ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

АЗАРОВ Дмитрий Николаевич

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ И ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА И СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

Официальные оппоненты: **Ведерников Виктор Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор (ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет», профессор)

Добрынина Ирина Васильевна, доктор физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого», профессор)

Дурнев Валерий Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова», профессор)

Ведущая организация — **ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»**

Защита состоится «23» июня 2017 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А (8-й этаж), а также на сайтах http://mech.math.msu.su/ snark/index.cgi и http://istina.msu.ru/dissertations/37429402/.

Автореферат разослан «23» мая 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84 на базе МГУ член-корреспондент РАН

Шафаревич Андрей Игоревич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена изучению финитной аппроксимируемости, аппроксимируемости конечными p-группами и почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых классов групп и свободных конструкций. В работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств групп, проводимые научным коллективом, созданным Д. И. Молдавански и работающим под его руководством на кафедре алгебры и математической логики Ивановского государственного университета. Эти исследования были начаты на кафедре А. И. Мальцевым и Д. М. Смирновым более 60 лет тому назад. Становление и развитие научно-исследовательской работы в области теории групп в Ивановском государственном университете подробно описано Д. И. Молдаванским в обзорной статье [11].

Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Далее через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_p$ будем обозначать соответственно класс всех конечных групп и класс всех конечных p-групп.

Заметим, что понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости, которое было введено в 1940 году А. И. Мальцевым в его знаменитой работе "Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами" [5]. В этой работе доказана $\mathcal{F}$-аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Частным случаем этого результата является теорема К. Гирша [25], утверждающая $\mathcal{F}$-аппроксимируемость для полициклических групп. Свойством $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклические группы, вообще говоря, не обладают, но любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p [15]. Примерами $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп (для каждого простого p) служат конечно порожденные нильпотентные группы без кручения и свободные группы.

Одним из основных направлений в исследованиях аппроксимационных свойств групп является изучение поведения этих свойств относительно свободных конструкций (свободных произведений, обобщенных свободных произведений и HNN-расширений). В настоящее время мы располагаем здесь большим количеством важных и интересных результатов, полученных алгебраистами в различных странах мира.

Исследования финитной аппроксимируемости свободных конструкций групп были начаты в 1957 году К. Грюнбергом в работе [23], где он доказал, что свободное произведение любого семейства $\mathcal{F}$-аппроксимируемых ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых) групп само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группой.

Следующим шагом в изучении $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных конструкций был переход от свободных произведений к обобщенным свободным произведениям, т. е. к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Заметим, что обобщенное свободное произведение двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп может уже не быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. В 1963 году Г. Баумслаг в работе [18] доказал, что свободное произведение двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Для доказательства этого результата Г. Баумслаг сначала установил финитную аппроксимируемость обобщенного свободного произведения двух конечных групп. Позднее Б. Баумслагом и М. Треткоффом (и независимо Д. Коэном) была доказана финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы. Перечисленные результаты лежат в основе всех дальнейших исследований по финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Для этих свободных конструкций интенсивно изучается также и свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. В основе многих исследований, проводимых в этом направлении, лежит полученный Г. Хигманом [24] критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп и аналогичный критерий для HNN-расширения конечной p-группы, доказанный Д. И. Молдаванским в работе [10].

В свой фундаментальной работе [23] Грюнберг предлагает при изучении свободных произведений наряду со свойствами $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости рассматривать более общее свойство $\mathcal{K}$-аппроксимируемости, где $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, т. е. нетривиальный класс групп, замкнутый относительно подгрупп и удовлетворяющий следующему условию: если в субнормальной последовательности подгрупп $C \leq B \leq A$ факторы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе C существует подгруппа D, нормальная в A и такая, что фактор-группа A/D принадлежит

$\mathcal{K}$. Очевидно, что классы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_p$ являются корневыми. Еще одним примером корневого класса служит класс $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — некоторое множество простых чисел.

В монографии [4, п. 6.5] В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр приводят следующий результат Грюнберга, доказанный в упомянутой выше работе [23]. *Если все свободные группы аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то свободное произведение любого числа $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.* С другой стороны, в совместной работе Д. Н. Азарова и Д. Тьеджо [3] (вклад в которую первого автора более значителен) доказано следующее утверждение. *Произвольная свободная группа аппроксимируема любым корневым классом.* Поэтому результат Грюнберга приобретает следующий более "законченный" вид.

Теорема (*). *Свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само аппроксимируемо классом $\mathcal{K}$.*

Данная теорема послужила основой для многочисленных исследований аппроксимируемости свободных конструкций корневыми классами групп. Возникшее в связи с этим научное направление в настоящее время представлено целым рядом публикаций, в которых теорема (*) используется для обобщения некоторых известных результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных конструкций групп на случай аппроксимируемости произвольным корневым классом. Следует, однако, заметить, что большинство этих результатов получены по аналогии с уже известными теоремами. С другой стороны, наиболее красивые и нетривиальные результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости не верны для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, и поэтому их нельзя обобщить на аппроксимируемость произвольным корневым классом.

Многие результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, которые не верны для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, тем не менее, могут быть распространены на почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Такие результаты и их "почти $\mathcal{F}_p$-аналоги" как правило нетривиальны, им посвящена значительная часть настоящей диссертации.

Одним из первых результатов о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является следующая теорема А. Л. Шмелькина, доказанная им в 1969 году и опубликованная в работе [15]. *Произвольная полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p.* Этот, ставший уже классическим, результат в дальнейшем в том или ином виде был распространен на некоторые другие классы групп. При этом выяснилось, что в ряде случаев свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости не имеет места для всех простых p, но выполняется для всех достаточно больших простых p.

Так, например, А. И. Мальцевым (см. [8, теор. 51.2.1]) доказано, что произвольная конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Следует заметить, что свойство линейности тесно связано со свойством почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Эта связь была найдена А. Лубоцким [31], получившим характеризацию конечно порожденных линейных групп над полями нулевой характеристики в терминах близких к почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

Д. Робинсоном [30] сделано существенное продвижение в изучении аппроксимационных свойств некоторых классов разрешимых групп, содержащих все полициклические группы. В частности, им получен критерий финитной аппроксимируемости для разрешимых групп конечного ранга, являющийся далеко идущим обобщением результата Гирша о полициклических группах. Более того, в монографии [30, п. 5.3.9] доказана почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость при всех достаточно больших простых p для финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп, составляющих важный промежуточный подкласс между полициклическими группами и разрешимыми группами конечного ранга.

Цель исследования. Целью работы является получение результатов о финитной аппроксимируемости для некоторых групп и свободных конструкций, существенно обобщающих известные теоремы, а также разработка нового научного направления по распространению результатов о финитной аппроксимируемости свободных конструкций на случай почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

Научная новизна. Результаты диссертации условно можно разделить на следующие три типа.

