Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **2** (2015) 149–157

УДК 512.543

Аппроксимационные свойства нильпотентных групп

Азаров Д. Н.[1]

Ивановский государственный университет
153025 Россия, г. Иваново, ул. Ермака, 39

e-mail: azarovdn@mail.ru

получена 12 марта 2015

Ключевые слова: нильпотентная группа, группа конечного ранга, аппроксимируемость конечными p-группами.

Пусть π — множество простых чисел. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой конечными π-группами, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную π-группу, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой конечными π-группами, если она содержит подгруппу конечного индекса, аппроксимируемую конечными π-группами. Напомним, что элемент g группы G называется π-полным, если из него в группе G можно извлечь корень m-й степени для любого целого положительного π-числа m. Пусть N — нильпотентная группа, и все степенные подгруппы группы N финитно отделимы. Доказано, что группа N аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда в ней нет π-полных элементов отличных от 1. Пусть теперь множество π не совпадает с множеством Π всех простых чисел, и π' — дополнение множества π в множестве Π. И пусть T — π'-компонента группы N, т. е. множество всех элементов группы N, порядки которых конечны и являются π'-числами. Доказано, что следующие три условия равносильны между собой: (1) группа N почти аппроксимируема конечными π-группами; (2) подгруппа T конечна, и фактор-группа N/T аппроксимируема конечными π-группами; (3) подгруппа T конечна и совпадает с множеством всех π-полных элементов группы N.

Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному заданию.

Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Напомним, что конечная группа называется конечной π-группой, если ее порядок является π-числом, т. е. если все его простые делители принадлежат множеству π. Если множество π состоит из всех простых чисел, то понятие $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Если множество π состоит из одного простого числа p, то $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с классом всех конечных p-групп и обозначается через $\mathcal{F}_p$.

Очевидно, что группа G финитно аппроксимируема ($\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда пересечение всех подгрупп конечного индекса (всех нормальных подгрупп конечного π-индекса) группы G совпадает с единичной подгруппой. Очевидно также, что свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемостью.

Термин "аппроксимируемость" был введен А. И. Мальцевым в [1] в 1949 году. Соответствующее понятие появилось несколько раньше. Как свидетельствуют в своей исторической монографии [2] В. Магнус и Б. Чандлер, понятие финитно аппроксимируемой группы было введено в 1940 году А. И. Мальцевым в его работе [3]. В этой работе доказана финитная аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Частным случаем этой теоремы является результат К. Гирша [4] о финитной аппроксимируемости произвольной полициклической группы. Исследование $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости полициклических групп было начато в [5] и [6]. А. Л. Шмелькин доказал, что полициклические группы почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p [7].

Исследования аппроксимируемости нильпотентных групп различными классами конечных групп были начаты К. Грюнбергом в работе [8], где доказано, в частности, что любая конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, а любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. С помощью этих результатов легко доказать следующее более общее утверждение. Конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее конечная часть является π-группой. Это утверждение может быть также легко установлено с помощью более общих результатов, доказанных ниже.

В исследованиях $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости абелевых, нильпотентных и разрешимых групп особое значение имеет понятие π-полного элемента группы. Напомним, элемент a группы G называется π-полным, если для любого целого положительного π-числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Если множество π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие π-полного элемента совпадает с классическим понятием полного элемента.

Связь финитной аппроксимируемости группы с полнотой ее элементов впервые была обнаружена еще А. И. Мальцевым в [9], где он заметил, что в финитно аппроксимируемой группе нет полных элементов отличных от 1 и что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных элементов отличных от 1.

Это утверждение не может быть распространено с абелевых групп на нильпотентные группы. Соответствующий пример был подсказан автору настоящей работы А. Л. Шмелькиным и представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы кватернионов с объединенными центрами. Такая группа не является финитно аппроксимируемой, но при этом в ней нет полных элементов кроме 1.

Теорема Мальцева об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости абелевой группы легко обобщается на случай $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости следующим образом. Абелева группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов отличных от 1 [10].

