Математические заметки

Том 96 выпуск 2 август 2014

УДК 512.543

О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп

Д. Н. Азаров

Пусть G – группа конечного общего ранга, φ – инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi)$ – нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее эндоморфизму φ. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Доказано, что если для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти аппроксимируема конечными π-группами, то группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема. Это обобщает ряд известных результатов, и в том числе теорему Д. Вайса и Т. Су о финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения почти полициклической группы.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9312

1. Введение. Пусть G – группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$ и определяемая множеством соотношений R. И пусть φ – инъективный эндоморфизм группы G. Тогда группа

$$G(\varphi) = (a_1, a_2, \dots, t; R, t^{-1}a_1t = a_1\varphi, t^{-1}a_2t = a_2\varphi, \dots)$$

называется *нисходящим* HNN-*расширением* группы G, соответствующим эндоморфизму φ.

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы $G(\varphi)$ является финитная аппроксимируемость группы G. С другой стороны, простые примеры показывают, что это условие не является достаточным. Один из таких примеров приведен ниже.

Молдаванский в работе [1] получил следующий фильтрационный критерий финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения.

Теорема 1. *Группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.*

Здесь под *φ-совместимой* подгруппой понимается подгруппа V группы G такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$.

В 2003 г. Вайс и Су [2] доказали следующий результат.

Теорема 2. *Нисходящее* HNN-*расширение почти полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа G обладает каким-либо свойством *почти*, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Заметим, что финитная аппроксимируемость нисходящего HNN-расширения полициклической группы является частным случаем следующего результата Баумслага и Бери, доказанного в работе [3] еще в 1976 г. (см. также [4; п. 11.2.4]). Пусть $\mathscr{K}$ – наименьший класс разрешимых групп, содержащий единичную группу и замкнутый относительно нисходящих HNN-расширений и расширений с помошью конечных разрешимых групп. Тогда любая группа из класса $\mathscr{K}$ является финитно аппроксимируемой.

Существенным обобщением теоремы 2 является следующий результат Борисова и Сапира [5].

Теорема 3. *Нисходящее* HNN-*расширение конечно порожденной линейной группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Еще одним обобщением теоремы 2 является следующий результат Ремтуллы и Ширвани [6].

Теорема 4. *Нисходящее* HNN-*расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа называется *минимаксной*, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности для подгрупп. Полициклические группы являются минимаксными и могут быть охарактеризованы как разрешимые группы с условием максимальности. Группа называется *редуцированной*, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Для разрешимых минимаксных групп условие редуцированности равносильно условию финитной аппроксимируемости (см., например, [4; п. 5.3.2]).

Здесь доказан следующий результат, обобщающий теоремы 2 и 4 и частично обобщающий теорему 3.

Теорема 5. *Пусть G – группа конечного общего ранга, φ – инъективный эндоморфизм группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n.*

Если для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти аппроксимируема конечными π-группами, то группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема.

В частности, если группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p, то группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема.

Напомним, что группа G называется *группой конечного общего ранга*, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе. Условию конечности общего ранга удовлетворяют все конечно порожденные группы, все подгруппы аддитивной группы рациональных чисел, а также все разрешимые минимаксные группы.

Шмелькин [7] доказал, что любая полициклическая группа почти аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p. Кроме того, если φ – инъективный эдоморфизм почти полициклической группы G, то индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен (см., например, [2; утверждение 3.10]). Поэтому теорема 2 является частным случаем теоремы 5.

Редуцированные разрешимые минимаксные группы почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p [4; п. 5.3.9]. Кроме того, по аналогии с упомянутым выше утверждением [2; утверждение 3.10] может быть доказано, что для любого инъективного эндоморфизма φ почти разрешимой минимаксной группы G индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен. Поэтому теорема 4 является частным случаем теоремы 5.

Заметим, что теорема 5 является частичным обобщением и для теоремы 3, поскольку конечно порожденные линейные группы над полем нулевой характеристики почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p [8; с. 389, утверждение 16.4.9].

Отметим также, что класс всех групп конечного общего ранга, почти аппроксимируемых конечными p-группами для всех достаточно больших простых p, не исчерпывается конечно порожденными линейными группами над полями нулевой характеристики и редуцированными почти разрешимыми минимаксными группами. Этому классу принадлежат, например, конечные расширения конечно порожденных свободных разрешимых групп [9].

Заметим, что HNN-расширение $G(\varphi)$ финитно аппроксимируемой группы G конечного общего ранга не обязано быть финитно аппроксимируемой группой, даже если индекс $[G : G\varphi]$ конечен. Действительно, если G – группа рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с фиксированным простым числом p, и эндоморфизм φ ставит в соответствие каждому x из G число px, то G – финитно аппроксимируемая группа ранга 1, индекс $[G : G\varphi]$ конечен и равен p, но группа $G(\varphi)$ не является финитно аппроксимируемой, поскольку содержит нетривиальные полные элементы. Таким образом, условие почти аппроксимируемости конечными π-группами, накладываемое на группу G в теореме 5, не может быть ослаблено до условия финитной аппроксимируемости.