1. Существенные обобщения известных результатов, дающих достаточные условия финитной аппроксимируемости для свободных конструкций. Многие из этих обобщений представляют собой критерии.

2. Нетривиальные аналоги известных результатов о финитной аппроксимируемости на случай почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Получение таких результатов для свободных конструкций является новым научным направлением, оно сформировалось в работах автора, и в настоящее время интенсивно разрабатывается (подготовлены две кандидатские диссертации по данной тематике).

3. Результаты об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости свободных конструкций различными корневыми классами групп. Соответсвующее научное направление восходит еще к Грюнбергу, основано на принадлежащей автору теореме (*) и в настоящее время интенсивно разрабатывается рядом исследователей.

Некоторые результаты диссертации выходят за рамки комбинаторной теории групп и относятся, в частности, к теории разрешимых групп конечного ранга.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми и сформулированы ниже в теоремах 1–22.

Методы исследования. В работе используются методы и результаты комбинаторной теории групп, и, в частности, разработанная Г. Баумслагом методика исследования финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений. В диссертации эта методика перенесена на другие виды аппроксимируемости и на другие виды свободных конструкций.

Теоретическая значимость работы. Основные результаты диссертации носят окончательный характер, многие из них являются критериями. Они подводят итог работам ряда авторов, в которых изучается аппроксимируемость некоторых классов групп и свободных конструкций различными классами групп.

Результаты и методы работы используются рядом авторов, занимающихся вопросами аппроксимируемости и почти аппроксимируемости свободных конструкций различными корневыми классами групп. В связи с этим сформировалось научное направление, представителями которого являются Д. В. Гольцов, Е. А. Иванова, А. В. Розов, Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, Д. Тьеджо и др. Соответствующие публикации этих авторов частично приведены в списке литературы диссертации. Результаты диссертации используются также зарубежными алгебраистами (см., напр., [29], [21], а также статью Б. Верфрица "Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank" [37]).

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся все основные результаты, полученные в данной диссертации, содержащиеся в сформулированных ниже теоремах 1–22.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на научно-исследовательском семинаре по алгебре (МГУ, 2016 г.); на семинаре "Теория групп" под руководством А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского и А. А. Клячко (МГУ, неоднократно);

на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (ИвГУ, неоднократно); на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (МГУ, 2008 г.); на научной конференции "Мальцевские чтения", посвященной 100-летию со дня рождения академика А. И. Мальцева (ИвГУ, 2009 г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербургский государственный университет); на XIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвященной 80-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова (Тула, 2015 г.); на Международной конференции "Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости", посвященной 75-летию Д. И. Молдаванского (ИвГУ, 2015 г.).

Публикации по теме диссертации. Работы автора по теме диссертации опубликованы в "Сибирском математическом журнале" (см. [39], [41], [48], [50]), в журнале "Математические заметки" (см. [40], [44], [52]), в журнале "Известия ВУЗов. Математика" (см. [42], [45], [51]), в журнале "Communications in Algebra" (см. [53]), во "Владикавказском математическом журнале" (см. [49]), в "Вестнике Томского государственного университета. Математика и механика" (см. [46]), в журнале "Моделирование и анализ информационных систем" (см. [38], [43], [47]), в "Чебышевском сборнике" (см. [54], [55], [56], [57]). По теме диссертации опубликовано 20 работ, из них 16 — в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Работа содержит 212 страниц печатного текста и состоит из введения, трех глав с результатами работы и заключения. Список литературы состоит из 115 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертации посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости некоторыми классами конечных групп, полученным для групп конечного ранга, разрешимых групп конечного ранга, групп автоморфизмов и расщепляемых расширений. Основные результаты первой главы сформулированы ниже в теоремах 1–8.

Начнем с трех классических теорем о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах. Первая из них принадлежит А. И. Мальцеву и утверждает, что любая конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа является хопфовой [5]. Вторая теорема, доказанная Д. М. Смирновым [14] (и независимо Г. Баумслагом [17]), утверждает, что группа автоморфизмов конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы сама является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Третья теорема принадлежит А. И. Мальцеву [7] и формулируется следующим образом: расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Во всех трех теоремах условие конечной порожденности существенно.

Одним из обобщений понятия конечно порожденной группы является понятие группы конечного общего ранга, введенное А. И. Мальцевым в работе [6]. Группа G называется группой конечного общего ранга, если существует число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

В первой главе диссертации доказано, что условие конечной порожденности, накладываемое в сформулированных выше классических теоремах Мальцева, Смирнова и Баумслага, может быть ослаблено до требования конечности общего ранга. В частности, результат Мальцева о хопфовости произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы допускает следующую более общую формулировку (см. работу автора [52]): *любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга является хопфовой.*

Рассмотрим теперь вопрос о $\mathcal{F}_p$-аналогах теорем Смирнова, Баумслага и Мальцева о группах автоморфизмах и расщепляемых расширениях. Простые примеры показывают, что эти теоремы не могут быть распространены с $\mathcal{F}$-аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Тем не менее, удается перенести эти теоремы на почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, и даже на почти π-примарную аппроксимируемость, где π — конечное множество простых чисел.

Удобный термин "π-примарная аппроксимируемость" недавно предложен Д. И. Молдаванским и означает аппроксимируемость классом $\mathcal{K} = \bigcup_{p\in\pi} \mathcal{F}_p$. Это свойство равносильно аппроксимируемости конечными нильпотентными π-группами.

Подводя итоги сказанному выше, сформулируем результат автора, доказанный в работе [45].

Теорема 1. *Если группа G конечного общего ранга $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел), то $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми (почти π-примарно аппроксимируемыми) являются группа автоморфизмов группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой (почти π-примарно аппроксимируемой) группы.*

Рассмотренный выше класс групп конечного общего ранга содержит все конечно порожденные группы и поэтому является слишком широким для того, чтобы исследовать финитную аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства для групп этого класса. Гораздо лучше в этом отношении исследованы группы конечного специального ранга, введенные А. И. Мальцевым в работе [7]. Их называют также группами конечного ранга Прюфера, а чаще — просто группами конечного ранга. В этом есть определенная несправедливость, поскольку на самом деле несомненное первенство в формировании данного понятия принадлежит А. И. Мальцеву. Далее вместо терминов "специальный ранг" и "ранг Прюфера" используется термин "ранг".

Напомним, что группа G имеет конечный ранг, если существует число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это требование является более жестким, чем конечность общего ранга. Примерами групп конечного ранга являются все разрешимые минимаксные группы и, в частности, все полициклические группы.

