Известия вузов. Математика
2014, № 8, с. 18–29
http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.Н. АЗАРОВ

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация. Для разрешимых групп конечного ранга получено необходимое и достаточное условие почти аппроксимируемости конечными p-группами. Доказано также, что разрешимая группа G конечного ранга аппроксимируема конечными π-группами для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда она не содержит подгрупп типа Q, а ее периодический радикал является конечной группой.

Ключевые слова: разрешимая группа конечного ранга, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

УДК: 512.543

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Если множество π состоит из одного простого числа p, то класс $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп.

Очевидно, что произвольная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти $\mathcal{F}$-аппроксимируемая (и, в частности, любая почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая) группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой.

Таким образом, свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Более того, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

В 1952 году К. Гирш [1] доказал, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Этот результат был усилен сначала в работе А. Лернера, а затем в работе А.Л. Шмелькина [3]. В [2] доказано, что для каждой полициклической группы G существует конечное множество π простых чисел такое, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, а в работе [3] доказана почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы

Поступила 01.02.2013

для любого простого p. Заметим, что вопрос об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп исследован только в некоторых частных случаях, например, для конечно порожденных нильпотентных групп. К. Грюнберг в работе [4] доказал, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Здесь будут рассмотрены обобщения перечисленных выше результатов на некоторые разрешимые группы.

Напомним, что группа G называется полициклической, если в ней существует субнормальный ряд с циклическими факторами. В данной работе под субнормальным рядом группы G всегда понимается конечный ряд $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$, в котором G_k — нормальная подгруппа группы G_{k+1} для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой минимаксной группы. Напомним, что группа называется минимаксной, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности для подгрупп или условию максимальности для подгрупп. Хорошо известно, что разрешимая группа удовлетворяет условию максимальности (минимальности) тогда и только тогда, когда она является полициклической группой (конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Поэтому разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой (например, [5], п. 5.1.6).

Более слабым требованием является существование в данной группе субнормального ряда, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Следуя Д. Робинсону (например, [5], п. 5.1.6), будем называть такие группы разрешимыми группами с конечными абелевыми тотальными рангами (FATR-группами).

Примером абелевой FATR-группы, не являющейся минимаксной, является аддитивная группа Q рациональных чисел. Примером абелевой минимаксной группы служит аддитивная группа Q_p p-ичных дробей, состоящая из всех рациональных дробей, знаменатели которых являются степенями фиксированного простого числа p. Действительно, группа Q_p является расширением циклической группы Z целых чисел с помощью квазициклической группы, соответствующей числу p.

Следующим обобщением понятия разрешимой FATR-группы является понятие разрешимой группы конечного специального ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного специального ранга (или, в другой терминологии, группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это понятие и термин "специальный ранг" введены А.И. Мальцевым в [6]. Далее используем термин "конечный ранг" вместо терминов "конечный специальный ранг" и "конечный ранг Прюфера".

Элемент a группы G называется полным, если для любого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется полной, если все ее элементы являются полными. Группа G называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Это равносильно тому, что она не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.

Очевидно, любая финитно аппроксимируемая группа является редуцированной. С другой стороны, Д. Робинсоном получены следующие важные результаты.

Если разрешимая группа конечного ранга является редуцированной, то она финитно аппроксимируема (например, [5], п. 5.3.2).

Если разрешимая FATR-группа является редуцированной, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел (например, [5], п. 5.3.8).

Если разрешимая минимаксная группа является редуцированной, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p (например, [5], п. 5.3.9).

Таким образом, для разрешимой минимаксной группы G следующие четыре условия равносильны между собой:

1. группа G редуцирована,
2. группа G финитно аппроксимируема,
3. группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел,
4. группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Из приведенных выше результатов Д. Робинсона следует, что для разрешимой FATR-группы G равносильными являются условия 1, 2 и 3, а для разрешимой группы конечного ранга равносильны условия 1 и 2.

Заметим, что для разрешимой FATR-группы G условия 1, 2 и 3 уже не равносильны условию 4, так как финитно аппроксимируемая разрешимая FATR-группа может не быть почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p. Соответствующим примером может служить прямая сумма группы всех рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с простым числом p, и группы всех рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с простым числом q, отличным от p ([5], с. 101).

