Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 3–10

УДК **512.543**

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП И РАСЩЕПЛЯЕМЫХ РАСШИРЕНИЙ[1]

Д. Н. Азаров

Доказано, что для каждого конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа, которая аппроксимируема конечными p-группами для тех и только тех простых чисел p, которые принадлежат множеству π.

Ключевые слова: полициклическая группа, расщепляемое расширение.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента $a \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу, переводящий элемент a в неединичный элемент.

Одним из обобщений этого понятия является свойство аппроксимируемости произвольным фиксированным классом групп. Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *аппроксимируемой группами из класса* $\mathscr{K}$ (или, короче, $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1.

Если $\mathscr{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{F}$-аппроксимируемости совпадает с понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных p-групп.

В своем историческом обзоре [1] Б. Чандлер и В. Магнус свидетельствуют, что понятие финитно аппроксимируемой группы введено А. И. Мальцевым в 1940 г. в его статье «О представлении бесконечных групп матрицами» [2]. Заметим, что в этой работе термин «аппроксимируемость» еще не использовался. Этот термин был введен А. И. Мальцевым в 1949 г. в его работе [3], посвященной нильпотентным группам и алгебрам. На английском языке соответствующий термин был введен Ф. Холлом в 1955 г.

В упомянутой выше работе [2] А. И. Мальцев установил финитную аппроксимируемость произвольной конечно порожденной линейной группы. Отсюда следует, что все свободные группы и все полициклические группы финитно аппроксимируемы. Финитная аппроксимируемость полициклических групп независимо от результата Мальцева была установлена К. Гиршем [4].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

Напомним, что группа называется полициклической (сверхразрешимой), если она обладает субнормальным (нормальным) рядом с циклическими факторами. Полициклические группы являются исторически первым содержательным примером финитно аппроксимируемых групп. Вопрос об их $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости не исследован, но в работе А. Л. Шмелькина [5] устанавливается следующее свойство полициклических групп, являющееся промежуточным между $\mathscr{F}$-аппроксимируемостью и $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемостью.

Любая полициклическая группа почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

Напомним, что группа G называется почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой, если она содержит $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Вопрос об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп полностью исследован только для некоторых классов полициклических групп, например, для класса конечно порожденных нильпотентных групп и для более широкого класса сверхразрешимых групп. Еще в работе К. Грюнберга [6] была доказана следующая теорема.

Любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

Для произвольной конечно порожденной нильпотентной группы соответствующий критерий формулируется следующим образом (см., например, [7]).

Конечно порожденная нильпотентная группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются p-элементами.

Элемент конечного порядка мы называем p-элементом, если его порядок является степенью числа p.

Вопрос об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости сверхразрешимых групп сводится к аналогичному вопросу для конечно порожденных нильпотентных групп следующим образом.

Если сверхразрешимая группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для нечетного простого числа p, то она нильпотентна. Сверхразрешимая группа $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются 2-элементами. В частности, любая сверхразрешимая группа без кручения $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема.

Этот результат был получен автором настоящей статьи совместно с Д. И. Молдаванским в работе [8].

По-видимому, единственным результатом общего характера об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы на протяжении многих лет продолжает оставаться следующая знаменитая теорема К. Сексенбаева [9].

Если полициклическая группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она является нильпотентной группой без кручения.

Для произвольной группы G через π_G будем обозначать множество всех простых чисел p, для которых группа G является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Из сформулированных выше результатов Сексенбаева и Грюнберга непосредственно вытекает следующее утверждение.

Для полициклической группы G множество π_G либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел.

В связи с этим утверждением здесь будет доказана следующая

Теорема 1. *Для произвольного конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа G такая, что $\pi_G = \pi$.*

При исследовании полициклических групп особое значение имеет конструкция расщепляемого расширения. Напомним, что группа P называется расщепляемым расширением группы G с помощью группы T, если G — нормальная подгруппа группы P, T — подгруппа группы P, $P = GT$ и $G \cap T = 1$. Хорошо известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью бесконечной циклической группы расщепляемо. Поэтому, если в полициклической группе G рассмотреть субнормальный ряд

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G \tag{1}$$

с циклическими факторами, то для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ группа G_k является либо конечным расширением группы G_{k-1}, либо расщепляемым расширением группы G_{k-1} с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому сформулированные выше результаты Гирша и Шмелькина о полициклических группах могут быть легко доказаны индукцией по n с помощью следующего результата.

Расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}$-аппроксимируемой (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группы с помощью $\mathscr{F}$-аппроксимируемой (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группы само является $\mathscr{F}$-аппроксимируемой (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группой.

В части, касающейся $\mathscr{F}$-аппроксимируемости это утверждение доказано А. И. Мальцевым в работе [10]. Вторая половина этой теоремы доказана автором настоящей статьи в работе [11].

Простые примеры показывают, что расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы не обязано быть $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой. Для такого расщепляемого расширения здесь будет доказано следующее достаточное условие $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости.

Теорема 2. *Пусть P — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы G с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы T. Если подгруппа T субнормальна в группе P, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.*

Так как в нильпотентной группе все подгруппы субнормальны, а в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения существует нормальный ряд с бесконечными циклическими факторами, то в любой конечно порожденной нильпотентной группе G без кручения существует нормальный ряд вида (1) такой, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ группа G_k является расщепляемым расширением группы G_{k-1} с помощью бесконечной циклической субнормальной подгруппы. Поэтому результат Грюнберга о $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости конечно порожденной нильпотентной группы без кручения может быть легко доказан с помощью теоремы 2 индукцией по длине ряда (1).

Поиск необходимого и достаточного условия $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости расщепляемых расширений, по-видимому, является трудной задачей. Об этом свидетельствует тот факт, что соответствующие критерии, полученные для самых простых частных случаев, формулируются и доказываются нетривиально.

Так, например, в работе [12] получен критерий $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости расщепляемого расширения свободной абелевой группы конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Для его формулировки введем следующие обозначения. Пусть G — свободная абелева группа конечного ранга, φ — автоморфизм группы G. И пусть P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы $T = (t)$. Это означает, что группа P представляет собой расщепляемое расширение группы G с помощью группы T, и для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство $t^{-1}gt = g\varphi$. Обозначим через $h(x)$ характеристический многочлен автоморфизма φ. В [12] доказано, что группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $f(1)$ для любого неприводимого делителя $f(x) \in Z[x]$ многочлена $h(x)$. В случае, когда ранг свободной абелевой группы G равен 2, критерий $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости группы P допускает следующую более простую формулировку.

Теорема 3. *Пусть G — свободная абелева группа ранга 2, φ — автоморфизм группы G, P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы T. И пусть A — матрица автоморфизма φ в некотором базисе группы G, E — единичная 2×2-матрица. Если $\det(A + E) \neq 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $\det(A - E)$. Если же $\det(A + E) = 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $p = 2$.*

Эта теорема может быть доказана с помощью сформулированного выше критерия $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости полупрямого произведения свободной абелевой группы конечного ранга и бесконечной циклической группы. Независимое доказательство теоремы 3 приведено в разделе 2.

Непосредственным следствием теоремы 3 является следующий результат.

Следствие. *Пусть π — произвольное конечное множество простых чисел, и m — произведение всех чисел из π. Если полупрямое произведение P свободной абелевой группы G ранга 2 и бесконечной циклической группы T задается с помощью автоморфизма φ группы G, имеющего в некотором базисе группы G матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m+2 \end{pmatrix},$$

то $\pi_P = \pi$.

Отсюда следует справедливость теоремы 1. Поэтому в доказательстве нуждаются только теоремы 2 и 3.

2. Доказательство теоремы 3

Пусть G — свободная абелева группа ранга 2, φ — автоморфизм группы G, P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы $T = (t)$. Тогда P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы T, и для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство $t^{-1}gt = g\varphi$. Обозначим через A матрицу автоморфизма φ в некотором базисе группы G, а через E — единичную 2×2-матрицу. Докажем теорему 3, т. е. следующие два утверждения.

1. *Если $\det(A + E) \neq 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $\det(A - E)$.*

2. *Если $\det(A + E) = 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $p = 2$.*

Пусть $\gamma_n(P)$ — n-й член нижнего центрального ряда группы P (где, напомним, $\gamma_1(P) = P$ и $\gamma_{n+1}(P)$ — взаимный коммутант $\gamma_n(P)$ и P).

Покажем, что для любого $n \geqslant 2$ подгруппа $\gamma_n(P)$ совпадает с подгруппой $G(\varphi - id)^{n-1}$, т. е. с образом группы G относительно ее эндоморфизма $(\varphi - id)^{n-1}$, где id — тождественный эндоморфизм группы G. Сразу заметим, что это утверждение мы докажем без предположения о двупорожденности группы G. Для нас здесь существенна только ее коммутативность, которая позволяет использовать стандартные операции сложения и умножения в кольце эндоморфизмов группы G.