Аппроксимационные свойства групп конечного ранга в наибольшей степени исследованы для разрешимых групп конечного ранга, но мы остановимся сначала на некоторых результатах, относящихся к произвольным группам конечного ранга.

В 1989 году А. Лубоцкий и А. Манн в работе [32] доказали следующую теорему: *любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга почти локально разрешима.* Эту важную и глубокую теорему дополняет следующий результат автора [43].

Теорема 2. *Пусть G — группа конечного ранга.*

Если для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел, группа G π-примарно аппроксимируема, то она нильпотентна.

В частности, если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.

Эта теорема обобщает следующий результат К. Сексенбаева [13]: *если полициклическая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.*

Рассмотрим теперь нильпотентные группы конечного ранга (для нильпотентных групп конечность общего ранга равносильна конечности специального ранга). Для таких групп критерии $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости (где π — произвольное множество простых чисел) формулируются в терминах полноты элементов. Мы называем элемент a группы G π-полным, если для любого целого положительного π-числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Если множество π состоит из одного простого числа p (из всех простых чисел), то вместо термина "π-полный элемент" используется термин "p-полный элемент" ("полный элемент"). Еще А. И. Мальцев в работе [7] заметил, что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных неединичных элементов. В аналогичных терминах формулируется и следующий результат автора (см. [43] и [47]), дающий полную информацию об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для нильпотентных групп конечного ранга.

Теорема 3. *Нильпотентная группа G конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда множество всех ее π-полных элементов совпадает с единичной подгруппой (является конечным и совпадает с множеством всех элементов группы G, порядки которых конечны и взаимно просты с каждым числом из π).*

Конечность ранга в этой теореме существенна. Соответствующий пример был подсказан автору диссертации А. Л. Шмелькиным несколько лет тому назад. Для абелевых групп это ограничение не существенно — теорема 3 остается верной для произвольной абелевой группы G (без ограничений на ранг) [46].

Распространить теорему 3 на разрешимые группы конечного ранга не возможно. Однако, для случая финитной аппроксимируемости, т. е. для случая, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, утверждение теоремы 3 является верным и для разрешимых групп конечного ранга. Нетривиальный критерий финитной аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, полученный Д. Робинсоном [30, п. 5.3.2], формулируется следующим образом.

Для разрешимой группы G конечного ранга следующие три условия равносильны между собой.

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.

2. Группа G не содержит неединичных полных элементов.

3. Группа G редуцирована.

Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп, т. е. таких неединичных подгрупп, в которых все элементы являются полными. Очевидно, что любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа не содержит неединичных полных элементов и поэтому является редуцированной.

Рассмотрим теперь свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для разрешимых групп конечного ранга. Особый интерес представляет случай, когда множество π конечно. Очевидно, что если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Поэтому непосредственным следствием сформулированной выше теоремы А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы является следующая теорема, доказанная А. Лернером: *любая полициклическая группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для подходящего конечного множества π простых чисел.*

Разрешимая группа конечного ранга может уже не быть $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой ни для какого конечного множества π простых чисел, даже если она финитно аппроксимируема. Соответствующим примером служит прямое произведение групп порядка p по всем простым p. В связи с этим рассмотрим следующий вопрос: при каких обстоятельствах разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для подходящего конечного множества π простых чисел? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел* *тогда и только тогда, когда она редуцирована и является FATR-группой.*

Следуя Д. Робинсону [30, п. 5.1.6], мы называем разрешимую группу FATR-группой (группой с конечными абелевыми тотальными рангами), если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Достаточность в теореме 4 доказывается нетривиально и установлена Д. Робинсоном (см., напр., [30, п. 5.3.8]). Необходимость в этой теореме является значительно более простым утверждением и доказана автором диссертации в работе [57]. Это доказательство приведено в диссертации в связи с тем, что в [30] теорема 4 сформулирована и доказана только "в одну сторону".

Заметим, что для фиксированного конечного множества π простых чисел мы не располагаем критерием $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга (такого критерия нет даже для полициклических групп). Тем не менее, в работе автора [57] доказан следующий критерий почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, непосредственным следствием которого является сформулированный выше результат А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы для каждого простого числа p.

Теорема 5. *Пусть π — фиксированное конечное множество простых чисел. Разрешимая группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она является редуцированной FATR-группой и не содержит π-полных элементов бесконечного порядка.*

Б. Верфриц в своей статье "Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank" [37], посвященной работе автора [57], привел свое доказательство теоремы 5. Эта теорема является новой даже для случая, когда множество π состоит из одного простого числа p. В [37] Б. Верфриц назвал ее, а также сформулированную ниже теорему 6, доказанную автором в [57], интересными результатами.

Теорема 6. *Если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то она почти π-примарно аппроксимируема.*

Из теоремы 6 следует, что почти π-примарная аппроксимируемость разрешимой группы конечного ранга для фиксированного конечного множества π простых чисел равносильна ее почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

В работе автора [48]) формулировка теоремы 6 существенно усилена следующим образом.

Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть G — разрешимая FATR-группа. Тогда в группе G существует подгруппа P конечного индекса такая, что любая конечная π-группа, являющаяся гомоморфным образом группы P, нильпотентна.

С другой стороны, Д. Робинсон [30, п. 5.3.12] доказал, что если редуцированная разрешимая минимаксная группа не является нильпотентной, то не будет нильпотентным и некоторый ее конечный гомоморфный образ. Разрешимые минимаксные группы имеют конечный ранг и составляют важный промежуточный подкласс между полициклическими группами и разрешимыми FATR-группами.

Вернемся теперь к теоремам 4 и 5. В этих теоремах для разрешимых групп конечного ранга указаны необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для подходящего конечного множества π простых чисел и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для фиксированного конечного множества π простых чисел. Эти условия выглядят достаточно сложно и используют нетривиальное понятие FATR-группы. В следующей теореме указаны более простые эквивалентные условия.

Теорема 7. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга.*

1. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.

2. Пусть π — конечное множество простых чисел. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q_π π-ичных дробей.

Эта теорема доказана в работе автора [42]. Непосредственным ее следствием являются теорема Шмелькина о полициклических группах, а также следующий классический результат [30, п. 5.3.9]. *Если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

В самом деле, напомним, что минимаксные группы — это группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет или условию минимальности, или условию максимальности для подгрупп. Разрешимые минимаксные группы являются FATR-группами и могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический [30, п. 5.1.6]. Зафиксируем в разрешимой минимаксной группе G такой ряд. Если мы теперь выбросим все простые числа, соответствующие квазициклическим факторам этого ряда, то для каждого оставшегося простого p в группе G, очевидно, нет подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей. Кроме того, любая периодическая подгруппа группы G является черниковской группой, и поэтому она конечна в силу редуцированности группы G. Таким образом, в силу теоремы 7 группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для указанных выше простых p.