Для разрешимой группы G конечного ранга условия финитной аппроксимируемости и редуцированности равносильны, но эти условия уже не равносильны тому, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Соответствующим примером может служить прямое произведение групп порядка p по всем простым p. Еще более жестким требованием для разрешимой группы конечного ранга является ее почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость.

Здесь исследуем вопрос о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной разрешимой группы G конечного ранга. Кроме того, используя упомянутый выше результат Д. Робинсона об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости редуцированной разрешимой FATR-группы G для подходящего конечного множества π простых чисел, исследуем аналогичное свойство для произвольной разрешимой группы конечного ранга. Получена

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга и $\tau(G)$ — периодический радикал группы G.*

1. *Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда ее подгруппа $\tau(G)$ конечна и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.*
2. *Пусть p — простое число. Группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа $\tau(G)$ конечна и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q_p p-ичных дробей.*

Напомним, что периодическим радикалом группы G называется ее наибольшая нормальная периодическая подгруппа. Эту подгруппу будем далее обозначать через $\tau(G)$.

Хорошо известно (например, [5], с. 90), что если в разрешимой группе G конечного ранга подгруппа $\tau(G)$ конечна, то G является FATR-группой. Поэтому доказательство достаточности в первом утверждении теоремы 1 основано на упомянутой выше теореме Робинсона об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости редуцированной разрешимой FATR-группы. Доказательство второго утверждения теоремы 1 не зависит от приведенных выше результатов Робинсона.

Частными случаями теоремы 1 являются известные результаты о разрешимых группах конечного ранга (некоторые стали классическими), а также недавние результаты о нисходящих HNN–расширениях разрешимых групп. Эти результаты будут приведены ниже, но прежде сформулируем еще одну теорему, доказанную в данной работе.

Рассмотрим случай, когда группа G нильпотентна. Так как любая нильпотентная группа является разрешимой, то теорема 1 может быть применена к произвольной нильпотентной группе конечного ранга. Вместе с тем, для нильпотентных групп конечного ранга получена содержащая критерий аппроксимируемости конечными p-группами

Теорема 2. *Пусть G — нильпотентная группа конечного ранга, $\tau(G)$ — периодический радикал группы G и p — простое число. Группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа $\tau(G)$ является конечной p-группой и группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей.*

Непосредственно из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 1. Пусть G — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, p — простое число. Тогда следующие три условия равносильны между собой:

1. группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема,
2. группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p,
3. группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

В [7] доказано, что если группа конечного ранга (не обязательно разрешимая) $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p, то она является нильпотентной группой без кручения. Поэтому с учетом следствия 1 видим, что группа конечного ранга $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p тогда и только тогда, когда она нильпотентна, не имеет кручения, и для каждого простого p не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p. Однако для фиксированного простого числа p критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга не известен.

Приведем теперь некоторые известные результаты, являющиеся следствиями теоремы 1.

Очевидно, в разрешимой FATR-группе G подгруппа $\tau(G)$ обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Поэтому в разрешимой FATR-группе G подгруппа $\tau(G)$ является черниковской, т. е. конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Поэтому если разрешимая FATR-группа G редуцирована, то подгруппа $\tau(G)$ конечна. Таким образом, из теоремы 1 получается

Следствие 2. Пусть G — редуцированная разрешимая FATR-группа. Тогда справедливы следующие два утверждения.

1. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.
2. Пусть p — простое число. Группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p.

Первое утверждение из формулировки следствия 2 принадлежит Д. Робинсону (например, [5], п. 5.3.8), а второе утверждение доказано в работе [8].

Пусть теперь G — разрешимая минимаксная группа, $\mathcal{R}$ — субнормальный ряд группы G, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. Спектром группы G называется множество $\mathrm{sp}(G)$ всех простых чисел p таких, что ряд $\mathcal{R}$ имеет квазициклический фактор типа p^∞. Очевидно, множество $\mathrm{sp}(G)$ не зависит от выбора ряда $\mathcal{R}$. Очевидно также, что спектр группы Q_p состоит из одного простого числа p, и если H — подгруппа разрешимой минимаксной группы G, то $\mathrm{sp}(H) \subseteq \mathrm{sp}(G)$.

Поэтому если $p \notin \mathrm{sp}(G)$, то группа G не содержит подгрупп, изоморфных Q_p, и с помощью п. 2 следствия 2 получаем еще одно следствие из теоремы 1.

