Математические заметки

Том 101 выпуск 3 март 2017

УДК 512.543

О финитно аппроксимируемых группах конечного общего ранга

Д. Н. Азаров

Следуя А. И. Мальцеву, будем говорить, что группа G имеет конечный общий ранг, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе. Получены обобщения ряда известных теорем о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах на случай финитно аппроксимируемых групп конечного общего ранга. Доказано, например, что семейства всех конечных гомоморфных образов финитно аппроксимируемой группы конечного общего ранга и ее фактор-группы по неединичной нормальной подгруппе различны. Частными случаями этого результата являются аналогичный результат Д. И. Молдаванского о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах и следующее утверждение: любая финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга является хопфовой. Это утверждение обобщает аналогичный результат Мальцева о хопфовости конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: группа конечного ранга, финитная аппроксимируемость.

DOI: 10.4213/mzm10581

1. Введение. Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента $a \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу, переводящий элемент a в неединичный элемент. Это равносильно тому, что пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

В своем историческом обзоре [1] Чандлер и Магнус свидетельствуют, что понятие финитно аппроксимируемой группы введено Мальцевым в 1940 г. в его статье “Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами” [2]. Заметим, что в этой работе термин “аппроксимируемость” еще не использовался. Этот термин был введен Мальцевым в 1949 г. в его работе [3], посвященной нильпотентным группам и алгебрам. На английском языке соответствующий термин был введен Ф. Холлом в 1955 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке минобрнауки в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

В упомянутой выше работе [2] Мальцев установил финитную аппроксимируемость произвольной конечно порожденной линейной группы, а также обнаружил следующую важную связь между понятиями финитной аппроксимируемости и хопфовости.

Утверждение. *Любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа является хопфовой.*

Напомним, что группа G называется *хопфовой*, если она не может быть изоморфна никакой своей истинной фактор-группе, т.е. если для любой нормальной подгруппы N группы G из того, что фактор-группа G/N изоморфна группе G, следует, что $N = 1$. Это понятие введено Хопфом еще в 1932 г. [1].

Далее через $\mathscr{F}(G)$ будем обозначать множество всех классов изоморфизма конечных гомоморфных образов группы G. Очевидно, что свойством хопфовости обладает любая группа G, удовлетворяющая следующему условию: для каждой нормальной подгруппы N группы G из того, что $\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(G/N)$, следует, что $N = 1$. Поэтому результат Мальцева о хопфовости произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы непосредственно вытекает из следующей теоремы, доказанной Молдаванским несколько лет тому назад в работе [4].

Пусть G – конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и N – нормальная подгруппа группы G. Если $\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(G/N)$, то $N = 1$.

Одним из обобщений понятия конечно порожденной группы является понятие группы конечного общего ранга, введенное Мальцевым в работе [5]. Напомним, что группа G имеет *конечный общий ранг*, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

Здесь получено следующее обобщение сформулированного выше результата Молдаванского о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах на случай финитно аппроксимируемых групп конечного общего ранга.

Теорема 1. *Пусть G – финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга и N – нормальная подгруппа группы G. Если $\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(G/N)$, то $N = 1$.*

Частным случаем этой теоремы является следующее утверждение, обобщающее результат Мальцева о хопфовости произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы.

Следствие 1. *Любая финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга является хопфовой.*

Приведем еще две классические теоремы о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах, допускающие аналогичные обобщения. Первая из них формулируется следующим образом.

Теорема. *Группа автоморфизмов конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы сама является финитно аппроксимируемой группой.*

Эта теорема была доказана Смирновым [6] (и независимо Баумслагом [7]). Аналогичная теорема для расщепляемых расширений доказана Мальцевым в работе [8] и формулируется следующим образом.

Теорема. *Любое расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы само является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа F называется расщепляемым расширением группы G с помощью группы H, если G – нормальная подгруппа группы F, H – подгруппа группы F, $F = GH$ и $G \cap H = 1$.

В работе автора [9] доказаны следующие обобщения теорем Мальцева и Смирнова–Баумслага.

Теорема 2. *Пусть G – финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга. Тогда финитно аппроксимируемыми являются группа автоморфизмов группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью финитно аппроксимируемой группы.*

Аналогичный результат имеет место и для финитной отделимости подгрупп в расщепляемых расширениях. Напомним, что подгруппа S группы G называется *финитно отделимой*, если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего S, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы S. Это равносильно тому, что для каждого элемента g группы G, не принадлежащего S, существует нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что элемент g не принадлежит подгруппе SN.

Здесь будет доказана следующая теорема о финитной отделимости подгрупп в расщепляемом расширении группы конечного общего ранга.

