МАТЕМАТИКА

УДК 512.543
DOI 10.17223/19988621/35/1

Д.Н. Азаров

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Для произвольной абелевой группы получено необходимое и достаточное условие почти аппроксимируемости конечными π-группами. Получена также характеризация мощных абелевых групп.

Ключевые слова: *абелева группа, финитно аппроксимируемая группа.*

Введение

Пусть K – некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса K (или, короче, K-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса K, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом K, если она содержит K-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если F обозначает класс всех конечных групп, то понятие F-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство F_π-аппроксимируемости, где π – некоторое множество простых чисел, F_π – класс всех конечных π-групп. Напомним, что конечная группа называется конечной π-группой, если ее порядок является π-числом, т.е. если все его простые делители принадлежат множеству π. Если π состоит из всех простых чисел, то понятие F_π-аппроксимируемости совпадает с понятием финитной аппроксимируемости. Очевидно, что группа G финитно аппроксимируема (F_π-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда пересечение всех подгрупп конечного индекса (всех нормальных подгрупп конечного π-индекса) группы G совпадает с единичной подгруппой. Очевидно также, что произвольная F_π-аппроксимируемая группа является почти F_π-аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти F-аппроксимируемая (и, в частности, любая почти F_π-аппроксимируемая) группа является F-аппроксимируемой. Действительно, если H – подгруппа конечного индекса группы G, то любая подгруппа конечного индекса группы H имеет конечный индекс в G, и поэтому из финитной аппроксимируемости группы H следует финитная аппроксимируемость группы G.

Таким образом, свойство почти F_π-аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и F_π-аппроксимируемостью. Особый интерес представляет случай, когда множество π состоит из одного простого числа p. В этом случае класс F_π совпадает с классом F_p всех конечных p-групп.

Понятие финитно аппроксимируемой группы было введено еще А. И. Мальцевым в [1]. В этой работе доказана финитная аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Частным случаем этой теоремы является результат К. Гирша [2] о финитной аппроксимируемости произвольной полициклической группы. В дальнейшем выяснилось, что полициклические группы почти F_p-аппроксимируемы для каждого простого числа p [3]. Свойством F_p-аппроксимируемости полициклические группы, вообще говоря, не обладают, и соответствующий критерий получить до сих пор не удается. Еще сложнее дело обстоит с изучением финитной аппроксимируемости и других аппроксимационных свойств разрешимых групп. Некоторые результаты о разрешимых группах конечного ранга, полученные в этом направлении, упомянуты ниже. Для абелевых групп вопросы F_π-аппроксимируемости и почти F_π-аппроксимируемости полностью исследованы. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Пусть, как и выше, π – непустое множество простых чисел. В исследованиях F_π-аппроксимируемости абелевых групп и некоторых разрешимых групп особое значение имеет понятие π-полного элемента группы. Напомним, что элемент a группы G называется π-полным (или, в другой терминологии, π-радикабельным), если для любого целого положительного π-числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Если множество π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие π-полного элемента совпадает с классическим понятием полного элемента. В теории абелевых групп вместо термина «полный элемент» используется также термин «делимый элемент». Если множество π состоит из одного простого числа p, то вместо термина «π-полный элемент» используют термин «p-полный элемент».

Связь финитной аппроксимируемости группы с полнотой ее элементов впервые была обнаружена еще А.И. Мальцевым в [4], где он заметил, что в произвольной финитно аппроксимируемой группе нет полных элементов отличных от 1 и что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных элементов отличных от 1. Это простое утверждение легко проверяется с помощью хорошо известной теоремы Прюфера о разложимости периодической абелевой группы с ограниченными порядками элементов в прямое произведение циклических. Более того, теорема Прюфера позволяет обобщить утверждение А.И. Мальцева на случай F_π-аппроксимируемости следующим образом [5].

Теорема 1. Пусть G – абелева группа. И пусть π – множество простых чисел. Группа G F_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов отличных от 1.

Эта теорема является простым следствием следующего утверждения, доказанного ниже.