Следствие 3. Если разрешимая минимаксная группа G редуцирована и простое число p не принадлежит спектру группы G, то группа G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. В частности, произвольная полициклическая группа является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для каждого простого числа p.

Независимое доказательство первой части этого утверждения приводится в монографии ([5], п. 5.3.9), а вторая часть доказана в работе А.Л. Шмелькина [3].

Пусть группа G задана порождающими элементами $a_1, a_2, \dots$ и множеством определяющих соотношений R и пусть φ — изоморфизм группы G на некоторую ее подгруппу H. Напомним, что группа

$$G(\varphi) = (a_1, a_2, \dots, t;\ R, t^{-1}a_1t = a_1\varphi, t^{-1}a_2t = a_2\varphi, \dots)$$

называется нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим изоморфизму φ. Простейшим примером нисходящего HNN-расширения является группа Баумслага–Солитэра $G_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$, где $n \neq 0$. Эта группа является финитно аппроксимируемой [9], [10], и она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда p не делит n [11].

Пусть теперь G — разрешимая группа конечного ранга, H — подгруппа конечного индекса n группы G, φ — изоморфизм группы G на подгруппу H. Пусть $G(\varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Для каждого целого числа i введем обозначение $G_i = t^{-i}Gt^i$. Очевидно,

$$G_0 \subseteq G_{-1} \subseteq G_{-2} \subseteq \cdots ,$$

и подмножество $\overline{G} = \bigcup\limits_{i \le 0} G_i$ является нормальной подгруппой группы $G(\varphi)$, причем фактор-группа группы $G(\varphi)$ по подгруппе $\overline{G}$ является бесконечной циклической. Поэтому $G(\varphi)$ — разрешимая группа конечного ранга. Обозначим через T периодический радикал группы $G(\varphi)$. Очевидно, $T \subseteq \overline{G}$, $T = \bigcup\limits_{i \le 0} T \cap G_i$, и $T \cap G_i \subseteq \tau(G_i) \cong \tau(G)$. Поэтому если подгруппа $\tau(G)$ конечна, то подгруппа T является объединением возрастающей последовательности конечных подгрупп $T \cap G_i$, порядки которых ограничены, и тогда подгруппа T конечна. Очевидно, для всех целых i индекс $[G_i : G_{i+1}]$ конечен и равен n. Поэтому если для некоторого простого числа $p > n$ группа G не содержит подгрупп, изоморфных Q_p, то этим свойством обладает группа $\overline{G}$, а значит, и группа $G(\varphi)$. Таким образом, из теоремы 1 получаем очевидное

Следствие 4. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, H — подгруппа конечного индекса n группы G, φ — изоморфизм группы G на подгруппу H и $G(\varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Если для некоторого простого числа $p > n$ группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то и группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Так как редуцированная разрешимая минимаксная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, и любая подгруппа H группы G, изоморфная G, имеет в G конечный индекс, то частным случаем следствия 4 является следующий результат А. Ремтуллы и М. Ширвани [12]: нисходящее HNN-расширение редуцированной разрешимой минимаксной группы является финитно аппроксимируемой группой.

Ранее Д. Вайс и Т. Су в [13] доказали финитную аппроксимируемость нисходящего HNN-расширения полициклической группы.

Независимое доказательство следствия 4, не использующее теорию разрешимых групп конечного ранга, можно найти в [14].

Для доказательства теорем 1 и 2 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Для произвольной группы A и натурального числа n через A^n будем обозначать степенную подгруппу группы A, т. е. подгруппу, порожденную n-ми степенями всевозможных элементов из A.

Предложение 1. *В разрешимой группе A конечного ранга любая степенная подгруппа A^n имеет конечный индекс.*

Доказательство. Фактор-группа A/A^n является разрешимой периодической группой конечного ранга с ограниченными порядками элементов. Рассмотрим в этой группе субнормальный ряд с абелевыми факторами. Эти факторы являются периодическими абелевыми группами конечного ранга с ограниченными порядками элементов и поэтому они конечны. Следовательно, группа A/A^n конечна. □

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A. Если A — конечная p-группа, то ее подгруппа $A'A^p$ очевидно совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Предложение 2. *Пусть A — конечная p-группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы A. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Γ является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (например, [15], с. 562).

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$.