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется теорема 1 и ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть K – конечная группа, $\operatorname{Var} K$ – многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Тогда любая группа конечного общего ранга из многообразия $\operatorname{Var} K$ является конечной.*

Доказательство. Хорошо известно, что все конечно порожденные группы из многообразия $\operatorname{Var} K$ конечны (см., например, [10; гл. 5, п. 2, упражнение 8]). Обозначим через n_r порядок свободной группы ранга r данного многообразия. Тогда порядки всех r-порожденных групп многообразия $\operatorname{Var} K$ ограничены числом n_r.

Пусть теперь G – группа конечного общего ранга из многообразия $\operatorname{Var} K$. Тогда существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество M элементов группы G содержится в некоторой r-порожденной подгруппе X группы G.

Тогда $|M| \leqslant |X| \leqslant n_r$. Следовательно G – конечная группа и ее порядок ограничен числом n_r. Лемма доказана.

Далее через π будем обозначать некоторое множество простых чисел. Целое положительное число будем называть *π-числом*, если все его простые делители принадлежат множеству π. Будем говорить, что подгруппа данной группы *имеет конечный π-индекс*, если ее индекс конечен и является π-числом.

Лемма 2. *Пусть G – группа конечного общего ранга. И пусть M – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. Тогда в группе G существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса такая, что $V \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть

$$(f_i(x_1, x_2, \dots) = 1)_{i \in I}$$

– система всех тождеств группы G/M. Обозначим через V вербальную подгруппу группы G, порожденную всеми ее элементами $f_i(h_1, h_2, \dots)$, где $i \in I$, $h_1 \in G$, $h_2 \in G, \dots$. Тогда $V \subseteq M$ и $G/V \in \operatorname{Var} G/M$. Отсюда и из того, что группа G/V имеет конечный общий ранг, а группа G/M конечна, по лемме 1 следует конечность группы G/V. Так как G/M – конечная π-группа, то в ней выполняется тождество $x^m = 1$, где m – π-число. А поскольку $G/V \in \operatorname{Var} G/M$, то и в группе G/V выполняется тождество $x^m = 1$. Поэтому G/V – конечная π-группа. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G – группа конечного общего ранга, φ – изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G аппроксимируема конечными π-группами. Тогда для любого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса, не содержащая элемент a и такая, что*

$$V\varphi = V \cap H.$$

Доказательство. Так как группа G аппроксимируема конечными π-группами, то для каждого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса, не содержащая элемент a. В силу леммы 2 в группе G существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса такая, что $V \subseteq M$. Очевидно, что элемент a не принадлежит подгруппе V. Так как подгруппа V является вербальной, то $V\varphi \subseteq V$. Очевидно также, что $V\varphi \subseteq H$. Таким образом, $V\varphi \subseteq V \cap H$. Поэтому для доказательства равенства $V\varphi = V \cap H$ нам остается проверить, что индексы подгрупп $V\varphi$ и $V \cap H$ конечны и совпадают между собой.

Так как индекс $[G : V]$ является π-числом и все простые числа из π взаимно просты с $[G : H]$, то индексы $[G : V]$ и $[G : H]$ взаимно просты. Поэтому

$$[G : V \cap H] = [G : V][G : H]. \tag{1}$$

С другой стороны, φ – изоморфизм группы G на подгруппу H и поэтому $[G : V] = [H : V\varphi]$. Отсюда и из того, что $V\varphi \subseteq H \subseteq G$, получаем

$$[G : V\varphi] = [G : H][H : V\varphi] = [G : H][G : V]. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что индексы $[G : V \cap H]$ и $[G : V\varphi]$ конечны и совпадают между собой. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G – группа конечного общего ранга, φ – изоморфизм группы G на ее подгруппу H. И пусть $\mathscr{P}$ – класс групп, замкнутый относительно подгрупп. Если группа G содержит подгруппу конечного индекса, принадлежащую классу $\mathscr{P}$, то в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, принадлежащая классу $\mathscr{P}$ и такая, что $P\varphi = P \cap H$. В частности, если группа G почти аппроксимируема конечными π-группами, то в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, аппроксимируемая конечными π-группами и такая, что*

$$P\varphi = P \cap H.$$

Доказательство. Пусть M – подгруппа группы G конечного индекса, принадлежащая классу $\mathscr{P}$. В силу леммы 2 в группе G существует вербальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \subseteq M$. Так как класс $\mathscr{P}$ замкнут относительно подгрупп, то подгруппа V принадлежит классу $\mathscr{P}$. А поскольку подгруппа V является вербальной, то $V\varphi \subseteq V$.