Лемма. Пусть G – абелева группа, π – множество простых чисел, $\omega_\pi(G)$ – множество всех π-полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ – пересечение всех подгрупп конечного π-индекса группы G. Тогда $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$.

Рассмотрим теперь вопрос о почти F_π-аппроксимируемости для абелевых групп. В случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, свойство почти F_π-аппроксимируемости совпадает со свойством почти F-аппроксимируемости, которое, как легко видеть, равносильно свойству F-аппроксимируемости, и поэтому в данном случае поставленный вопрос решается упомянутой выше теоремой Мальцева. Теперь мы можем предполагать, что π не совпадает с множеством всех простых чисел. При этом предположении здесь доказан следующий критерий почти F_π-аппроксимируемости абелевых групп.

Теорема 2. Пусть G – абелева группа; π – множество простых чисел, не совпадающее с множеством Π всех простых чисел; π' – дополнение множества π в множестве Π. И пусть T – π'-компонента группы G, т. е. множество всех элементов группы G, порядки которых конечны и являются π'-числами. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти F_π-аппроксимируема.
2. Подгруппа T конечна и фактор-группа G/T F_π-аппроксимируема.
3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством всех π-полных элементов группы G.

В качестве следствия из теоремы 2 приведем следующее утверждение, дающее полную информацию о месте F_π-аппроксимируемых групп среди почти F_π-аппроксимируемых абелевых групп.

Следствие. Пусть G – абелева группа. И пусть π, π' и T такие же, как в теореме 2. Группа G является F_π-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она почти F_π-аппроксимируема и $T = 1$. В частности, для абелевой группы без кручения свойства F_π-аппроксимируемости и почти F_π-аппроксимируемости равносильны между собой.

Необходимость в этом утверждении очевидна, так как в любой F_π-аппроксимируемой группе нет π'-кручения. Для проверки достаточности предположим, что абелева группа G почти F_π-аппроксимируема и что $T = 1$. Тогда по теореме 2 фактор-группа G/T F_π-аппроксимируема. Отсюда и из того, что $T = 1$, следует F_π-аппроксимируемость группы G.

Заметим, что теорема 1 не может быть распространена с абелевых групп на нильпотентные группы. Соответствующий пример был подсказан автору настоящей работы А.Л. Шмелькиным и представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы кватернионов с объединенными центрами. Такая группа не является финитно аппроксимируемой, но при этом в ней нет полных элементов, кроме 1. С другой стороны, в работе [5] теорема 1 без каких-либо изменений переносится на произвольную нильпотентную группу конечного ранга, т. е. на нильпотентную группу, для которой существует целое положительное число r такое, что любая ее конечно порожденная подгруппа порождается не более чем r элементами.

На разрешимые группы конечного ранга теорема 1 уже не может быть распространена, но она оказывается справедливой для разрешимых групп конечного ранга в случае, когда множество π совпадает с множеством всех простых чисел. Критерий финитной аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга в терминах полноты элементов был получен еще Д. Робинсоном (см., например, [6, п. 5.3.2]). Для произвольного множества π простых чисел вопрос об F_π-аппроксимируемости разрешимой группы G конечного ранга не исследован даже в простейшем случае, когда группа G является полициклической, а множество π состоит из одного простого числа. Значительно лучше изучен вопрос о почти F_π-аппроксимируемости разрешимых групп конечного ранга (см., например, [7, 8]).

Среди финитно аппроксимируемых групп особое место занимают мощные группы, т. е. группы, все элементы которых являются мощными. Напомним, что элемент a бесконечного (конечного) порядка группы G называется мощным, если для каждого натурального числа n (для каждого натурального делителя n порядка элемента a) существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором порядок образа элемента a равен n.

Мощные абелевы группы могут быть легко описаны в терминах полноты элементов следующим образом.

Теорема 3. Абелева группа G является мощной тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема и не содержит p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого числа p.

Выше отмечалось, что теорема 1 доказана в работе [5]. Здесь доказаны теоремы 2 и 3. В процессе их доказательства будет заново доказана и теорема 1.