Примерами разрешимых минимаксных групп служат разрешимые группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы вида: $G(1,n) = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$, где n — ненулевое целое число. Очевидно, что нормальное замыкание элемента a этой группы представляет собой группу n-ичных дробей, а фактор-группа группы $G(1,n)$ по нормальному замыканию элемента a является циклической. Поэтому если простое число p не делит n, то группа $G(1,n)$ не содержит подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей, и тогда по теореме 7 она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это утверждение является частью результата автора, доказанного в [38] и относящегося к произвольной группе Баумслага — Солитэра. Формулировка этого результата приведена ниже.

Разрешимые группы Баумслага — Солитера являются примерами конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга. Заметим, что любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима и минимаксна [32], и поэтому она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы G конечного ранга не исследован даже в простейшем случае — когда множество π состоит из одного простого числа p, а группа G является полициклической. Свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп полностью исследовано только для некоторых классов полициклических групп, например, для класса конечно порожденных нильпотентных групп и для более широкого класса сверхразрешимых групп. Для конечно порожденных нильпотентных групп соответствующий критерий хорошо известен, является следствием теоремы 3 и формулируется следующим образом. *Конечно порожденная* *нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются p-элементами. В частности, любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p (теорема Грюнберга).*

Для полициклических групп имеется три результата общего характера об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Это — сформулированные выше результаты Шмелькина и Сексенбаева, а также доказанная автором диссертации теорема 8 (см. ниже). Для ее формулировки обозначим через π_G множество всех простых чисел p, для которых группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Из сформулированных выше результатов Сексенбаева и Грюнберга непосредственно вытекает следующее утверждение: *для полициклической группы G множество π_G либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел.* С другой стороны, автором получен следующий результат [49].

Теорема 8. *Для произвольного конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа G такая, что $\pi_G = \pi$.*

Во второй главе диссертации доказаны результаты об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости HNN-расширений некоторыми классами конечных групп. Эти результаты сформулированы ниже в теоремах 9–14.

Важными примерами HNN-расширений являются группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы $G(m,n) = (a,b;b^{-1}a^mb = a^n)$, где m и n — ненулевые целые числа. Среди групп Баумслага — Солитэра в свое время были найдены первые примеры групп с одним определяющим соотношением, не являющихся финитно аппроксимируемыми.

Так как $G(m,n) \cong G(n,m) \cong G(-m,-n)$, то при изучении аппроксимационных свойств группы $G(m,n)$ можно считать, что $1 \leq m \leq |n|$. При этом условии критерий финитной аппроксимируемости группы $G(m,n)$, полученный С. Мескиным в работе [33], формулируется следующим образом. *Группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $m = |n|$.* Заметим, что попытка указать достаточное условие финитной аппроксимируемости группы $G(m,n)$ была предпринята Г. Баумслагом и Д. Солитэром в их знаменитой статье [19], где было введено семейство групп $G(m,n)$ и доказана нехопфовость группы $G(2,3)$.

Вопрос о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы Баумслага — Солитэра для фиксированного простого числа p решается следующей теоремой автора [38].

Теорема 9. *Пусть m и n — ненулевые целые числа и $1 \leq m \leq |n|$. Группа Баумслага — Солитэра $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и p не делит n, или $m = |n|$.*

Если $m = 1$ и p не делит n, то нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы $G(m,n)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой подгруппой индекса $p-1$. Если же $m = |n|$, то нормальное замыкание элементов b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$ имеет в группе $G(m,n)$ индекс $2m$ и является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для каждого простого p.

Из результата Мескина и теоремы 9 вытекает следующее утверждение.

Для группы Баумслага — Солитэра $G(m,n)$ следующие три условия равносильны между собой.

1. Группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема.

2. Группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

3. Группа $G(m,n)$ почти аппроксимируема классом всех нильпотентных групп.

Исследованиям аппроксимационных свойств групп Баумслага — Солитэра посвящена обзорная статья [34] Д. И. Молдаванского, получившего много важных и интересных результатов в этом направлении. В частности, Д. И. Молдаванский получил для групп Баумслага — Солитэра необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где p — простое число, π — множество простых чисел. Его результаты при условии $1 \leq m \leq |n|$ формулируются следующим образом.

Группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 (mod p)$, или $m = |n| = p^r$ для некоторого $r \geq 0$, причем если $m = -n$, то $p = 2$.

Группа $G(1,n)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π-число $l > 1$ такое, что l взаимно просто с n и порядок числа n по модулю l также является π-числом.

Группа $G(m,m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π-числом.

Группа $G(m, -m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π-числом и множество π содержит число 2.

Если теперь вместо $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы Баумслага — Солитэра рассмотреть свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости этой группы, то соответствующий критерий имеет следующую очень простую формулировку.

Теорема 10. *Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа Баумслага — Солитэра $G(m, n)$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого числа p из множества π.*

Теоремы 9 и 10 даказаны в работе автора [38]. Их формулировки приведены также в обзорной статье [34].

Перейдем теперь к HNN-расширениям групп. Напомним, что если G — группа, H и K — подгруппы группы G и $\varphi : H \longrightarrow K$ — изоморфизм, то можно рассматривать HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}ht = h\varphi, h \in H)$ группы G с подгруппами H и K, связанными относительно φ. Напомним, что группа G^* порождается всеми порождающими базовой группы G, а также проходной буквой t, и определяется всеми определяющими соотношениями группы G, а также всевозможными соотношениями $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h \in H$. Напомним еще, что HNN-расширение называется нисходящим, если одна из его связанных подгрупп, например H, совпадает с базовой группой G. В этом случае изоморфизм φ представляет собой инъективный эндоморфизм группы G, а группа G^* называется нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим эндоморфизму φ, и обозначается через $G(\varphi)$. При этом подгруппу V группы G будем называть φ-совместимой, если $V\varphi = V \cap G\varphi$.

В 1992 году Д. И. Молдаванский в работе [9] получил следующий критерий финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения. *Группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.* Этот критерий является фильтрационным, и он не дает ответа на вопрос о том, будет ли то или иное конкретное нисходящее HNN-расширение финитно аппроксимируемой группой. Тем не менее, с помощью этого критерия могут быть доказаны некоторые известные к настоящему времени теоремы, утверждающие финитную аппроксимируемость того или иного нисходящего HNN-расширения, например, следующий хорошо известный результат Д. Вайза и Т. Су [26].

Нисходящее HNN-расширение полициклической группы финитно аппроксимируемо.

Один из возможных путей обобщения теоремы Д. Вайза и Т. Су связан с упомянутой выше теоремой А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклической группы. Ослабляя требование полицикличности базовой группы HNN-расширения до требования ее почти аппроксимируемости в некоторых классах конечных групп, удалось получить ряд обобщений некоторых известных теорем о финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений. Так, например, с помощью сформулированного выше фильтрационного критерия Д. И. Молдаванского автором диссертации доказан следующий результат [44].