Для каждого целого неотрицательного числа i через V_i будем обозначать множество всех элементов x группы G таких, что $x\varphi^i \in V$. Очевидно, что V_i – нормальная подгруппа конечного индекса группы G,

$$V_{i+1}\varphi = V_i \cap H, \tag{3}$$

$$V_i \cong V_i\varphi^i \leqslant V. \tag{4}$$

Так как $V \in \mathscr{P}$ и класс $\mathscr{P}$ замкнут относительно подгрупп, то в силу (4) $V_i \in \mathscr{P}$ для произвольного i. Поскольку $V\varphi \subseteq V$, то

$$V = V_0 \leqslant V_1 \leqslant V_2 \leqslant \cdots .$$

Отсюда и из того, что V – подгруппа конечного индекса группы G, следует, что существует целое положительное число j такое, что $V_j = V_{j+1}$. Тогда при $i = j$ равенство (3) принимает вид $V_j\varphi = V_j \cap H$. Таким образом, подгруппа $P = V_j$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G – группа конечного общего ранга, φ – изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти аппроксимируема конечными π-группами. Тогда для любого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует нормальная подгруппа V конечного индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$.*

Доказательство. По лемме 4 в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, аппроксимируемая конечными π-группами и такая, что $P\varphi = P \cap H$. Очевидно, что в группе конечного общего ранга все подгруппы конечного индекса имеют конечный общий ранг. Поэтому P – группа конечного общего ранга. Покажем, что

$$[G : H] = [P : P \cap H].$$

Так как φ – изоморфизм группы G на ее подгруппу H, то $[G : P] = [H : P\varphi]$. Отсюда и из того, что $P\varphi = P \cap H$, следует, что $[G : P] = [H : P \cap H]$. Умножая это равенство на $[G : H]$, получаем

$$[G : H][G : P] = [G : H][H : P \cap H] = [G : P \cap H] = [G : P][P : P \cap H].$$

Сокращая это равенство на $[G:P]$, получаем требуемое равенство

$$[G:H]=[P:P\cap H].$$

Отсюда и из того, что все числа из π взаимно просты с числом $n=[G:H]$, следует, что все числа из π взаимно просты с $[P:P\cap H]$. Так как $P\varphi=P\cap H$, то ограничение $\overline{\varphi}$ изоморфизма φ на подгруппу P является изоморфизмом группы P на подгруппу $P\cap H$.

Таким образом, P – группа конечного общего ранга, $\overline{\varphi}$ – изоморфизм группы P на ее подгруппу $P\cap H$, индекс $[P:P\cap H]$ конечен и при этом для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с $[P:P\cap H]$, группа P аппроксимируема конечными π-группами. Поэтому в силу леммы 3 для любого неединичного элемента $a\in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\overline{\varphi}=V\cap(P\cap H)$. Последнее равенство может быть переписано в виде $V\varphi=V\cap H$. Так как V – вербальная подгруппа конечного индекса группы P и P – нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то V – нормальная подгруппа конечного индекса группы G.

Таким образом, для любого неединичного элемента a группы G, принадлежащего подгруппе P, в группе G существует нормальная подгруппа V конечного индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi=V\cap H$. Подгруппа V с такими свойствами существует и в случае, когда элемент a группы G не принадлежит подгруппе P. В этом случае в качестве искомой подгруппы V можно взять саму подгруппу P. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 5. Пусть G – группа конечного общего ранга, φ – изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти аппроксимируема конечными π-группами.

Тогда по лемме 5 пересечение всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой и поэтому в силу теоремы 1 группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема. Теорема 5 доказана.

Автор благодарен участникам алгебраического семинара под руководством Д. И. Молдаванского за ряд ценных замечаний, сделанных при подготовке этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д. И. Молдаванский, “Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп”, *Укр. матем. журн.*, **44**:6 (1992), 842–845.

[2] T. Hsu, D. T. Wise, “Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite”, *J. Pure Appl. Algebra*, **182**:1 (2003), 65–78.

[3] G. Baumslag, R. Bieri, “Constructable soluble groups”, *Math. Z.*, **151**:3 (1976), 249–257.

[4] J. Lennox, D. J. S. Robinson, *The Theory of Infinite Soluble Groups*, Oxford Math. Monogr., Clarendon press, Oxford, 2004.

[5] A. Borisov, M. Sapir, “Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 341–356, arXiv: math.GR/0309121.

[6] A. H. Rhemtulla, M. Shirvani, “The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups”, *Illinois J. Math.*, **47**:1-2 (2003), 477–484.

[7] А. Л. Шмелькин, “Полициклические группы”, *Сиб. матем. журн.*, **9** (1968), 234–235.

[8] A. Lubotzky, D. Segal, *Subgroup Growth*, Progr. Math., **212**, Birkhäuser-verlag, Basel, 2003.

[9] K. W. Gruenberg, “Residual properties of infinite soluble groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 29–62.

[10] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1972.

Д. Н. Азаров
Ивановский государственный университет
E-mail: azarov@mail.ru

Поступило
28.12.2011
Исправленный вариант
06.01.2014