Доказательство теорем

1. Доказательство леммы. Пусть G – абелева группа, π – непустое множество простых чисел, $\omega_\pi(G)$ – множество всех π-полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ – пересечение всех подгрупп конечного π-индекса группы G. Введенные здесь обозначения сохраняются всюду в этой статье. Докажем справедливость сформулированной выше леммы, т.е. покажем, что $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$.

В самом деле, пусть a – произвольный элемент из $\omega_\pi(G)$, т.е. a – π-полный элемент группы G. И пусть F – подгруппа группы G конечного π-индекса. Так как в конечной π-группе G/F, очевидно, нет π-полных элементов отличных от 1, а элемент aF наследует π-полноту от элемента a, то $aF = 1$, т. е. a принадлежит F. Следовательно, a принадлежит $\sigma_\pi(G)$. Таким образом, мы видим, что $\omega_\pi(G)$ содержится в $\sigma_\pi(G)$.

Теперь для доказательства равенства $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$ остается проверить, что любой элемент a группы G, не принадлежащий $\omega_\pi(G)$, не принадлежит и некоторой подгруппе конечного π-индекса группы G. Так как элемент a не является π-полным, то он не принадлежит некоторой степенной подгруппе $H = G^n$ группы G, где n – π-число. Так как G/H – абелева π-группа с ограниченными порядками элементов, то по хорошо известной теореме Прюфера (см., например, [9, с. 85]) группа G/H раскладывается в прямое произведение циклических π-подгрупп. Поэтому группа G/H F_π-аппроксимируема. Отсюда и из того, что aH – неединичный элемент группы G/H следует, что в группе G/H существует подгруппа F/H конечного π-индекса, не содержащая элемент aH. Тогда F – подгруппа конечного π-индекса группы G, не содержащая элемент a. Равенство $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$ доказано.

2. Доказательство теоремы 1. Так как F_π-аппроксимируемость группы G, очевидно, равносильна условию $\sigma_\pi(G) = 1$, то справедливость теоремы 1 вытекает из доказанной выше леммы, утверждающей, что $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$.

3. Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 будем далее предполагать, что π не совпадает с множеством Π всех простых чисел. Как и в формулировке теоремы 2 через π' будем обозначать дополнение множества π в множестве Π, а через T – π'-компоненту группы G. Покажем, что следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти F_π-аппроксимируема.
2. Подгруппа T конечна и фактор-группа G/T F_π-аппроксимируема.

3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством $\omega_\pi(G)$.

Предположим сначала, что выполняется условие 1, т. е. что G почти F_π-аппроксимируема. Обозначим через P какую-нибудь F_π-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G. Так как в любой F_π-аппроксимируемой группе, очевидно, нет π'-кручения, то пересечение подгрупп T и P тривиально. Отсюда и из того, что индекс подгруппы P в группе G конечен, следует, что подгруппа T конечна. Очевидно, что если порядок элемента группы конечен и является π'-числом, то этот элемент является π-полным. Поэтому все элементы из T являются π-полными, т.е. T содержится в $\omega_\pi(G)$. Для доказательства обратного включения обозначим через L подгруппу группы G, содержащую P и такую, что индекс $l = [G : L]$ является π'-числом, а индекс $[L : P]$ является π-числом. Из последнего обстоятельства и F_π-аппроксимируемости группы P следует F_π-аппроксимируемость группы L. Пусть a – произвольный элемент из $\omega_\pi(G)$. Так как a – π-полный элемент группы G, и L – подгруппа группы G индекса l, то a^l – π-полный элемент группы L. Отсюда и из F_π-аппроксимируемости группы L по теореме 1 следует, что $a^l = 1$. Так как l – π'-число, то последнее равенство означает, что a принадлежит T. Тем самым доказано, что $\omega_\pi(G)$ содержится в T. Мы видим, таким образом, что подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_\pi(G)$. Иными словами, выполняется условие 3.