Пусть $n \geqslant 2$. Тогда, как легко видеть, $\gamma_n(P) \leqslant G$ и произвольный элемент из подгруппы $\gamma_n(P)(\varphi - id)$ имеет вид

$$a(\varphi - id) = t^{-1}ata^{-1},$$

где $a \in \gamma_n(P)$. Поэтому $\gamma_n(P)(\varphi - id) \subseteq \gamma_{n+1}(P)$. Верно и обратное включение. В самом деле, $\gamma_{n+1}(P)$ порождается элементами вида

$$t^{-k}at^{k}a^{-1} \quad (a \in \gamma_n(G),\ k \in \mathbb{Z}),$$

и эти элементы принадлежат $\gamma_n(P)(\varphi - id)$, так как для любого элемента $a \in \gamma_n(P)$ и для любого целого положительного числа l

$$t^{-l}at^{l}a^{-1} = a(\varphi^{l} - id) = a(id + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(P)(\varphi - id);$$

$$\begin{aligned} t^{l}at^{-l}a^{-1} = a(\varphi^{-l} - id) &= a(-\varphi^{-l})(\varphi^{l} - id) \\ &= a(-\varphi^{-l})(id + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(P)(\varphi - id). \end{aligned}$$

Таким образом, $\gamma_{n+1}(P) = \gamma_n(P)(\varphi - id)$ при всех $n \geqslant 2$. Аналогично проверяется, что $\gamma_2(P) = G(\varphi - id)$. Из последних двух обстоятельств следует, что для каждого $n \geqslant 2$

$$\gamma_n(P) = G(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}. \tag{2}$$

Хорошо известно, что если эндоморфизм ψ свободной абелевой группы V конечного ранга инъективен, то индекс $[V : V\psi]$ совпадает с модулем определителя матрицы эндоморфизма ψ. Отсюда и из того, что матрица эндоморфизма $(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}$ совпадает с матрицей $(A - E)^{n-1}$, следует, что если число $d = \det(A - E)$ отлично от нуля, то

$$\big[G : G(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}\big] = |\det(A - E)|^{n-1} = |d|^{n-1},$$

и тогда в силу (2) для каждого $n \geqslant 2$

$$[G : \gamma_n(P)] = |d|^{n-1}. \tag{3}$$

Обозначим через $\pi(d)$ множество всех простых делителей числа d, а через π_{P} — множество всех простых чисел p, для которых группа P $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Эти обозначения позволяют переформулировать теорему 3 следующим образом.

1. *Если* $\det(A + E) \neq 0$, *то* $\pi_{P} = \pi(d)$.

2. *Если* $\det(A + E) = 0$, *то* $\pi_{P} = \{2\}$.

Для доказательства первой части теоремы проверим сначала, что

$$\det(A + E) \neq 0 \wedge d \neq 0 \Longrightarrow \pi_{P} = \pi(d). \tag{4}$$

В самом деле, пусть $\det(A + E) \neq 0$ и $d \neq 0$. Так как $\det(A \pm E) \neq 0$, то для любого неединичного элемента $h \in G$ имеем $h(\varphi \pm \mathrm{id}) \neq 1$, т. е. $t^{-1}ht \neq h^{\pm 1}$. Поэтому в G нет неединичных циклических подгрупп, инвариантных в P.

Покажем сначала, что $\pi(d) \subseteq \pi_{P}$. Пусть $p \in \pi(d)$. Так как $d \neq 0$, то в силу (3) для каждого $n \geqslant 2$ группа $G_n = G/\gamma_n(P)$ является конечной абелевой группой порядка

$|d|^{n-1}$. Отсюда и из того, что $p \in \pi(d)$, следует, что p^{n-1} делит порядок группы G_n. Поэтому, если F_n — p-компонента группы G_n, то $|F_n| \geqslant p^{n-1}$. Пусть Q_n — произведение всех примарных компонент группы G_n, отличных от F_n. Тогда $G_n/Q_n \simeq F_n$ — конечная p-группа. Так как $Q_n \leqslant G_n = G/\gamma_n(P)$, то $Q_n = L_n/\gamma_n(P)$, где L_n — подгруппа группы G, содержащая $\gamma_n(P)$. Поскольку Q_n характеристична в G_n и G_n инвариантна в $P_n = P/\gamma_n(P)$, то Q_n инвариантна в P_n. Отсюда следует, что L_n инвариантна в P. Так как $\gamma_n(P)$ содержится в L_n, то фактор-группа P/L_n нильпотентна и, кроме того, она является расщепляемым расширением конечной p-группы