Предложение 3. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B, A — конечная p-группа, группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Обозначим через H централизатор подгруппы A в группе B. Тогда H — нормальная подгруппа группы G, и фактор-группу B/H можно рассматривать как подгруппу группы автоморфизмов группы A, причем все автоморфизмы из B/H действуют тождественно по модулю $A'A^p$ за счет того, что $[B, A] \subseteq A'A^p$. Поэтому в силу предложения 2 B/H — конечная p-группа, т. е. H — нормальная подгруппа группы B конечного p-индекса. Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p. В силу последних двух обстоятельств H — подгруппа конечного p-индекса группы G. Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, поскольку содержится в группе B. Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы H с помощью конечной p-группы G/H. Отсюда следует, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. □

Предложение 4. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и A — разрешимая группа конечного ранга.*

1. *Если группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы и $[B, A] \subseteq A'A^p$, то и группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

2. *Если группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

3. *Если группы A и B почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, то и группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. 1. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, причем $[B, A] \subseteq A'A^p$. Для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G достаточно для каждого ее неединичного элемента g указать нормальную подгруппу N группы G, не содержащую элемент g и такую, что фактор-группа G/N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $g \notin A$, то в качестве N можно взять A, так как $G/A \cong B$ — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Пусть теперь $g \in A$. Так как группа A $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то в группе A существует нормальная подгруппа M индекса p^k, не содержащая элемент g. Тогда g не принадлежит подгруппе $N = A^{p^k}$. По предложению 1 A/N — конечная p-группа. Так как N характеристична в A и A нормальна в G, то N нормальна в G. Поэтому остается доказать $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G/N. Группа G/N является расщепляемым расширением конечной p-группы A/N с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы $BN/N \cong B$, причем так как $[B, A] \subseteq A'A^p$, то $[BN/N, A/N] \subseteq (A/N)'(A/N)^p$. Поэтому в силу предложения 3 группа G/N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

2. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Пусть $\omega : B \to \mathrm{Aut}A/A'A^p$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу b из B автоморфизм $\widetilde{b}$ группы $A/A'A^p$, действующий по правилу $\big(aA'A^p\big)\widetilde{b} = b^{-1}abA'A^p$, где $a \in A$. Обозначим через C ядро гомоморфизма ω. Очевидно, $[C, A] \subseteq A'A^p$ и группа $H = AC$ является расщепляемым расширением группы A с помощью группы C. Поэтому в силу уже доказанного первого утверждения предложения 4 группа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как A — группа конечного ранга, то группа $A/A'A^p$ конечна. Отсюда и из того, что фактор-группа B/C изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{Aut}\, A/A'A^p$, следует, что C — подгруппа конечного индекса группы B. Поэтому H является подгруппой конечного индекса группы G, и теперь из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы H следует почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G.

3. Пусть группы A и B почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Обозначим через A_1 и B_1 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые подгруппы конечных индексов групп A и B соответственно. Заменяя в случае необходимости подгруппу A_1 на степенную подгруппу группы A, можем считать, что подгруппа A_1 характеристична в A и поэтому нормальна в G. Подгруппа $G_1 = A_1B_1$, очевидно, имеет конечный индекс в G, является расщепляемым расширением группы A_1 с помощью группы B_1, причем A_1 — разрешимая группа конечного ранга. Поэтому в силу уже доказанного второго утверждения группа G_1 почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и поскольку $[G : G_1] < \infty$, группа G также почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. □

Предложение 5. *Пусть N — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, не содержащая подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей. Тогда группа N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Хорошо известно, что в нильпотентной группе без кручения извлечение корня однозначно. Обозначим через h произвольный неединичный элемент группы N. Покажем, что существует целое положительное число s такое, что уравнение $x^{p^s} = h$ не разрешимо в группе N. Допустим противное, т. е. что для любого целого положительного числа t в группе N существует элемент x_t такой, что ${x_t}^{p^t} = h$. Тогда ${x_{t+1}}^{p^{t+1}} = h = {x_t}^{p^t}$. Отсюда и из однозначности извлечения корня в группе N следует $x_{t+1}^p = x_t$. Поэтому подгруппа X группы N, порожденная всеми элементами x_t, изоморфна группе p-ичных дробей, что невозможно.

Зафиксируем теперь число s, для которого уравнение $x^{p^s} = h$ не разрешимо в группе N, и рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^{sc}}$, где c — ступень нильпотентности группы N.