Пусть теперь выполняется условие 3, т. е. подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_\pi(G)$. Тогда в силу доказанного выше равенства $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$ (см. лемму) подгруппа T совпадает с пересечением всех подгрупп конечного π-индекса группы G. Отсюда следует, что в фактор-группе G/T пересечение всех подгрупп конечного π-индекса тривиально, т. е. что группа G/T F_π-аппроксимируема. Мы видим, что выполняется условие 2.

Предположим теперь, что выполняется условие 2, т. е. что подгруппа T конечна и фактор-группа G/T F_π-аппроксимируема. Обозначим через m порядок подгруппы T. Пусть элемент t принадлежит пересечению подгрупп T и G^m. Поскольку элемент t содержится в подгруппе T порядка m, то $t^m = 1$. Так как t принадлежит еще и подгруппе G^m, то $t = g^m$ для некоторого элемента g из G. Из последних двух равенств следует, что порядок элемента g делит m^2. Отсюда и из того, что $m = |T|$ – π'-число, следует, что g содержится в T. Но тогда $g^m = 1$, т. е. $t = 1$. Таким образом, пересечение подгрупп T и G^m тривиально. По теореме Прюфера фактор-группа G/G^m раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и поэтому является финитно аппроксимируемой группой. Поскольку пересечение подгрупп T и G^m тривиально, то естественный гомоморфизм ε группы G на фактор-группу G/G^m инъективен на подгруппе T. Так как $T\varepsilon$ – конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/G^m, то существует гомоморфизм φ группы G/G^m на конечную группу K, инъективный на $T\varepsilon$. Тогда произведение $\varepsilon\varphi$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу K, инъективным на T. Поэтому ядро N гомоморфизма $\varepsilon\varphi$ является подгруппой конечного индекса группы G, и при этом N тривиально пересекает T. Отсюда следует, что естественный гомоморфизм ρ группы G на фактор-группу G/T инъективен на N. Поэтому группа N вложима в группу G/T. Отсюда и из того, что G/T F_π-аппроксимируема, следует, что и N F_π-аппроксимируема. Таким образом, N – F_π-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G. Следовательно, G почти F_π-аппроксимируема, т. е. выполняется условие 1. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Докажем сначала необходимость в теореме 3. Пусть G – мощная абелева группа. Очевидно, что группа G финитно аппроксимируема. Пусть a – элемент бесконечного порядка группы G. Тогда из определения мощного элемента следует, что для произвольного простого числа p существует гомоморфизм группы G на конечную группу P, при котором порядок образа элемента a равен p, причем ввиду разложимости группы P в прямое произведение примарных компонент можно считать, что P – конечная p-группа. Следовательно, элемент a не принадлежит пересечению $\sigma_p(G)$ всех подгрупп конечного p-индекса группы G, которое, как мы видели выше, совпадает с множеством $\omega_p(G)$ всех p-полных элементов группы G. Таким образом, группа G финитно аппроксимируема и не содержит p-полных элементов бесконечного порядка. Это доказывает необходимость в теореме 3.

Для доказательства достаточности в теореме 3 предположим, что абелева группа G финитно аппроксимируема и не содержит p-полных элементов бесконечного порядка ни для какого простого числа p. Покажем, что произвольный элемент a группы G является мощным. Если порядок элемента a конечен, то ввиду финитной аппроксимируемости группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, сохраняющий порядок элемента a, и тогда мощность элемента a обеспечивается тем очевидным обстоятельством, что любая конечная абелева группа является мощной. Предположим теперь, что порядок элемента a бесконечен и H – циклическая подгрупп группы G, порожденная элементом a. Покажем, что элемент a является мощным, т. е. что для каждого натурального числа n в группе G существует подгруппа N конечного индекса, высекающая в H подгруппу H^n. Доказательство этого утверждения очевидным образом сводится к доказательству того же самого утверждения для случая, когда $n = p^k$ – степень простого числа p. Пусть $m = p^{k-1}$. Элемент a^m имеет бесконечный порядок, и поэтому он не является p-полным. Таким образом, элемент a^m не принадлежит подмножеству $\omega_p(G)$, которое, как мы видели, совпадает с $\sigma_p(G)$. Поэтому существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу P, переводящий элемент a^m в элемент отличный от 1, причем мощность группы P позволяет без потери общности считать, что образ элемента a^m относительно φ имеет порядок p. Тогда порядок образа элемента a относительно φ равен n, и поэтому в качестве искомой подгруппы N можно взять ядро гомоморфизма φ. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А.И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8. № 3. С. 405–422.
2. *Hirsh K.A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
3. *Шмелькин А.Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9. С. 234–235.
4. *Мальцев А.И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. Вып. 5. С. 49–60.
5. *Азаров Д.Н.* Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21(2). С. 50–55.
6. *Lennox J.*, *Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford.: Clarendon press. 2004.
7. *Азаров Д.Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Известия вузов. Математика. 2014. № 8. С. 18–29.
8. *Азаров Д.Н.* Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. № 1(49). С. 7–18.
9. *Каргаполов М.И, Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука. 1972.