Теорема 11. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi)$ — соответствующее нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Если группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого множества π простых чисел, не делящих n, то группа $G(\varphi)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема.*

Если в теореме 11 требование почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G заменить на требование почти π-примарной аппроксимируемости для некоторого конечного множества π простых чисел, взаимно простых с n, то помимо $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы $G(\varphi)$ удается доказать еще и ее почти π-примарную аппроксимируемость. Соответствующий результат, полученный автором в работе [55], формулируется следующим образом.

Теорема 12. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi)$ — соответствующее нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n.*

Если для некоторого конечного множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти π-примарно аппроксимируема, то и группа $G(\varphi)$ почти π-примарно аппроксимируема.

В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, то и группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Эта теорема может быть применена к произвольному нисходящему HNN-расширению редуцированной разрешимой минимаксной группы. Действительно, как уже отмечалось выше, редуцированная разрешимая минимаксная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, и, кроме того, легко видеть, что любая подгруппа разрешимой минимаксной группы G, изоморфная этой группе, имеет в группе G конечный индекс. Поэтому частным случаем теоремы 12 является следующий недавний результат А. Ремтулы и М. Ширвани [35].

Нисходящее HNN-расширение редуцированной разрешимой минимаксной группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Еще более частным случаем теоремы 12 является упомянутый выше результат Д. Вайза и Т. Су о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения полициклической группы [26]. Теорема 12 позволяет усилить результат Д. Вайза и Т. Су следующим образом. *Нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$ полициклической группы G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p, не делящего индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G.*

Доказательство результата Д. Вайза и Т. Су, приведенное в [26], нетривиально. То же самое можно сказать о доказательстве теоремы Ремтулы и Ширвани, приведенном в работе [35]. Оно использует теорию разрешимых групп конечного ранга [30]. В связи с этим следует заметить, что сформулированная выше теорема 7 о разрешимых группах конечного ранга позволяет доказать теорему 12 в частном случае, когда требование конечности общего ранга базы HNN-расширения заменяется требованием ее разрешимости и конечности специального ранга (см. работу автора [42]). Даже в этом частном случае теорема 12 перекрывает результат Ремтулы и Ширвани. Изложенные в диссертации доказательства теорем 11 и 12 проведены в достаточно общей ситуации, но, тем не менее, они оказались значительно проще доказательств частных случаев этих теорем, опубликованных Вайзом, Су, Ремтуллой и Ширвани в работах [26] и [35].

Заметим еще, что в силу упомянутого выше результата о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости конечно порожденных линейных групп теорема 12 является частичным обобщением следующего нетривиального (и, по-видимому не достаточно подробно доказанного) результата А. Борисова и М. Сапира [20]. *Произвольное нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$ конечно порожденной линейной группы G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.* В этой теореме не предполагается конечность индекса подгруппы $G\varphi$ в группе G, и поэтому данная теорема не является следствием теоремы 12.

Заметим еще, что даже в ситуации, когда индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен, остается ряд нерешенных вопросов о финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения $G(\varphi)$. Так, например, остается открытым следующий вопрос Д. И. Молдаванского: будет ли группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируемой, если G является конечно порожденной финитно аппроксимируемой группой и индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен?

Рассмотрим теперь случай, когда HNN-расширение не является нисходящим, а связанные подгруппы имеют конечные индексы в базовой группе. Для такого HNN-расширения имеет место следующий результат автора [41].

Теорема 13. *Пусть G — $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. И пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.*

1. Группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.

2. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то и группа G^* почти π-примарно аппроксимируема. В частности, имеют место следующие три утверждения.

3. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой FATR-группой, то группа G^* почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

4. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой минимаксной группой, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

5. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти полициклической, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p.

Первое утверждение этой теоремы обобщает аналогичный критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы, доказанный Андреадакисом, Раптисом и Варсосом в работе [16].

Как уже отмечалось выше, конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой, и следовательно, она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Поэтому, если рассмотреть HNN-расширение такой группы со связанными подгруппами конечных индексов, то к этому HNN-расширению можно применить как теорему 13, так и теорему 12. Комбинация этих теорем дает следующий результат.

Пусть G — конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга. И пусть G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:

(1) группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема;

(2) или $H = G$, или $K = G$, или в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*;

(3) группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Так как группа Баумслага — Солитэра $G(m, n)$ представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $G = (a)$ со связанными подгруппами $H = (a^m)$ и $K = (a^n)$, то, как легко видеть, частным случаем последнего утверждения является следующий уже упомянутый выше результат Баумслага — Солитэра — Мескина. *Группа $G(m, n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$.*

Для обобщенных свободных произведений автором в работе [41] получен следующий аналог теоремы 13.

Теорема 14. *Пусть A и B — $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в группах A и B.*

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.

2. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел, то и группа G почти π-примарно аппроксимируема. В частности, имеют место следующие три утверждения.

3. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми FATR-группами, то группа G почти

π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

4. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми минимаксными группами, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

5. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти полициклическими, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p.

В связи с пунктом 1 теоремы 14 заметим, что свободное произведение $G = (A*B, H)$ двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечные индексы в группах A и B, не обязано быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой даже в простейшем случае, когда A и B — полициклические группы. Соответствующий пример построен в работе автора [39]. Непосредственным следствием теоремы 14 является следующее утверждение, доказанное автором в работе [39].

Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного ранга. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в группах A и B.

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:

(1) группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема;

(2) в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G;

(3) группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Третья глава диссертации посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений некоторыми классами конечных групп. Основные результаты третьей главы сформулированы ниже в теоремах 15–22.

Напомним, что если A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, то свободным произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, называется группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$, порождаемая всеми порождающими групп A и B и определяемая всеми определяющими соотношениями этих групп, а также всевозможными соотношениями

$h = h\varphi$, где $h \in H$. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы $G = (A*B, H)$ является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Еще одно необходимое условие финитной аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$ получено М. Ширвани в работе [36] для случая, когда свободные множители A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству. Этот результат формулируется следующим образом. *Пусть A и B — группы с нетривиальными тождествами. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой в каждой из групп A и B. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathcal{F}$-отделима в группах A и B.*

В ряде случаев финитная отделимость подгруппы H в группах A и B оказывается не только необходимым, но и достаточным условием для $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$. В диссертации доказано несколько общих результатов такого рода, обобщающих известные классические теоремы, доказанные при различных ограничениях на свободные множители A и B.