$$G/L_n \simeq (G/\gamma_n(P)) \,/\, (L_n/\gamma_n(P)) = G_n/Q_n \simeq F_n$$

с помощью субнормальной бесконечной циклической подгруппы. Поэтому группа P/L_n $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема в силу сформулированной выше теоремы 2. Так как $|G/L_n| = |F_n| \geqslant p^{n-1}$, то индексы подгрупп L_n в группе G не ограничены. Поэтому подгруппа

$$L = \bigcap_{n=2}^{\infty} L_n$$

имеет в G бесконечный индекс. Отсюда и из того, что G — свободная абелева группа ранга 2, следует, что L — циклическая группа, являющаяся, к тому же, инвариантной подгруппой группы P. Но выше отмечалось, что G не содержит неединичных циклических подгрупп инвариантных в P. Поэтому $L = 1$, т. е. P аппроксимируема фактор-группами P/L_n, которые, в свою очередь, $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы. Отсюда следует, что P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой, т. е. $p \in \pi_P$.

Покажем теперь, что $\pi_P \subseteq \pi(d)$. Предположим, что $p \in \pi_P$, и покажем, что тогда $p \in \pi(d)$. Допустим противное, т. е. допустим, что p взаимно просто с d. Пусть ρ — гомоморфизм группы P на конечную p-группу. Так как любая конечная p-группа нильпотентна, то гомоморфизм ρ проходит через естественный гомоморфизм $P \to P/\gamma_n(P)$ для достаточно большого n. Отсюда и из того, что порядок группы $G/\gamma_n(P)$ в силу (3) совпадает с числом $|d|^{n-1}$, взаимно простым с p, следует, что $G\rho = 1$. Это противоречит тому, что $p \in \pi_P$. Таким образом, $\pi_P \subseteq \pi(d)$, и утверждение (4) доказано.

Теперь для доказательства первой части теоремы нам остается проверить, что

$$\det{(A+E)} \neq 0 \,\wedge\, d = 0 \Longrightarrow \pi_P = \pi(d). \tag{5}$$

Пусть $\det{(A+E)} \neq 0$ и $d = 0$. Покажем, что $\pi_P = \pi(d)$. Так как $d = 0$, то множество $\pi(d)$ совпадает с множеством всех простых чисел. По сформулированной выше теореме Грюнберга конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p. Поэтому доказательство равенства $\pi_P = \pi(d)$ сводится к доказательству нильпотентности группы P. Так как $d = 0$, то эндоморфизм $\varphi - \mathrm{id}$ не инъективен. Отсюда и из того, что $\varphi - \mathrm{id}$ — эндоморфизм свободной абелевой группы G ранга 2 следует, что $G(\varphi - \mathrm{id})$ — циклическая группа. Но в силу (4) $G(\varphi - \mathrm{id}) = \gamma_2(P)$. Поэтому $\gamma_2(P)$ порождается некоторым элементом $h \in G$. Так как $\gamma_2(P)$ нормальна в P, то $t^{-1}ht = h^{\pm 1}$. Покажем, что $t^{-1}ht = h$. Допустим противное. Тогда $t^{-1}ht = h^{-1}$ и $h \neq 1$. Отсюда следует, что эндоморфизм $\varphi + \mathrm{id}$ не инъективен. Но это невозможно, поскольку $\det{(A+E)} \neq 0$. Таким образом, $t^{-1}ht = h$. Поэтому $\gamma_2(P)$ — центральная подгруппа группы P, и, следовательно, группа P нильпотентна. Утверждение (5) доказано.

Докажем теперь вторую часть теоремы, т. е. следующее утверждение:

