разрешимой минимаксной группой. Действительно, любая редуцированная разрешимая минимаксная группа G почти F_p-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p и любая подгруппа группы G, изоморфная ей, имеет в ней конечный индекс. Поэтому следствием теоремы 5 является недавний результат А. Ремтулы и М. Ширвани [36] о F-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения редуцированной разрешимой минимаксной группы. Еще более частным случаем теоремы 5 является результат Д. Вайса и Т. Су о F-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения полициклической группы [29]. Доказательство Вайса и Су достаточно объемное и проводится сначала для нильпотентного случая. Доказательства Ремтулы и Ширвани тоже нетривиальны и затрагивают глубокие свойства разрешимых минимаксных групп, в этом плане авторам помогал сам Д. Робинсон. Наша теорема 5 доказывается гораздо проще, причем является значительно более общей.

А. Борисов и М. Сапир в работе [26] анонсировали свой результат о финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения конечно порожденной линейной группы. Так как по теореме Платонова конечно порожденные линейные группы над полями нулевой характеристики почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p, то теорема 5 может рассматриваться как частичное обобщение теоремы Борисова — Сапира.

В целом остается много вопросов о финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения.

В случае, когда HNN-расширение не является нисходящим, удалось получить следующий результат.

Теорема 6. *Пусть G — финитно аппроксимируемая (почти F_p-аппроксимируемая) группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. И пусть H — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами, имеющими конечные индексы в группе G. Группа H финитно аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа конечного индекса, нормальная в H* [6].

Это утверждение обобщает аналогичный результат С. Андреадакиса, Е. Раптиса, Д. Варсоса [22] о F-аппроксимируемости HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп. Заметим также, что из теорем 6 и 7 вытекают упомянутые выше критерии финитной аппроксимируемости и почти аппроксимируемости конечными p-группами для групп Баумслага — Солитэра.

Утверждение, аналогичное теореме 6, доказано нами и для обобщенных свободных произведений.

Теорема 7. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые (почти F_p-аппроксимируемые) группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. И пусть P — свободное произведение групп A и B с собственной объединенной подгруппой H, имеющей конечные индексы в группах A и B. Группа P F-аппроксимируема (почти Fp-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда в группе H существует подгруппа конечного индекса, нормальная в P* [6].

Финитная аппроксимируемость обобщенных свободных произведений исследуется при определенных ограничениях на объединенную подгруппу.

Например, в теореме 7 предполагалось, что она имеет конечные индексы в свободных множителях. Другим естественным ограничением является нормальность объединенной подгруппы в свободных множителях. Г. Баумслаг [24] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальным объединением F-аппроксимируемо. Нетривиальным обобщением этой теоремы будет следующий результат, полученный автором совместно с А. В. Розовым.

Теорема 8. *Пусть P — свободное произведение разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H и H является собственной нормальной подгруппой в A и B. Группа P финитно аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H финитно аппроксимируемы (почти F_p-аппроксимируемы).*

Это утверждение частично опубликовано в [10], оно обобщает недавний результат А. В. Розова о почти F_p-аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением для любого простого p. По поводу свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением следует заметить, что до сих пор остается открытой проблема о его линейности (Коуровская тетрадь, проблема 8.2).

Отметим еще два результата, относящихся к случаю, когда в обобщенном свободном произведении объединенная подгруппа является циклической.

Теорема 9. *Пусть P — свободное произведение F-аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Группа P F-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B* [7].

Это утверждение обобщает теорему Д. Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением [27], т. к. в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы.

Теорема 10. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H. Если группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения (конечно порожденными нильпотентными группами без кручения), то группа P финитно аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема для всех простых p).*

Это утверждение частично опубликовано в [8] и обобщает результат Г. Баумслага [24] о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. Необходимое и достаточное условие F_p-аппроксимируемости для такого свободного произведения получено в [1].

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 1. С. 3—8.
2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11—20.

3. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 116—123.
4. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 80—85.
5. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сб. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 9—19.
6. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203—1215.
7. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, вып. 4. С. 483—491.
8. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 9—19.
9. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2001. Вып. 3. С. 103—105.
10. *Азаров Д. Н., Розов А. В.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 98—103.
11. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49—60.
12. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351—352.
13. *Мальцев А. И.* О представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. № 3. С. 305—422.
14. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Вып. 25, № 3. С. 347—366.
15. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость групп Баумслага — Солитэра // Чебышевский сб. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 110—115.
16. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. С. 842—845.
17. *Носков Г. А.* Почти аппроксимируемость конечно порожденных AP-групп без кручения конечными p-группами // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 6. С. 676—684.
18. *Платонов В. П.* Некоторые проблемы для конечно порожденных групп // Докл. АН БССР. 1968. Т. 12. 492—494.
19. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, вып. 3. С. 79—83.
20. *Смирнов Д. М.* К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. С. 453—457.
21. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
22. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Residuall finiteness and hopficity of certain HNN-extensions // Arch. Math. 1986. Vol. 47. P. 1—5.
23. *Baumslag G.* Automorphism groups of residually finite groups // J. Lond. Math. Soc. 1963. Vol. 38. P. 117—118.
24. *Baumslag G*. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
25. *Baumslag G., Solitar D*. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.

26. *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // arXiv: 0309121V1 [math. GR]. 2003. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 14.01.2014).
27. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 133, № 1. P. 131—143.
28. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. Lond. Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.
29. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. Vol. 182, № 1. P. 65—78.
30. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford : Clarendon press, 2004. 342 p.
31. *Lubotzki A.* A group-theoretic characterization of lenear groups // J. of Algebra. 1988. Vol. 113. P. 207—214.
32. *Lubotzki A.* Normal automorphisms of free groups // J. of Algebra. 1980. Vol. 63. P. 494—498.
33. *Lubotzki A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1989. Vol. 106. P. 185—188.
34. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105—114.
35. *Paris L.* Residual p-properties of mapping class groups and surface groups // arXiv: GR/0703703v1. 23 Mar. 2007. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 14.01.2014).
36. *Rhemtulla A., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. of Math. 2003. Vol. 47. P. 477—484.

УДК 512.543

Д. В. Гольцов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Сделан обзор основных результатов об аппроксимируемости корневыми классами свободных произведений групп.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенной подгруппой, корневой класс групп, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость групп.

A survey of the main results on the root-class residuality of free products group.

Key words: free product with amalgamated subgroups, root-class of groups, residually $\mathcal{K}$-group.

Пусть $\mathcal{K}$ — непустой класс групп. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если она содержит некоторую $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.