При изучении финитной аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$ дополнительные ограничения как правило накладываются не только на свободные множители A и B, но и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H. Здесь и далее требование нормальности объединенной подгруппы H означает, что подгруппа H нормальна в группах A и B (или, что равносильно, H нормальна в G).

Г. Баумслаг [18] доказал, что свободное произведение $G = (A * B, H)$ полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H является финитно аппроксимируемой группой. Недавно для такого свободного произведения А. В. Розовым в работе [12] установлено следующее более тонкое и нетривиальное утверждение.

Свободное произведение $G = (A * B, H)$ *полициклических групп* A *и* B *с нормальной объединенной подгруппой* H *почти* $\mathcal{F}_p$*-аппроксимируемо для каждого простого числа* p.

Рассмотрим теперь обобщения результатов Баумслага и Розова о свободном произведении двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой на случай свободного произведения $G = (A * B, H)$ разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H. Вопрос о финитной аппроксимируемости такого свободного произведения решается в [48] следующим образом.

Теорема 15. *Пусть* $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение почти разрешимых групп* A *и* B *конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой* H*, причем* $H \neq A$ *и* $H \neq B$*. Группа* G $\mathcal{F}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы* A, B, A/H *и* B/H *редуцированы.*

Так как для разрешимой группы конечного ранга условие редуцированности равносильно финитной аппроксимируемости, то редуцированность групп A, B, A/H и B/H из теоремы 15 равносильна тому, что свободные множители A и B финитно аппроксимируемы, а объединенная подгруппа H финитно отделима в каждом из свободных множителей.

Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима [32], то частным случаем теоремы 15 является следующий более ранний результат автора [39].

Пусть $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение конечно порожденных* $\mathcal{F}$*-аппроксимируемых групп* A *и* B *конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой* H*, причем* $H \neq A$ *и* $H \neq B$*. Группа* G $\mathcal{F}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа* H *финитно отделима в группах* A *и* B.

Так как в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием этого результата является упомянутая выше теорема Баумслага о финитной аппроксимируемости любого свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Существуют достаточно тонкие примеры конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп конечного ранга, в которых не все нормальные подгруппы финитно отделимы [30, п. 11.1.4]. Поэтому свободное произведение двух конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп конечного ранга с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Теперь выясним, при каких обстоятельствах свободное произведение двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой для подходящего конечного множества π простых чисел. Ответ на этот вопрос дает следующий результат автора [48].

Теорема 16. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами.*

С помощью теоремы 4 легко видеть, что группы A, B, A/H и B/H из теоремы 16 являются редуцированными почти FATR-группами тогда и только тогда, когда они $\mathcal{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемы для подходящего конечного множества π_1 простых чисел. Поэтому теорема 16 может быть переформулирована следующим образом.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H $\mathcal{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемы для подходящего конечного множества π_1 простых чисел.

Так как свободное произведение двух конечных p-групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то для фиксированного конечного множества π простых чисел $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G из теоремы 16 не равносильна $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H. Однако, если вместо свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости рассмотреть свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — фиксированное конечное множество простых чисел, то удается получить следующий результат.

Теорема 17. *Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.*

Утверждение теоремы 17 является новым даже для почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Частным случаем этой теоремы является уже упомянутый выше нетривиальный результат А. В. Розова [12]. Заметим еще, что теорема 16 является следствием теорем 17 и 4. Нетривиальному доказательству теоремы 17 почти полностью посвящена работа автора [48]. Там же приводится очень простое доказательство теоремы 15.

Как уже отмечалось выше, конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой и обладает свойством почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для всех достаточно больших простых p. Поэтому непосредственным следствием теорем 15 и 17 является следующее утверждение, частично доказанное автором в работе [39].

Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного ранга. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с A и B.

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:

(1) группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема;

(2) подгруппа H финитно отделима в группах A и B;

(3) группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Аналогичный критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости имеет место и для случая, когда объединенная подгруппа является циклической. Этот критерий получен автором в работе [39] и формулируется следующим образом.

Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного ранга. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, не совпадающей с A и B.

Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

Данное утверждение является частным случаем следующей более общей теоремы, полученной автором в работе [40].

Теорема 18. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение редуцированных почти разрешимых FATR-групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и*

B. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

Так как в почти полициклических группах все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием теоремы 18 является следующий результат Д. Дайер, доказанный в работе [22]. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическим объединением является финитно аппроксимируемой группой.*

Пока не удается ослабить условие FATR в теореме 18 до требования конечности ранга. Значительно проще дело обстоит в случае, когда A и B — нильпотентные группы конечного ранга. В этом случае наряду с финитной аппроксимируемостью для свободного произведения $G = (A * B, H)$ с циклическим объединением H удается также исследовать и более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости. Соответствующий критерий получен автором в работе [50] и формулируется следующим образом.

Теорема 19. *Пусть π — непустое множество простых чисел, $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенной циклической подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в каждой из групп A и B.*

Так как конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, имеет конечный ранг, и в ней все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием теоремы 19 является классический результат Г. Баумслага [18], утверждающий финитную аппроксимируемость свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением. Из теоремы 19 вытекает также следующее очень простое утверждение, которое обобщает некоторые известные результаты, доказанные в работах [27] и [28].

Пусть π — непустое множество простых чисел, A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной неединичной циклической подгруппой $H = (h)$, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. И пусть m и n — наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = h$ разрешимы в группах A и B соответственно. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа m и n являются π-числами.

Вернемся снова к результату Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух почти полициклических групп с циклическим объединением. Одно из обобщений этого результата, полученное автором в работе [56], формулируется следующим образом.

Теорема 20. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп A и B с циклической объединенной подгруппой H. Если существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, инъективные на подгруппе H, то группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H. Если группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения, то группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.

Если в этом утверждении условие аппроксимируемости полициклическими группами без кручения заменить более сильным условием аппроксимируемости конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то удается доказать почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы $G = (A * B, H)$ для каждого простого p. В действительности при этих ограничениях имеет место следующий более сильный результат, доказанный автором в работе [53].

Теорема 21. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H. И пусть группы A и B аппроксимируемы конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа M такая, что фактор-группа G/M является конечной нильпотентной группой, и группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p. В частности, имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, и более того, она аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами для некоторого конечного множества π простых чисел.

2. Группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p, и, в частности, она почти аппроксимируема нильпотентными группами.

В силу хорошо известной теоремы Магнуса любая свободная группа аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Поэтому следующее утверждение является частным случаем теоремы 21.

Пусть A и B — свободные группы или конечно порожденные нильпотентные группы без кручения. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной циклической подгруппой H. Тогда группа G аппроксимируема конечными разрешимыми группами и почти аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p.

