Известия вузов. Математика
2017, №5, с. 3–10

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.Н. АЗАРОВ

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Аннотация. Пусть p — простое число. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой конечными p-группами, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную p-группу, при котором образ элемента a отличен от единицы. Для свободного произведения двух таких групп с конечными объединенными подгруппами получено необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами. Этот результат является обобщением аналогичной теоремы Хигмана о свободном произведении двух конечных p-групп с объединенными подгруппами.

Ключевые слова: свободное произведение групп с объединенными подгруппами, аппроксимируемость конечными p-группами.

УДК: 512.543

Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента x отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп.

Хорошо известно, что все свободные группы финитно аппроксимируемы и даже $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p [1] (см. также [2], с. 47).

Большой интерес представляют исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп — обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Остановимся здесь на обобщенных свободных произведениях, т. е. на свободных произведениях групп с объединенными подгруппами. Частным случаем этого понятия является понятие обычного свободного произведения групп.

Хорошо известно [3], что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых) групп само финитно аппроксимируемо ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо).

Поступила 16.10.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному заданию.

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому можно считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее в некоторых случаях для группы G будем использовать более компактное обозначение

$$G = (A * B,\ H)$$

и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H. Заметим, что если $H = 1$, то G — обычное свободное произведение групп A и B.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы $G = (A * B,\ H)$ является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$ состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H в группах A и B.

Такой подход к изучению аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп был применен Г. Баумслагом, который в 60-е г. прошлого века начал систематическое изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. В его статье [4] получен целый ряд фундаментальных результатов в этом направлении, а также намечен путь для дальнейших исследований финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. Сначала Г. Баумслаг доказывает, что если группы A и B конечны, то группа $G = (A * B,\ H)$ финитно аппроксимируема. Заметим, что свободное произведение двух конечных p-групп с объединенной подгруппой быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой уже не обязано. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для такого свободного произведения был получен Г. Хигманом [5]. Этот критерий сформулирован ниже в разделе 2. Из него, в частности, следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость свободного произведения двух конечных p-групп с циклической объединенной подгруппой.

Следующий шаг, сделанный Г. Баумслагом, состоял в том, что требование конечности свободных множителей A и B было ослаблено до требования конечности объединенной подгруппы H. Г. Баумслаг [4] доказал, что свободное произведение G финитно аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H является финитно аппроксимируемой группой. Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой будет сформулирован и доказан ниже. Этот критерий является основным результатом данной работы.

1. Основные результаты работы

Возвращаясь к упомянутому выше результату Г. Хигмана [5], напомним прежде всего, что нормальным рядом группы A называется конечный ряд $\mathcal{R}_A$ вида

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = A,$$

состоящий из нормальных подгрупп группы A. Если $\mathcal{R}_A$ — нормальный ряд группы A, имеющий указанный выше вид, и H — подгруппа группы A, то через $\mathcal{R}_A(H)$ будем обозначать нормальный ряд группы H, который получается удалением повторяющихся членов из ряда

$$1 = A_0 \cap H \leq A_1 \cap H \leq \cdots \leq A_n \cap H = H.$$

Нормальный ряд $\mathcal{R}_A$ группы A называется главным, если в нем нет повторяющихся членов, и его нельзя уплотнить никаким другим нормальным рядом группы A (без повторяющихся членов). Очевидно, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок p. Хорошо известно и легко проверяется, что в конечной p-группе любой нормальный ряд без повторений может быть уплотнен до главного ряда.

Упомянутый выше фундаментальный результат Г. Хигмана [5] формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение конечных p-групп A и B с объединенной подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют главные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ такие, что $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.*

Условие $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$, найденное Г. Хигманом, естественно называть H-совместимостью рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. Оно фактически означает, что множество всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_A$ совпадает с множеством всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_B$.

В доказанной Г. Хигманом теореме 1 предполагается, что свободные множители A и B являются конечными p-группами. Ослабляя это ограничение до требования $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных множителей и конечности объединяемой подгруппы, доказываем здесь следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие следующим условиям*:

(i) *в каждом из рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ все факторы, кроме быть может одного, являются конечными группами порядка p*;

(ii) $\mathcal{R}_A(H)$ *и* $\mathcal{R}_B(H)$ *— главные ряды группы H*;

(iii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Заметим, что теорема Хигмана является непосредственным следствием теоремы 2. Действительно, любые главные H-совместимые ряды конечных p-групп A и B, очевидно, удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii). Наоборот, если нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ конечных p-групп A и B удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii), то в группах A и B существуют главные H-совместимые ряды $\mathcal{R}'_A$ и $\mathcal{R}'_B$. В качестве рядов $\mathcal{R}'_A$ и $\mathcal{R}'_B$ можно взять любые главные ряды групп A и B, являющиеся уплотнениями рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. H-совместимость рядов $\mathcal{R}'_A$ и $\mathcal{R}'_B$ вытекает из H-совместимости рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ (условие (iii)) с учетом того обстоятельства, что в силу условия (ii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}'_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H) = \mathcal{R}'_B(H)$.