$$\det{(A+E)} = 0 \Longrightarrow \pi_P = \{2\}. \tag{6}$$

Пусть $\det(A+E)=0$. Покажем, что $\pi_P=\{2\}$. Так как $\det(A+E)=0$, то в G существует неединичный элемент h такой, что $t^{-1}ht=h^{-1}$. Обозначим через x элемент группы G, являющийся корнем из h максимальной возможной степени. Так как извлечение корня в G обладает свойством однозначности и $t^{-1}ht=h^{-1}$, то $t^{-1}xt=x^{-1}$. Поэтому циклическая подгруппа X группы G, порожденная элементом x, инвариантна в G. В силу выбора элемента x подгруппа X изолирована в G. Таким образом, X — бесконечная циклическая изолированная подгруппа свободной абелевой группы G ранга 2. Поэтому G/X — бесконечная циклическая группа причем, как отмечалось выше, X инвариантна в P. Мы получаем, таким образом, в группе P нормальный ряд $1\leqslant X\leqslant G\leqslant P$ с циклическими факторами. Следовательно, группа P сверхразрешима, причем она не является нильпотентной, поскольку $t^{-1}ht=h^{-1}$. Поэтому требуемое равенство $\pi_G=\{2\}$ вытекает из следующих двух уже сформулированных выше результатов Д. И. Молдаванского и Д. Н. Азарова: любая сверхразрешимая группа без кручения $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема; если сверхразрешимая группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для нечетного простого числа p, то она нильпотентна. Утверждение (6) доказано.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть P — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы G с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы T, субнормальной в P. Покажем, что группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.

Рассмотрим сначала частный случай, когда группа G является конечной p-группой. В этом случае индекс $[P:T]$ конечен и является степенью числа p. Так как T — субнормальная подгруппа группы P, то существует последовательность

$$T=P_0\leqslant P_1\leqslant\ldots\leqslant P_n=P$$

такая, что для каждого $k=1,2,\ldots,n$ подгруппа P_{k-1} нормальна в P_k. Очевидно, что P_k/P_{k-1} — конечная p-группа. Хорошо известно и легко проверяется (см., например, [6]), что любое расширение $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью конечной p-группы само является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой. Поэтому, используя $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость группы T, индукцией по n легко видеть, что группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.

Для доказательства теоремы в общем случае достаточно для каждого неединичного элемента $f\in P$ указать нормальную подгруппу N группы P, не содержащую элемент f и такую, что фактор-группа P/N $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Если $f\notin G$, то в качестве N можно взять подгруппу G, так как $P/G\cong T$ — $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая группа. Пусть теперь $f\in G$. Так как группа G является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой, то в ней существует нормальная подгруппа R, не содержащая элемент f и такая, что G/R — конечная p-группа. Пусть теперь V — множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в группе G/R. И пусть $V(G)$ — вербальная подгруппа группы G, соответствующая множеству V. Тогда имеет место включение $V(G)\subseteq R$. Кроме того, ввиду локальной конечности любого многообразия, порожденного конечной группой (см., например, [13, гл. 5, п. 2, упр. 8]), группа $G/V(G)$ конечна, и более того, она, очевидно, является p-группой. Так как $V(G)\subseteq R$ и $f\notin R$ то $f\notin V(G)$. Так как подгруппа $V(G)$ вербальна в G и G нормальна в P, то $V(G)$ нормальна в P. При этом фактор-группа $P/V(G)$ представляет собой расщепляемое расширение конечной p-группы $G/V(G)$ с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы $TV(G)/V(G)\cong T$, причем $TV(G)/V(G)$ субнормальна в

$P/V(G)$. Поэтому в силу рассмотренного выше частного случая группа $P/V(G)$ является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Таким образом, $V(G)$ — нормальная подгруппа группы P, не содержащая элемент f и такая, что группа $G/V(G)$ является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Поэтому в качестве искомой подгруппы N можно взять $V(G)$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп.—М.: Мир, 1985.—249 с.
2. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб.—1940.—Т. 8.—С. 405–422.
3. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб.—1949.—Т. 25.—С. 347–366.
4. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc.—1952.—Vol. 27.—P. 81–85.
5. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн.—1968.—Т. 9.—С. 234–235.
6. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc.—1957.—Vol. 3 (7), № 25.—P. 29–62.
7. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 8.—С. 18–29.
8. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Научн. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.—1999.—Вып. 2.—С. 8–9.
9. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика.—1965.—Т. 4, вып. 3.—С. 79–83.
10. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та.—1958.—Т. 18.—С. 49–60.
11. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб.—2010.—Т. 11, вып. 3.—С. 11–20.
12. *Aschenbrenner M., Friedl S.* Residual properties of graph manifold groups // Topology Appl.—2011.—Vol. 158 (10).—P. 1179–1191.
13. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1972.—239 с.

Статья поступила 29 июля 2014 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
доцент кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 153025, Иваново, ул. Ермака, 37
E-mail: azarovdn@mail.ru

SOME RESIDUAL PROPERTIES OF POLYCYCLIC GROUPS AND SPLIT EXTENSIONS

Azarov D. N.

It is proved that for every finite set π of primes there exists a polycyclic group which is a residually finite p-group if and only if the number p belongs to the set π.

Key words: polycyclic group, split extension.