Это утверждение, как и теорема Мальцева, не может быть распространено с абелевых групп на нильпотентные группы, но, тем не менее, оно остается верным для достаточно широкого класса нильпотентных групп, содержащего все абелевы группы. В качестве такого класса выступает класс всех нильпотентных групп, в которых все степенные подгруппы финитно отделимы, т. е. имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть G — нильпотентная группа, и все степенные подгруппы группы G финитно отделимы. И пусть π — множество простых чисел. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов отличных от 1.*

В связи с этой теоремой напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если она совпадает с пересечением некоторого семейства подгрупп конечного индекса группы G. Для нормальной подгруппы H это равносильно финитной аппроксимируемости фактор-группы G/H. Напомним также, что степенной подгруппой группы G называется подгруппа G^n, порожденная n-ми степенями всех элементов группы G, где n — фиксированное целое положительное число.

Если G — абелева группа, то по хорошо известной теореме Прюфера фактор-группа G/G^n раскладывается в прямое произведение циклических групп и потому финитно аппроксимируема. Таким образом, в абелевых группах все степенные подгруппы финитно отделимы, и поэтому теорема 1 применима к любой абелевой группе. Еще одним классом групп, к которому применима теорема 1, является класс всех нильпотентных групп конечного ранга. Напомним (см. [11]), что группа G имеет конечный ранг, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Легко видеть, что в разрешимых (и, в частности, в нильпотентных) группах конечного ранга все степенные подгруппы имеют конечные индексы, и следовательно финитно отделимы (см., например, [12], предл. 1). Поэтому частным случаем теоремы 1 является следующее утверждение, доказанное в работе [10] и независимо в [14] (см. также [15]). Нильпотентная группа G конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов отличных от 1.

Исследования $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимых групп конечного ранга были начаты Д. Робинсоном и затем продолжены рядом авторов (см., например, [16], [17], [18], [19], [20]).

Рассмотрим теперь вопрос о почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости нильпотентных групп с финитно отделимыми степенными подгруппами. В случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости совпадает со свойством почти $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, которое равносильно свойству $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, и поэтому в данном случае поставленный вопрос решается теоремой 1. Теперь мы можем предполагать, что π не совпадает с множеством всех простых чисел. При этом предположении здесь доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — нильпотентная группа, и все ее степенные подгруппы финитно отделимы. И пусть π — множество простых чисел, не совпадающее с множеством $\mathcal{P}$ всех простых чисел; π' — дополнение множества π в множестве $\mathcal{P}$; T — π'-компонента группы G, т. е. множество всех элементов группы G, порядки которых конечны и являются π'-числами. Тогда следующие три утверждения равносильны.*

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

2. Подгруппа T конечна, и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством всех π-полных элементов группы G.

Эта теорема, как и теорема 1, применима к любой абелевой группе и к любой нильпотентной группе конечного ранга.

1. Дополнительные замечания

В качестве непосредственного следствия из теоремы 2 приведем следующее утверждение, дающее полную информацию о месте $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп среди почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп с финитно отделимыми степенными подгруппами.

Пусть G — нильпотентная группа, и все ее степенные подгруппы финитно отделимы. И пусть π, π' и T такие же, как в теореме 2. Группа G является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема и $T = 1$.

Необходимость в этом утверждении очевидна, так как в любой $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группе нет π'-кручения. Для проверки достаточности предположим, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема и $T = 1$. Тогда по теореме 2 фактор-группа G/T является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой. Отсюда и из равенства $T = 1$ следует $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G. Утверждение доказано.

Частным случаем отмеченного выше следствия из теоремы 2 является следующее утверждение.

Пусть G — нильпотентная группа без кручения, и все ее степенные подгруппы финитно отделимы. Тогда следующие два утверждения равносильны.

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

2. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

В частности, для любой нильпотентной группы без кручения конечного ранга свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости равносильны между собой.

Множество всех простых чисел p, для которых группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема) будем обозначать через $\pi_{_G}$ (соответственно $\Pi_{_G}$). Из сформулированного выше утверждения следует, что $\pi_{_G} = \Pi_{_G}$ для любой нильпотентной группы G без кручения конечного ранга. С другой стороны, если G — разрешимая группа конечного ранга, не являющаяся нильпотентной, то множество $\pi_{_G}$ конечно [6], а множество $\Pi_{_G}$ в ряде случаев бесконечно. Так, например, для произвольной полициклической группы G множество $\Pi_{_G}$ состоит из всех простых чисел [7], а для финитно аппроксимируемой разрешимой минимаксной группы G множество $\Pi_{_G}$ состоит из почти всех простых чисел (см., например, [16], п. 5.3.9).