Заметим, что частным случаем этого утверждения является следующий результат Г. Баумслага, доказанный в его фундаментальной работе [18]. *Свободное произведение двух свободных групп с циклическим объединением является финитно аппроксимируемой группой.* Заметим еще, что для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением известен также и критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, доказанный автором в работе [2].

Как уже отмечалось выше, большинство результатов о $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений получены с помощью доказанного Г. Хигманом критерия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп. Для формулировки этого критерия нам потребуется несколько дополнительных понятий и обозначений.

Напомним прежде всего, что нормальным рядом группы A называется конечный ряд $\mathcal{R}_A$ вида: $1 = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = A$, состоящий из нормальных подгрупп группы A. Если $\mathcal{R}_A$ — нормальный ряд группы A, имеющий указанный выше вид, и H — подгруппа группы A, то через $\mathcal{R}_A(H)$ будем обозначать нормальный ряд группы H, который получается удалением повторяющихся членов из ряда $1 = A_0 \cap H \leq A_1 \cap H \leq \ldots \leq A_n \cap H = H$.

Нормальный ряд $\mathcal{R}_A$ группы A называется главным, если в нем нет повторяющихся членов, и его нельзя уплотнить никаким другим нормальным рядом группы A (без повторяющихся членов). Очевидно, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок p. Упомянутый выше фундаментальный результат Г. Хигмана [24] формулируется следующим образом.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечных p-групп A и B с объединенной подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют главные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ такие, что $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Условие $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$, найденное Хигманом, естественно называть H-совместимостью рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. Оно фактически означает, что множество всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_A$ совпадает с множеством всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_B$.

В теореме Хигмана предполагается, что свободные множители A и B являются конечными p-группами. Ослабляя это ограничение до требования $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных множителей и конечности объединяемой подгруппы, мы доказываем следующий результат [51].

Теорема 22. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) в каждом из рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ все факторы, кроме быть может одного, являются конечными группами порядка p;

(ii) $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ — главные ряды группы H;

(iii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Другие обобщения теоремы Хигмана получены в [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом результаты диссертации показывают, что свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти π-примарной аппроксимируемости ведут себя более "регулярно" по сравнению с обычной аппроксимируемостью соответствующими классами групп. В этом состоит одна из причин, мотивирующих изучение свойства почти аппроксимируемости различными классами конечных групп. Другая причина состоит в том, что использование свойств почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости позволяет получать новые результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости. Так, например, при условии почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости базовой группы удается получить новые нетривиальные достаточные условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения, существенно обобщающие известные результаты такого рода (см. теорему 11). С другой стороны, до сих пор не известно, обладает ли свойством финитной аппроксимируемости произвольное нисходящее HNN-расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы со связанной подгруппой конечного индекса (вопрос Д. И. Молдаванского).

Несмотря на то, что многие $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы являются также и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми, доказательства для них свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости оказываются значительно более сложными, чем доказательства $\mathcal{F}$-аппроксимируемости. Так, например, для свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости легко проверяется (и было установлено еще Г. Баумслагом), а свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости таких свободных произведений (для каждого простого p), недавно установленное А. В. Розовым, доказывается нетривиально. Для свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости доказано Д. Дайер, но, с другой стороны, не известно, будет ли такое свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемым для каждого простого p.

Вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп и HNN-расширения конечной π-группы полностью исследован только в двух случаях — когда множество π состоит из одного простого числа, и когда оно совпадает с множеством всех простых чисел. Это обстоятельство существенно ограничивает возможности исследования свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных конструкций.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность профессору Давиду Ионовичу Молдаванскому за всестороннюю помощь и поддержку в процессе подготовки и написания диссертации. Автор благодарен также всем участникам научно-исследовательского семинара кафедры алгебры и математической логики ИвГУ, возглавляемого Д. И. Молдаванским, за постоянное внимание к работе. Автор благодарен ректору ИвГУ профессору В. Н. Егорову и декану факультета Математики и компьютерных наук ИвГУ профессору Б. Я. Солону за поддержку и помощь в организационных вопросах.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. В. А. Артамонову, д.ф.-м.н. В. Н. Безверхнему, члену-корреспонденту РАН Л. Д. Беклемишеву, д.ф.-м.н. В. А. Ведерникову, д.ф.-м.н. И. В. Добрыниной, к.ф.-м.н. Ф. А. Дудкину, д.ф.-м.н. В. Г. Дурневу, к.ф.-м.н. А. А. Клячко, д.ф.-м.н. В. Н. Латышеву, д.ф.-м.н. А. В. Михалеву, д.ф.-м.н. Г. А. Носкову, д.ф.-м.н. А. Ю. Ольшанскому, д.ф.-м.н. В. Н. Чубарикову, к.ф.-м.н. Е. Е. Ширшовой, д.ф.-м.н. А. Л. Шмелькину и всем сотрудникам кафедры Высшей алгебры МГУ за поддержку и доброжелательную атмосферу. Автор благодарен всем участникам научно-исследовательского семинара и семинара "Теория групп" кафедры Высшей алгебры МГУ за полезные обсуждения и советы.

Светлая память Альфреду Львовичу Шмелькину.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журнал. — 1997. — Т. 38, № 1. — С. 3–13.
2. Азаров, Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров // Мат. заметки. — 1998. — Т. 64, № 1. — С. 3–8.
3. Азаров, Д. Н. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневыми классами групп / Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2002. — № 5. — С. 6–10.
4. Магнус, В. Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
5. Мальцев, А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами / А. И. Мальцев // Мат. сборник. — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405–422.
6. Мальцев, А. И. О группах конечного ранга / А. И. Мальцев // Мат. сборник. — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 351–352.
7. Мальцев, А. И. О гомоморфизмах на конечные группы / А. И. Мальцев // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. — 1958. — Т. 18, № 5. — С. 49–60.
8. Мерзляков, Ю. И. Рациональные группы / Ю. И. Мерзляков. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
9. Молдаванский, Д. И. Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп / Д. И. Молдаванский // Укр. матем. журнал. — 1992. — Т. 44, № 6. — С. 842–845.
10. Молдаванский, Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений / Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. — 2000. — № 3. — С. 129–140.
11. Молдаванский, Д. И. Комбинаторная теория групп в Ивановском государственном университете / Д. И. Молдаванский // Чебышевский сборник. — 2014. — Т. 15, № 4. — С. 32–54.
12. Розов, А. В. О почти аппроксимируемости конечными р-группами свободного произведения полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Известия ВУЗов. Математика. — 2014. — № 11. — С. 64–71.
13. Сексенбаев, К. К теории полициклических групп / К. Сексенбаев // Алгебра и логика. — 1965. — Т. 4, № 3. — С. 79–83.