Еще одно обобщение результата Хигмана будет доказано с помощью теоремы 2 при более жестких ограничениях на A и B. Оно формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. И пусть в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие подгруппу H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$ и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.*

В теореме 3 предполагается, что в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие конечную объединенную подгруппу H. Такие подгруппы S и T существуют, например, в случае, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые группы. В этом случае в качестве подгрупп S и T можно взять множества всех элементов конечных порядков этих групп. Действительно, напомним, что в конечно порожденной нильпотентной группе A множество всех элементов конечного порядка является конечной нормальной подгруппой и называется конечной частью группы A, причем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы A равносильна тому, что ее конечная часть является p-группой (например, [6]). Поэтому непосредственным следствием теоремы 3 является

Теорема 4 ([7])**.** *Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. И пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, т. е. их конечные части S и T являются p-группами. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$ и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.*

Эта теорема (как и теоремы 2 и 3) обобщает результат Хигмана. Доказательства теорем 2 и 3 приведены ниже. Доказательство теоремы 2 основано на теореме 1, а доказательство теоремы 3 — на теореме 2.

Заметим еще, что аналог теоремы Хигмана для HNN-расширения конечной p-группы получен Д.И. Молдаванским в работе [8]. В другой его работе [9] получен аналог теоремы 4 для HNN-расширений.

2. Вспомогательные леммы

Для доказательства теоремы 2 потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. *Любая свободная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.*

Это утверждение, даже в более сильном виде, доказано в ([2], с. 47).

С помощью леммы 1 легко доказывается следующее хорошо известная (например, [3], теорема 4.1)

Лемма 2. *Свободное произведение любого семейства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Хорошо известен следующий, ставший уже классическим, результат о строении подгрупп обобщенных свободных произведений групп, принадлежащий Х. Нейман (например, [2], предложение 11.22).

Лемма 3. *Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Если F — подгруппа группы G, тривиально пересекающая все подгруппы*

группы G, сопряженные с H, то F раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и некоторого семейства подгрупп вида $x^{-1}Ax \cap F$ и $x^{-1}Bx \cap F$ $(x \in G)$. В частности, если F — нормальная подгруппа группы G, тривиально пересекающая H, то F раскладывается в свободное произведение указанного выше вида.

Легко проверяется следующее почти очевидное утверждение, доказанное в более общем виде К. Грюнбергом в работе [3].

Лемма 4. *Любое расширение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью конечной p-группы само является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Очевидно, если H — конечная подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы G, то существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, инъективный на H.

Лемма 5. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, инъективный на H.*

Доказательство. Для проверки достаточности в лемме 5 предположим, что существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, инъективный на H. Ядро этого гомоморфизма обозначим через F. Тогда F — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G, тривиально пересекающая H. По лемме 3 F раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и подгрупп вида $x^{-1}Ax \cap F$ и $x^{-1}Bx \cap F$ $(x \in G)$. Поэтому в силу лемм 1 и 2 группа F является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Отсюда и из того, что F — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G, по лемме 4 следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G. Таким образом, лемма 5 является непосредственным следствием лемм 1–4. □

Лемма 6 ([4])**.** *Пусть $G = (A*B,\ H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. И пусть M и N — нормальные подгруппы групп A и B соответственно такие, что $M \cap H = N \cap H$. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма ρ_{MN} группы G на свободное произведение G_{MN} групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$.*

Лемма 7. *Пусть A — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа, M — конечная нормальная подгруппа группы A. Тогда фактор-группа A/M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть xM — неединичный элемент группы A/M. Так как $x \notin M$, и M — конечное подмножество $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы A, то существует гомоморфизм φ группы A на конечную p-группу F такой, что $x\varphi \notin M\varphi$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : F \to F/M\varphi$. Тогда $x\varphi\varepsilon \neq 1$. Так как M содержится в ядре гомоморфизма $\varphi\varepsilon$, то можно рассмотреть гомоморфизм $\phi : A/M \to F/M\varphi$, заданный по правилу $(gM)\phi = g\varphi\varepsilon$, где $g \in A$. Тогда $(xM)\phi = x\varphi\varepsilon \neq 1$. Таким образом, группа A/M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H.