Согласно ([16], лемма 2) из любого элемента v подгруппы V в группе N извлекается корень степени p^s. Отсюда и из того, что уравнение $x^{p^s} = h$ не разрешимо в группе N, следует $h \notin V$. По предложению 1 N/V — конечная p-группа.

Таким образом, V — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы N, не содержащая элемент h. Тем самым доказано, что группа N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. □

Для произвольной группы X через $\mathrm{Fit}\, X$ будем обозначать подгруппу Фиттинга группы X, т. е. произведение всех ее нормальных нильпотентных подгрупп. Хорошо известна следующая теорема Грюнберга–Мальцева ([5], п. 5.2.2).

Предложение 6. *В любой разрешимой* FATR*-группе X подгруппа Фиттинга* $\mathrm{Fit}\, X$ *нильпотентна.*

Говорят, что группа X имеет конечный ранг Гирша, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является циклической или периодической группой. Хорошо известно и легко проверяется, что любая абелева группа конечного ранга Прюфера является расширением конечно порожденной абелевой группы без кручения с помощью периодической группы, и поэтому она имеет конечный ранг Гирша. Следовательно, любая разрешимая группа конечного ранга Прюфера имеет конечный ранг Гирша.

Предложение 7. *Пусть X — разрешимая группа конечного ранга Гирша, $\tau(X)$ — периодический радикал группы X.*

1. *В группе $X/\tau(X)$ существует конечный характеристический ряд, каждый фактор которого является конечной группой или абелевой группой без кручения.*

2. *Если подгруппа $\tau(X)$ конечна, то фактор-группа $X/\,\mathrm{Fit}\, X$ является полициклической и почти абелевой.*

3. *Группа X является* FATR*-группой тогда и только тогда, когда подгруппа $\tau(X)$ является черниковской. В частности, если подгруппа $\tau(X)$ конечна, то группа X является разрешимой $FATR$-группой.*

Утверждение 1 принадлежит А.И. Мальцеву ([5], п. 5.2.1), а утверждение 2 — Д. Робинсону ([5], п. 5.2.3). Утверждение 3 также хорошо известно ([5], с. 90).

Следствием предложений 6 и 7 является

Предложение 8. *Пусть X — разрешимая группа конечного ранга и подгруппа $\tau(X)$ конечна. Тогда X — разрешимая* FATR*-группа, подгруппа* $\mathrm{Fit}\, X$ *нильпотентна, а фактор-группа* $X/\,\mathrm{Fit}\, X$ *является полициклической и почти абелевой.*

Предложение 9. *Пусть G — нильпотентная группа ступени c и подгруппа $\tau(G)$ является конечной группой порядка n. Тогда подгруппа $N = G^{n^c}$ не имеет кручения.*

Доказательство. Пусть a — элемент конечного порядка группы N. По лемме 2 из [16] существует элемент b из G такой, что $a = b^n$. Очевидно, b — элемент конечного порядка группы G. Так как группа G нильпотентна, то множество всех элементов конечного порядка группы G является подгруппой и, очевидно, совпадает с $\tau(G)$. Из последних двух обстоятельств следует $b \in \tau(G)$. Поскольку порядок группы $\tau(G)$ равен n, то $b^n = 1$, т. е. $a = 1$. Таким образом, N — группа без кручения. □

Предложение 10. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга и подгруппа $\tau(G)$ конечна. Тогда в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа N, не имеющая кручения и такая, что фактор-группа G/N является полициклической.*

Доказательство. По предложению 8 подгруппа $F = \mathrm{Fit}\, G$ нильпотентна, а фактор-группа G/F является полициклической. Поскольку $\tau(G)$ — конечная группа, то ее подгруппа $\tau(F)$ также конечна. Обозначим через n порядок группы $\tau(F)$, а через c — ступень нильпотентности группы F. Рассмотрим степенную подгруппу $N = F^{n^c}$. По предложению 9 N — группа без кручения. По предложению 1 F/N — конечная группа. Так как N характеристична в F, и F характеристична в G, то N характеристична в G. Так как фактор-группы G/F и F/N являются соответственно полициклической и конечной нильпотентной группами, то G/N — полициклическая группа. □