14. Смирнов, Д. М. К теории финитно аппроксимируемых групп / Д. М. Смирнов // Укр. мат. журнал. — 1963. — Т. 15. — С. 453–457.
15. Шмелькин, А. Л. О полициклических группах / А. Л. Шмелькин // Сиб. мат. журнал. — 1968. — Т. 9, № 1. — С. 234–235.
16. Andreadakis, S. Residual finiteness and hopficity of certain HNN-extensions / S. Andreadakis, E. Raptis, D Varsos // Arch. Math. — 1986. — V. 47. — P. 1–5.
17. Baumslag, G. Automorphism groups of residually finite groups / G. Baumslag // J. London Math. Soc. — 1963. — V. 38. — P. 117–118.
18. Baumslag, G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups / G. Baumslag // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 106, 2. — P. 193–209.
19. Baumslag, G. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups / G. Baumslag, D. Solitar // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 68. — P. 199–201.
20. Borisov, A. Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms / A. Borisov, M. Sapir // arXiv:math/0309121v1 [math.GR] 6 Sep 2003.
21. Bou-Rabee, K. Parasurface groups / K. Bou-Rabee // arXiv:0908.1808v1 [math.GR] 12 Aug 2009.
22. Dyer, J. On the residual finiteness of generalized free products / J. Dyer // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — V. 133, 1. — P. 131–143.
23. Gruenberg, K. W. Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // Proc. London Math. Soc. — 1957. — V. 7. — P. 29–62.
24. Higman, G. Amalgams of p–groups / G. Higman // J. Algebra. — 1964. — 1. — P. 301–305.
25. Hirsh, K. A. On infinite soluble groups / K. A. Hirsh // J. London Math. Soc. — 1952. — V. 27. — P. 81–85.
26. Hsu, T. Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite / T. Hsu, D. Wise // J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — V. 182. — 1. — P. 65–78.
27. Kim, G. On amalgamated free products of residually p–finite groups / G. Kim, J. McCarron // J. Algebra. — 1993. — V. 162. — P. 1–11.
28. Kim, G. On generalized free products of residually finite p–groups / G. Kim, C. Tang // J. Algebra. — 1998. — V. 201. — P. 317–327.

29. Labute, J. Residually torsion-free nilpotent one relator groups / J. Labute // arXiv:1503.05167v1 [math.GR] 17 Mar 2015.
30. Lennox, J. The theory of infinite soluble groups / J. Lennox, D. Robinson. — Oxford.: Clarendon press, 2004. — 344 P.
31. Lubotzky, A. A group-theoretic characterization of lenear groups / A. Lubotzky // J. of algebra. — 1988. — V. 113. — P. 207–214.
32. Lubotzky, A. Residually finite groups of finite rank / A. Lubotzky, A. Mann // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1989. — V. 106, 3. — P. 185–188.
33. Meskin, S. Nonresidually finite one-relator groups / S. Meskin // Trans. Amer. Math. Soc.. — 1972. — V. 164. — P. 105–114.
34. Moldavanskii, D. On some residual properties of Baumslag — Solitar groups / D. Moldavanskii // arXiv:1310.3585v1 [math.GR] 14 Oct 2013.
35. Rhemtulla, A. H. The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups / A. H. Rhemtulla, M. Shirvani // Illinois J. of Math. — 2003. — V. 47. — P. 477–484.
36. Shirvani, M. A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag / M. Shirvani // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — V. 104, 3. — P. 703–706.
37. Wehrfritz, B. A. F. Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank / B. A. F. Wehrfritz // Boll. Unione Mat. Ital. — 2016. — doi:10.1007/s40574-015-0047-8.

Работы автора по теме диссертации

Работы в журналах из списка ВАК

38. Азаров, Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра / Д. Н. Азаров // Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 116–123.
39. Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журнал. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 485–497.
40. Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров // Мат. заметки. — 2013. — Т. 93, № 4. — С. 483–491.
41. Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп ко-

нечного ранга / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журнал. — 2013. — Т. 54, № 6. — С. 1203–1215.

42. Азаров, Д. Н. Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп / Д. Н. Азаров // Известия ВУЗов. Математ. — 2014. — № 8. — С. 18–29.
43. Азаров, Д. Н. Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // Модел. и анализ информ. систем. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 50–55.
44. Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп / Д. Н. Азаров // Мат. заметки. — 2014. — Т. 96, № 2. — С. 163–169.
45. Азаров, Д. Н. Аппроксимационные свойства групп автоморфизмов и расщепляемых расширений / Д. Н. Азаров // Известия ВУЗов. Математика. — 2015. — № 8. — С. 3–13.
46. Азаров, Д. Н. Аппроксимационные свойства абелевых групп / Д. Н. Азаров // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. — 2015. — № 3(35). — С. 5–11.
47. Азаров, Д. Н. Аппроксимационные свойства нильпотентных групп / Д. Н. Азаров // Модел. и анализ информ. систем. — 2015. — Т. 22, № 2. — С. 149–157.
48. Азаров, Д. Н. Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журнал. — 2015. — Т. 56, № 2. — С. 249–264.
49. Азаров, Д. Н. Некоторые аппроксимационные свойства полициклических групп и расщепляемых расширений / Д. Н. Азаров // Владикавк. матем. журнал. — 2015. — Т. 17, № 4. — С. 3–10.
50. Азаров, Д. Н. Критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журнал. — 2016. — Т. 57, № 3. — С. 483–494.
51. Азаров, Д. Н. Апппроксимируемость конечными p-группами обобщенных свободных произведений групп / Д. Н. Азаров // Известия ВУЗов. Математика. — 2017. — № 5. — С. 3–10.
52. Азаров, Д. Н. О финитно аппроксимируемых группах конечного общего ранга / Д. Н. Азаров // Мат. заметки. — 2017. — Т. 101, № 3. — С. 323–329.
53. Azarov, D. Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation / D. Azarov // Commun. in Algebra — 2015. — V. 43:4. — P. 1464–1471.

Прочие работы автора по теме диссертации

54. Азаров, Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами / Д. Н. Азаров // Чебышевский сборник. — 2010. — Т. 11, № 3(35). — С. 11–20.
55. Азаров, Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений / Д. Н. Азаров // Чебышевский сборник. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 9–19.
56. Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров // Чебышевский сборник. — 2013. — Т. 14, № 3(47). — С. 9–19.
57. Азаров, Д. Н. Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // Чебышевский сборник. — 2014. — Т. 15, № 1(49). — С. 7–19.

АЗАРОВ Дмитрий Николаевич

**О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ
И ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ
КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ
ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА
И СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 02.03.2017 г.
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Таймс.
Печать способом ризографии. Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 3,2.
Тираж 5 экз.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в Типографии ГОУСПО Ивановского энергоколледжа,
153025, Иваново, ул. Ермака, 41. Тел. (4932) 37-52-44, 32-50-89