Для доказательства *достаточности* в теореме 2 предположим, что в группах A и B существуют нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) в каждом из рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ все факторы, кроме быть может одного, являются конечными группами порядка p;

(ii) $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ — главные ряды группы H;

(iii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Совпадающие главные ряды $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ представляют собой нормальный ряд

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_l = H$$

с факторами порядка p. Покажем, что для каждого $k = 0, 1, \ldots, l$ найдется нормальная подгруппа L_k конечного p-индекса группы A такая, что $L_k \cap H = H_k$. Так как H_k является членом ряда $\mathcal{R}_A(H)$, то найдется член L ряда $\mathcal{R}_A$ такой, что $L \cap H = H_k$. Так как по условию (i) ряд $\mathcal{R}_A$ имеет не более одного бесконечного фактора, а все его конечные факторы являются p-группами, то конечной p-группой является или A/L или L. В первом случае в качестве искомой подгруппы L_k можно взять L. Во втором случае из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы A по лемме 7 следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы A/L. Тогда HL/L — конечная подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы A/L, и поэтому в группе A/L существует нормальная подгруппа L_k/L конечного p-индекса, тривиально пересекающая HL/L. Тогда L_k — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы A, причем $L_k \cap H = L \cap H$, т. е. $L_k \cap H = H_k$.

Очевидно, для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ подгруппа $M_i = \bigcap\limits_{k=i}^{l} L_k$ является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы A, и

$$M_i \cap H = \bigcap_{k=i}^{l} (L_k \cap H) = \bigcap_{k=i}^{l} H_k = H_i.$$

Также очевидно $M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_l \leq A$. Аналогично в группе B можно построить последовательность подгрупп

$$N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_l \leq B$$

такую, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ N_i — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы B и $N_i \cap H = H_i$.

Так как подгруппы $M = M_0$ и $N = N_0$ тривиально пересекают H, то по лемме 6 естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма ρ_{MN} группы G на свободное произведение G_{MN} конечных p-групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$. Заметим, что $A\rho_{MN} = A/M$, $B\rho_{MN} = B/N$, $H\rho_{MN} = H_{MN}$. Докажем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G_{MN} с помощью результата Г. Хигмана.

Так как M и N тривиально пересекают H, то гомоморфизм ρ_{MN} инъективен на подгруппе H, и поэтому совпадающие главные ряды $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ группы H отображаются на главный ряд

$$1 = H_0\rho_{MN} \leq H_1\rho_{MN} \leq \cdots \leq H_l\rho_{MN} = H_{MN}$$

группы H_{MN}, который далее будем обозначать $\mathcal{R}_{H_{MN}}$. Так как для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ $M_i \cap H = H_i$ и $M \leq M_i$, то $M_i/M \cap HM/M = H_iM/M$, т.е. $M_i\rho_{MN} \cap H_{MN} = H_i\rho_{MN}$. Поэтому если через $\mathcal{R}_{A/M}$ обозначить нормальный ряд

$$1 = M_0\rho_{MN} \leq M_1\rho_{MN} \leq \cdots \leq M_l\rho_{MN} \leq A/M$$

группы A/M, то $\mathcal{R}_{A/M}(H_{MN}) = \mathcal{R}_{H_{MN}}$. Хорошо известно и легко проверяется, что в конечной p-группе любой нормальный ряд можно уплотнить до главного ряда. Обозначим через $\mathcal{R}'_{A/M}$ какой-нибудь главный ряд группы A/M, являющийся уплотнением ряда $\mathcal{R}_{A/M}$. Тогда ряд $\mathcal{R}'_{A/M}(H_{MN})$ будет уплотнением ряда $\mathcal{R}_{A/M}(H_{MN})$, т.е. ряда $\mathcal{R}_{H_{MN}}$. Но последний ряд является главным, и поэтому

$$\mathcal{R}'_{A/M}(H_{MN}) = \mathcal{R}_{H_{MN}}.$$

Аналогично с помощью последовательности $N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_l \leq B$ в группе B/N можно построить главный ряд $\mathcal{R}'_{B/N}$ такой, что $\mathcal{R}'_{B/N}(H_{MN}) = \mathcal{R}_{H_{MN}}$. Таким образом, в конечных p-группах A/M и B/N построили главные ряды $\mathcal{R}'_{A/M}$ и $\mathcal{R}'_{B/N}$, которые в силу последних двух равенств являютя H_{MN}-совместимыми. Поэтому в силу теоремы 1 группа G_{MN} $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа $H\rho_{MN} = H_{MN}$ конечна, следует существование гомоморфизма ρ группы G_{MN} на конечную p-группу, инъективного на H_{MN}. Тогда $\rho_{MN}\rho$ — гомоморфизм группы G на конечную p-группу, инъективный на H. Поэтому в силу леммы 5 группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Достаточность в теореме 2 доказана.