Таким образом, для разрешимых групп конечного ранга (даже при отсутствии кручения) условие $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости оказывается значительно более жестким по сравнению с условием почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости. Свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для таких групп не исследовано, а для свойства почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости (при условии конечности множества π) в [18] найдено необходимое и достаточное условие в терминах π-полноты элементов.

2. Доказательство теорем

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующем утверждении, доказанном А. И. Мальцевым (см. [9], лемма 2).

Если G — нильпотентная группа ступени c, то для каждого целого положительного числа n из любого элемента степенной подгруппы G^{n^c} в группе G можно извлечь корень степени n.

Это утверждение будем далее называть леммой Мальцева. Заметим, что для конечно порожденных разрешимых групп лемма Мальцева обратима [13].

Переходя к доказательству теорем 1 и 2, введем ряд обозначений. Пусть G — нильпотентная группа, и все ее степенные подгруппы финитно отделимы. Последнее условие означает, что для каждого целого положительного числа n фактор-группа G/G^n финитно аппроксимируема. Пусть, далее, π — непустое множество простых чисел, $\omega_\pi(G)$ — множество всех π-полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ — пересечение всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Введенные выше обозначения сохраняются всюду в этом разделе.

Покажем сначала, что
$$\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G). \tag{1}$$

В самом деле, пусть $a \in \omega_\pi(G)$, т. е. a — π-полный элемент группы G. И пусть F — нормальная подгруппа группы G конечного π-индекса. Так как в конечной π-группе G/F, очевидно, нет π-полных элементов отличных от 1, а элемент aF наследует π-полноту от элемента a, то $aF = 1$, т. е. $a \in F$. Следовательно, $a \in \sigma_\pi(G)$. Таким образом, мы видим, что $\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G)$.

Теперь для доказательства равенства (1) остается проверить, что любой элемент a группы G, не принадлежащий $\omega_\pi(G)$, не принадлежит и некоторой нормальной подгруппе конечного π-индекса группы G. Так как элемент a не является π-полным, то для некоторого π-числа n уравнение $x^n = a$ не разрешимо в группе G. Отсюда по лемме Мальцева следует, что элемент a не принадлежит степенной подгруппе

$H = G^{n^c}$, где c — ступень нильпотентности группы G. Так как G/H — финитно аппроксимируемая π-группа, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что aH — неединичный элемент группы G/H, следует, что в группе G/H существует нормальная подгруппа F/H конечного π-индекса, не содержащая элемент aH. Тогда F — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G, не содержащая элемент a. Равенство (1) доказано.

Так как $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G, очевидно, равносильна условию $\sigma_\pi(G) = 1$, то из равенства (1) следует справедливость теоремы 1.

Для доказательства теоремы 2 будем использовать все введенные выше обозначения и предполагать дополнительно, что π не совпадает с множеством $\mathcal{P}$ всех простых чисел. Как и в формулировке теоремы 2 через π' будем обозначать дополнение множества π в множестве $\mathcal{P}$, а через T — π'-компоненту группы G, т. е. множество всех элементов группы G, порядки которых конечны и являются π'-числами. Так как группа G нильпотентна, то T — подгруппа группы G.

Покажем, что следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.
2. Подгруппа T конечна, и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.
3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством $\omega_\pi(G)$.

Предположим сначала, что выполняется условие 1, т. е. что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Обозначим через P какую-нибудь $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G. Без потери общности можно считать, что P нормальна в G. Так как в любой $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группе, очевидно, нет π'-кручения, то $T \cap P = 1$. Отсюда и из того, что индекс подгруппы P в группе G конечен, следует, что подгруппа T конечна. Очевидно, что если порядок элемента группы конечен и является π'-числом, то этот элемент является π-полным. Поэтому все элементы из T являются π-полными, т. е. $T \subseteq \omega_\pi(G)$. Для доказательства обратного включения обозначим через L/P π-компоненту конечной нильпотентной группы G/P. Тогда L — нормальная подгруппа группы G, содержащая P, индекс $l = [G : L]$ является π'-числом, а индекс $[L : P]$ является π-числом. Из последнего обстоятельства и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы P следует $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы L [8]. Пусть a — произвольный элемент из $\omega_\pi(G)$. Так как a — π-полный элемент группы G, и L — нормальная подгруппа группы G индекса l, то a^l — π-полный элемент группы L. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы L по теореме 1 следует, что $a^l = 1$. Так как l — π'-число, то последнее равенство означает, что $a \in T$. Тем самым доказано, что $\omega_\pi(G)$ содержится в T. Мы видим, таким образом, что подгруппа T конечна и $\omega_\pi(G) = T$. Иными словами, выполняется условие 3.