Статья поступила 15.02.2015 г.

Azarov D. N. RESIDUAL PROPERTIES OF ABELIAN GROUPS

DOI 10.17223/19988621/35/1

Let π be a set of primes. For Abelian groups, the necessary and sufficient condition to be a virtually residually finite π-group is obtained, as well as a characterization of potent Abelian groups. Recall that a group *G* is said to be a residually finite π-group if for every nonidentity element *a* of *G* there exists a homomorphism of the group *G* onto some finite π-group such that the image of the element *a* differs from 1. A group *G* is said to be a virtually residually finite π-group if it contains a finite index subgroup which is a residually finite π-group. Recall that an element *g* in *G* is said to be π-radicable if *g* is an *m*th power of an element of *G* for every positive π-number *m*. Let *A* be an Abelian group. It is well known that *A* is a residually finite π-group if and only if *A* has no nonidentity π-radicable elements. Suppose now that π does not coincide with the set Π of all primes. Let π' be the complement of π in the set Π. And let *T* be a π'-component of *A*, i.e., *T* be a set of all elements of *A* whose orders are finite π'-numbers. We prove that the following three statements are equivalent to each other: (1) the group *A* is a virtually residually finite π-group; (2) the subgroup *T* is finite and the quotient group *A* / *T* is a residually finite π-group; (3) the subgroup *T* is finite and *T* coincides with the set of all π-radicable elements of *A*.

Keywords: Abelian group, residually finite group.

AZAROV Dmitrii Nikolaevich (Candidate of Physics and Mathematics,
Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)
E-mail: azarovdn@mail.ru

REFERENCES

1. Mal'tsev A.I. Ob izomorfnom predstavlenii beskonechnykh grupp matritsami. *Mat. sb*., 1940, vol. 8, no. 3, pp. 405–422. (in Russian)
2. Hirsh K.A. On infinite soluble groups. *J. London Math. Soc*., 1952, vol. 27, pp. 81–85.
3. Shmel'kin A.L. Politsiklicheskie gruppy. *Sib. matem. zhurnal*, 1968, vol. 9, pp. 234–235. (in Russian)
4. Mal'tsev A.I. O gomomorfizmakh na konechnye gruppy. *Uchen. zap. Ivan. gos. ped. in-ta*, 1958, vol. 18, no. 5, pp. 49–60. (in Russian)
5. Azarov D.N. Nekotorye approksimatsionnye svoystva grupp konechnogo ranga. *Model. i analiz inform. sistem*, 2014, vol. 21(2), pp. 50–55. (in Russian)
6. Lennox J., Robinson D. *The theory of infinite soluble groups*. Oxford, Clarendon press, 2004.
7. Azarov D.N. Approksimiruemost' razreshimykh grupp konechnogo ranga nekotorymi klassami konechnykh grupp. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2014, no. 8, pp. 18–29. (in Russian)
8. Azarov D.N. Nekotorye approksimatsionnye svoystva razreshimykh grupp konechnogo ranga. *Chebyshevskiy sbornik*, 2014, vol. 15, no. 1(49), pp. 7–18. (in Russian)
9. Kargapolov M.I, Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*. Moskow, Nauka Publ., 1972. (in Russian)