Для доказательства *необходимости* предположим, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как подгруппа H группы G конечна, то найдется нормальная подгруппа F группы G конечного p-индекса такая, что $F \cap H = 1$. Уплотняя ряд $1 \leq F \leq G$, получим нормальный ряд $\mathcal{R}_G$ группы G вида

$$1 \leq F = G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_k = G,$$

в котором для любого $i = 1, 2, \cdots, k-1$ порядок фактора G_{i+1}/G_i равен p. Очевидно, $\mathcal{R}_G(H)$ — главный ряд группы H. Кроме того, очевидно, ряды $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_G(A)$ и $\mathcal{R}_B = \mathcal{R}_G(B)$ являются нормальными рядами в группах A и B, и все факторы этих рядов, начиная со второго, имеют порядок p. Это означает, что ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ удовлетворяют условию (i). Очевидно также, что $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_G(H)$, $\mathcal{R}_B(H) = \mathcal{R}_G(H)$. Поэтому $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$ — главный ряд группы H, т.е. выполняются условия (ii) и (iii). Необходимость в теореме 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Пусть $G = (A * B,\ H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. И пусть в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие подгруппу H.

Предположим сначала, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как подгруппы S и T группы G конечны, то найдется нормальная подгруппа L группы G конечного p-индекса такая, что $L \cap S = 1$ и $L \cap T = 1$. Уплотняя ряд $1 \leq L \leq G$, получим нормальный ряд $\mathcal{R}_G$ группы G вида

$$1 \leq L = G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_k = G,$$

в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ порядок фактора G_{i+1}/G_i равен p. Очевидно, ряды $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_G(S)$ и $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_G(T)$ являются главными рядами в группах S и T, и члены этих рядов нормальны в A и B соответственно. Очевидно также, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_G(H)$, $\mathcal{R}_T(H) = \mathcal{R}_G(H)$. Поэтому $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$. Необходимость в теореме 3 доказана.

Достаточность в теореме 3 обеспечивается теоремой 2. Действительно, пусть в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$ и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно. Добавляя к рядам $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ в качестве "новых" членов подгруппы A и B, получаем нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ групп A и B. Очевидно, ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii) из теоремы 2. Поэтому в силу теоремы 2 группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Теорема 3 доказана.

Литература

[1] Iwasawa K. *Einige Sätze uber freie gruppen*, Proc. Acad. Tokyo **19**, 272–274 (1943).
[2] Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп* (Мир, М., 1980).
[3] Gruenberg K.W. *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **7** (1), 29–62 (1957).
[4] Baumslag G. *On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (2), 193–209 (1963).

[5] Higman G. *Amalgams of p-groups*, J. Algebra **1** (3), 301–305 (1964).
[6] Азаров Д.Н. *Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп*, Изв. вузов. Матем., № 8, 18–29 (2014).
[7] Азаров Д.Н. *Об аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух нильпотентных групп с конечными объединенными подгруппами*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Матем. **3**, 102–106 (2006).
[8] Молдаванский Д.И. *Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Матем. **3**, 129–140 (2000).
[9] Молдаванский Д. И. *Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Матем. **3**, 128–132 (2006).

Д.Н. Азаров

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 37, г. Иваново, 153025, Россия,

e-mail: azarovdn@mail.ru

D.N. Azarov

Residually finite p-groups of generalized free products of groups

Abstract. Let p be a prime number. Recall that a group G is said to be a residually finite p-group if for every nonidentity element a of G there exists a homomorphism of the group G onto some finite p-group such that the image of the element a differs from unity. For the free product of two residually finite p-groups with amalgamated finite subgroups we obtain a necessary and sufficient condition to be a residually finite p-group. This result is a generalization of the similar Higman theorem proved for a free product of two finite p-groups with amalgamation.

Keywords: free product of groups with amalgamated subgroups, residually finite p-group.

D.N. Azarov

Ivanovo State University,
37 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia,

e-mail: azarovdn@mail.ru