Предложение 11. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, подгруппа $\tau(G)$ конечна и G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как G — разрешимая группа конечного ранга и подгруппа $\tau(G)$ конечна, то по предложению 10 в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа N без кручения такая, что фактор-группа G/N является полициклической. Последнее обстоятельство позволяет рассмотреть субнормальный ряд

$$1 \leq N = G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

в котором все факторы, начиная со второго, являются циклическими группами. Индукцией по n покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $n = 1$, то $G = N$ — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, и G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p. Поэтому в силу предложения 5 она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Предположим теперь, что группа G_{n-1} почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и покажем, что группа G также почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это очевидно, если фактор-группа G/G_{n-1} конечна. Поэтому можно считать, что G/G_{n-1} — бесконечная циклическая группа, т. е. что G — расширение группы G_{n-1} с помощью бесконечной циклической группы. Хорошо известно и легко проверяется, что любое такое расширение расщепляемо. Таким образом, группа G является расщепляемым расширением почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы G_{n-1} конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому в силу предложения 4 группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. □

Предложение 12. *Пусть G — произвольная почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Тогда группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p.*

Доказательство. Предположим, что G содержит подгруппу, изоморфную группе Q_p. Так как группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то и группа Q_p почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Но это невозможно, так как группа Q_p не содержит подгрупп конечного индекса, делящегося на p. □

Предложение 13. *Пусть A — финитно аппроксимируемая абелева p-группа конечного ранга. Тогда группа A конечна.*

Доказательство. Для каждого целого положительного числа k через A_k будем обозначать множество всех элементов a группы A таких, что $a^{p^k} = 1$. Это множество конечно за счет конечности ранга группы A. Поэтому группа A не более чем счетна. Так как A финитно аппроксимируема, то в ней нет элементов бесконечной p-высоты, отличных от единицы, т. е. таких неединичных элементов a, из которых в группе A извлекается корень степени p^k для любого целого положительного k. Из последних двух обстоятельств по второй теореме Прюфера (например, [17], с. 87) следует, что группа A раскладывается в прямое произведение циклических p-групп. Отсюда и из конечности ранга группы A следует, что группа A конечна. □

Предложение 14. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая π-группа конечного ранга, где π — конечное множество простых чисел. Тогда группа G конечна.*

Доказательство. Пусть $1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_n = G$ — нормальный ряд группы G с абелевыми факторами. Группа $A = G_1$ является абелевой π-группой и раскладывается в прямое произведение примарных компонент, причем их число конечно, так как конечно множество π. Примарные компоненты группы A являются финитно аппроксимируемыми абелевыми p-группами конечного ранга, и поэтому в силу предложения 13 все они конечны. Из последних двух обстоятельств следует, что группа A конечна.

Покажем, что группа G/A финитно аппроксимируема. Пусть xA — неединичный элемент группы G/A. Так как $x \notin A$, и A — конечное подмножество финитно аппроксимируемой группы G, то существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу F такой, что $x\varphi \notin A\varphi$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : F \to F/A\varphi$. Тогда $x\varphi\varepsilon \neq 1$. Так как A содержится в ядре гомоморфизма $\varphi\varepsilon$, то можно рассмотреть гомоморфизм $\phi : G/A \to F/A\varphi$, заданный по правилу $(gA)\phi = g\varphi\varepsilon$, где $g \in G$. Тогда $(xA)\phi = x\varphi\varepsilon \neq 1$.

Таким образом, G/A — финитно аппроксимируемая разрешимая π-группа конечного ранга, причем она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами длины меньше n. Поэтому в силу индуктивных соображений группа G/A конечна. Отсюда и из конечности группы A следует конечность группы G. □

Предложение 15. *Пусть G — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая разрешимая группа конечного ранга, где π — конечное множество простых чисел. Тогда подгруппа $\tau(G)$ конечна и группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q.*

Доказательство. Очевидно, периодическая $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая группа является π-группой. Поэтому $\tau(G)$ — финитно аппроксимируемая разрешимая π-группа конечного ранга. Тогда в силу предложения 14 подгруппа $\tau(G)$ конечна. Так как группа G финитно аппроксимируема, то она, очевидно, не содержит подгрупп, изоморфных группе Q. □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — разрешимая группа конечного ранга.

1. Покажем, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда подгруппа $\tau(G)$ конечна и G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q.

Необходимость в этом утверждении обеспечивается предложением 15.