Пусть теперь выполняется условие 3, т. е. подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_\pi(G)$. Тогда в силу равенства (1) подгруппа T совпадает с пересечением всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Отсюда следует, что в фактор-группе G/T пересечение всех нормальных подгрупп конечного π-индекса тривиально, т. е. что группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Мы видим, что выполняется условие 2.

Предположим теперь, что выполняется условие 2, т. е. что подгруппа T конечна и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Обозначим через m порядок подгруппы T. Рассмотрим степенную подгруппу $F = G^{m^c}$, где c — ступень нильпотентности группы G. По условию фактор-группа G/F финитно аппроксимируема. Пусть $t \in T \cap F$. Поскольку $t \in T$ и $\mid T \mid = m$, то $t^m = 1$. Так как $t \in F$, то по лемме Мальцева $t = g^m$ для некоторого элемента g из G. Из последних двух равенств следует, что $g^{m^2} = 1$. Отсюда и из того, что $m = |T|$ — π'-число, следует, что $g \in T$. Но тогда $g^m = 1$, т. е. $t = 1$. Таким образом, $T \cap F = 1$. Поэтому естественный гомоморфизм ε группы G на фактор-группу G/F инъективен на подгруппе T. Так как $T\varepsilon$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/F, то существует гомоморфизм φ группы G/F на конечную группу K, инъективный на $T\varepsilon$. Тогда произведение $\varepsilon\varphi$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу K, инъективным на T. Поэтому ядро N гомоморфизма $\varepsilon\varphi$ является подгруппой конечного индекса группы G, и при этом $N \cap T = 1$. Отсюда следует, что естественный гомоморфизм ρ группы G на фактор-группу G/T инъективен на N. Поэтому группа N вложима в группу G/T. Отсюда и из того, что по условию G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, следует, что и N $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Таким образом, N — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G. Следовательно, G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, т. е. выполняется условие 1. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Мальцев А. И., “Обобщённо нильпотентные алгебры и их присоединённые группы”, *Мат. сб.*, **25**:3 (1949), 347–366; [Malcev A. I., “Obobshchyonno nilpotentnye algebry i ikh prisoedinyonnye gruppy”, *Mat. sb.*, **25**:3 (1949), 347–366, (in Russian).]

[2] Chandler B., Magnus W., *The history of combinatorial group theory*, Springer, 1982.

[3] Мальцев А. И., “Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами”, *Мат. сб.*, **8**:3 (1940), 405–422; [Malcev A. I., “Ob izomorfnom predstavlenii beskonechnykh grupp matritsami”, *Mat. sb.*, **8**:3 (1940), 405–422, (in Russian).]

[4] Hirsh K. A., “On infinite soluble groups”, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 81–85.

[5] Learner A., “Residual properties of polycyclic groups”, *J. Math.*, **8** (1964), 536–542.

[6] Сексенбаев К., “К теории полициклических групп”, *Алгебра и логика*, **4**:3 (1965), 79–83; [Seksenbaev K., “K teorii policiklicheskih grupp”, *Algebra i logika*, **4**:3 (1965), 79–83, (in Russian).]

[7] Шмелькин А. И., “Полициклические группы”, *Сиб. мат. ж.*, **9** (1968), 234–235; [Smelkin A. L., “Politsiklicheskie gruppy”, *Sib. mat. zh.*, **9** (1968), 234–235, (in Russian).]

[8] Gruenberg K. W., “Residual properties of infinite soluble groups”, *Proc. London Math. Soc.*, **3(7)**:25 (1957), 29–62.

[9] Мальцев А. И., “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та*, **18(5)**, 1958, 49–60; [Malcev A. I., “O gomomorfizmah na konechnye gruppy”, *Uchen. zap. Ivan. gos. ped. in-ta*, **18(5)**, 1958, 49–60, (in Russian).]