Достаточность. Пусть группа $\tau(G)$ конечна и G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q. Так как подгруппа $\tau(G)$ конечна, то по предложению 8 G — разрешимая FATR-группа. Покажем, что она редуцирована. В силу п. 1 предложения 7 в группе $G/\tau(G)$ существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является конечной группой или абелевой группой без кручения. Отсюда и из того, что подгруппа $\tau(G)$ конечна, следует, что группа G не содержит квазициклических подгрупп. Поскольку G не содержит и подгрупп, изоморфных группе Q, то она редуцирована. По теореме Робинсона любая редуцированная разрешимая FATR-группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел ([5] , п. 5.3.8).

2. Пусть p — простое число. Покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа $\tau(G)$ конечна и G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p.

Достаточность в этом утверждении обеспечивается предложением 11.

Необходимость. Пусть группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. По предложению 12 группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p. Так как группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, и поэтому в силу предложения 15 подгруппа $\tau(G)$ конечна.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть G — нильпотентная группа конечного ранга и p — простое число. Покажем, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа $\tau(G)$ является конечной p-группой и группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p.

Предположим сначала, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Тогда она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и поэтому в силу теоремы 1 подгруппа $\tau(G)$ конечна и группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p. Очевидно, любая конечная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является p-группой. Поэтому $\tau(G)$ — конечная p-группа.

Предположим теперь, что подгруппа $\tau(G)$ является конечной p-группой порядка $n = p^k$, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p. По предложению 9 подгруппа $N = G^{n^c}$ не имеет кручения, где c — ступень нильпотентности группы G. Таким образом, N — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, не содержащая подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей. По предложению 5 группа N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. По предложению 1 фактор-группа G/N конечна и, очевидно, она является конечной p-группой. Из последних двух обстоятельств следует, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. $\square$

Литература

[1] Hirsh K.A. *On infinite soluble groups*, J. London Math. Soc. **27**, 81–85 (1952).
[2] Learner A. *Residual properties of polycyclic groups*, J. Math. **8**, 536–542 (1964).
[3] Шмелькин А.Л. *Полициклические группы*, Сиб. матем. журн. **9**, 234–235 (1968).
[4] Gruenberg K.W. *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **7**, 29–52 (1957).
[5] Lennox J., Robinson D. *The theory of infinite soluble groups* (Clarendon press, Oxford, 2004).
[6] Мальцев А.И. *О группах конечного ранга*, Матем. сб. **22** (2), 351–352 (1948).
[7] Азаров Д.Н. *Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга*, Вестн. Ивановск. ун-та, № 3, 103–105 (2001).
[8] Азаров Д.Н. *О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп*, Вестн. Ивановск. ун-та, № 2, 80–86 (2012).
[9] Baumslag G., Solitar D. *Some two-generator one-relator non-Hopfian groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **68**, 199–201 (1962).
[10] Meskin S. *Nonresidually finite one-relator groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **164**, 105–114 (1972).
[11] Азаров Д.Н., Сергина Е.А. *О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых групп Баумслага–Солитэра*, Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та, математика (Иваново, 2008), вып. 6, с. 23–28.
[12] Rhemtulla A., Shirvani M. *The residual finiteness of ascending* HNN-*extensions of certain soluble groups*, Illinois J. of Math. **47** (1, 2), 477–484 (2003).
[13] Hsu T., Wise D. *Ascending* HNN-*extensions of polycyclic groups are residually finite*, J. Pure Appl. Algebra **182**, 65–78 (2003).
[14] Азаров Д.Н. *О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих* HNN-*расширений групп*, Чебышевский сб. **13** (1), 9–20 (2012).
[15] Плоткин Б.И. *Группы автоморфизмов алгебраических систем* (Наука, М., 1966).
[16] Мальцев А.И. *О гомоморфизмах на конечные группы*, Учен. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та **18** (5), 49–60 (1958).
[17] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп* (Наука, М., 1972).

Д.Н. Азаров

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 37, г. Иваново, 153025, Россия,

`e-mail:` azarovdn@mail.ru

D.N. Azarov

Approximability of soluble groups of finite rank by certain classes of finite groups

Abstract. For soluble groups of finite rank we obtain the necessary and sufficient condition to be a virtually residually finite p-group. We also prove that a soluble group G of finite rank is residually π-finite for some finite set π of primes if and only if it has no subgroups of type Q and the torsion radical of G is a finite group.

Keywords: soluble group of finite rank, virtually residually finite p-group.

D.N. Azarov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Ivanovo State University,
37 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia,

`e-mail:` azarovdn@mail.ru