[10] Азаров Д. Н., “Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга”, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:2 (2014), 50–55; [Azarov D. N., “Some Residual Properties of Finite Rank Groups”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21**:2 (2014), 50–55, (in Russian).]

[11] Мальцев А. И., “О группах конечного ранга”, *Мат. сб.*, **22(2)** (1948), 351–352; [Malcev A. I., “O gruppah konechnogo ranga”, *Mat. sb.*, **22(2)** (1948), 351–352, (in Russian).]

[12] Азаров Д. Н., “Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп”, *Известия ВУЗов. Математ.*, 2014, № 8, 18–29; English transl.: Azarov D. N., “Approximability of finite rank soluble groups by certain classes of finite groups”, *Mathematics (Iz. VUZ)*, **58**:8 (2014), 15–23.

[13] Lennox J., Wiegold C., "Converse of theorem of Mal'cev on nilpotent groups", *Math. Z.*, **139(1)** (1974), 85–86.

[14] Розов А. В., "О нильпотентных группах конечного ранга", *Математика и ее приложения. Журн. Иван. Мат. Общ.*, **1(9)** (2012), 41; [Rozov A. V., "O nilpotentnykh gruppakh konechnogo ranga", *Matematika i ee prilozheniya. Zhurn. Ivan. Mat. Obshch.*, **1(9)** (2012), 41, (in Russian).]

[15] Азаров Д. Н., Васькова И. Г., "О финитной аппроксимируемости нильпотентных групп", *Учен. тр. ИвГУ. Математика*, **6** (2008), 9–16; [Azarov D. N. Vaskova I. G., "O finitnoy approksimiruemosti nilpotentnykh grupp", *Uchen. tr. IvGU. Matematika*, **6** (2008), 9–16, (in Russian).]

[16] Lennox J., Robinson D., *The theory of infinite soluble groups*, Clarendon press, Oxford., 2004.

[17] Lubotzki. A., Mann A., "Residually finite groups of finite rank", *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.*, **106(3)** (1989), 385–388.

[18] Азаров Д. Н., "Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга", *Чебышевский сборник*, **15**, 2014, 7–18; [Azarov D. N., "Nekotorye approksimatsionnye svoystva razreshimykh grupp konechnogo ranga", *Chebyshevskiy sbornik*, **15**, 2014, 7–18, (in Russian).]

[19] Азаров Д. Н., "О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп конечного ранга", *Вест. Иван. гос. ун-та*, **2** (2011), 80–85; [Azarov D. N., "O pochti approksimiruemosti konechnymi p-gruppami nekotorykh razreshimykh grupp konechnogo ranga", *Vest. Ivan. gos. un-ta*, **2** (2011), 80–85, (in Russian).]

[20] Азаров Д. Н., "Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга", *Вест. Иван. гос. ун-та*, **3** (2001), 103–105; [Azarov D. N., "Ob approksimiruemosti konechnymi p-gruppami grupp konechnogo ranga", *Vest. Ivan. gos. un-ta*, **3** (2001), 103–105, (in Russian).]

Residual Properties of Nilpotent Groups

Azarov D. N.

Ivanovo State University, Ermaka str., 39, Ivanovo, 153025, Russia

Keywords: nilpotent group, finite rank group, residually finite p-group.

Let π be a set of primes. Recall that a group G is said to be a residually finite π-group if for every nonidentity element a of G there exists a homomorphism of the group G onto some finite π-group such that the image of the element a differs from 1. A group G will be said to be a virtually residually finite π-group if it contains a finite index subgroup which is a residually finite π-group. Recall that an element g in G is said to be π-radicable if g is an m-th power of an element of G for every positive π-number m. Let N be a nilpotent group and let all power subgroups in N are finitely separable. It is proved that N is a residually finite π-group if and only if N has no nonidentity π-radicable elements. Suppose now that π does not coincide with the set Π of all primes. Let π' be the complement of π in the set Π. And let T be a π' component of N i.e. T be a set of all elements of N whose orders are finite π'-numbers. We prove that the following three statements are equivalent: (1) the group N is a virtually residually finite π-group; (2) the subgroup T is finite and quotient group N/T is a residually finite π-group; (3) the subgroup T is finite and T coincides with the set of all π-radicable elements of N.

Сведения об авторе:
Азаров Дмитрий Николаевич,
Ивановский государственный университет,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
orcid.org/0000-0001-9386-6927