Теорема 3. *Пусть F – расщепляемое расширение группы G конечного общего ранга с помощью группы H.*

1. *Если в группах G и H все подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все подгруппы финитно отделимы.*

2. *Если в группе G все подгруппы финитно отделимы, а в группе H все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

3. *Если в группах G и H все циклические подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все циклические подгруппы финитно отделимы.*

Эта теорема обобщает аналогичный результат Алленби и Грегораса о расщепляемых расширениях конечно порожденных групп [10].

В последнее время получен ряд результатов о финитной аппроксимируемости и других аппроксимационных свойствах обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп конечного общего ранга (см., например, работы [11] и [12]).

Заметим еще, что рассмотренный выше класс групп конечного общего ранга достаточно широк. Кроме конечно порожденных групп этому классу принадлежат все группы конечного специального ранга. Следуя Мальцеву [5], мы называем группу G группой конечного специального ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более, чем r элементами. Для разрешимых групп конечного специального ранга Робинсоном (см., например, [13; п. 5.3.2]) получен следующий критерий финитной аппроксимируемости. Разрешимая группа конечного специального ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит неединичных полных элементов, т.е. таких неединичных элементов, из которых в данной группе можно извлечь корень любой натуральной степени. Этот критерий не может быть перенесен на конечно порожденные группы и, тем более, на группы конечного общего ранга.

Перейдем теперь к доказательству основных результатов работы.

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 основано на следующем простом замечании о группах конечного общего ранга.

Лемма 1. *Пусть K – конечная группа, Var_K – многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Тогда любая группа конечного общего ранга из многообразия Var_K является конечной.*

Доказательство. Хорошо известно, что все конечно порожденные группы из многообразия Var_K конечны (см., например, [14; п. 15.2.2]). Обозначим через n_r порядок свободной группы данного многообразия с r свободными образующими. Тогда порядки всех r-порожденных групп многообразия Var_K ограничены числом n_r.

Пусть теперь G – группа конечного общего ранга из многообразия Var_K. Тогда существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество M элементов группы G содержится в некоторой r-порожденной подгруппе X группы G. Тогда $|M| \leqslant |X| \leqslant n_r$. Следовательно, G – конечная группа и ее порядок ограничен числом n_r. Лемма доказана.

Далее для любого множества V групповых слов и для любой группы G через $V(G)$ будем обозначать вербальную подгруппу группы G, соответствующую множеству V. Напомним, что подгруппа $V(G)$ порождается всеми элементами группы G вида $f(h_1, h_2, \dots)$, где $f \in V$, $h_1 \in G$, $h_2 \in G, \dots$.

Лемма 2. *Пусть K – конечная группа, V – множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в группе K. И пусть G – группа конечного общего ранга. Тогда фактор-группа $G/V(G)$ конечна.*

Доказательство. Очевидно, что фактор-группа $G/V(G)$ принадлежит многообразию Var_K и наследует от группы G конечность общего ранга. Поэтому в силу леммы 1 группа $G/V(G)$ конечна. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых двух групп G и H из равенства $\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(H)$ следует, что для произвольного множества V групповых слов имеет место равенство $\mathscr{F}(G/V(G)) = \mathscr{F}(H/V(H))$.*

Доказательство. Пусть группа X принадлежит семейству $\mathscr{F}(G/V(G))$. Тогда она принадлежит семейству $\mathscr{F}(G)$, которое по условию леммы совпадает с семейством $\mathscr{F}(H)$, и поэтому существует гомоморфизм $\varphi\colon H \to X$. Так как $X \in \mathscr{F}(G/V(G))$, все слова из множества V тождественно равны 1 в группе X. Отсюда следует, что $V(H)$ содержится в ядре гомоморфизма φ. Поэтому группа X является гомоморфным образом не только группы H, но и группы $H/V(H)$. Тем самым доказано включение $\mathscr{F}(G/V(G)) \subseteq \mathscr{F}(H/V(H))$. Противоположное включение проверяется аналогично. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 1. Пусть G – финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга и N – нормальная подгруппа группы G такая, что $\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(G/N)$. Покажем, что $N = 1$.

Пусть S – произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G. И пусть V – множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в группе G/S. Тогда, очевидно, $V(G) \subseteq S$.

Так как группы G и G/N имеют конечный общий ранг и V – множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в конечной группе G/S, по лемме 2 группы $G/V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ конечны.

Так как $\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(G/N)$, по лемме 3 $\mathscr{F}(G/V(G)) = \mathscr{F}((G/N)/V(G/N))$. Отсюда и из конечности групп $G/V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ следует, что группы $G/V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ изоморфны.

Таким образом,

$$G/V(G) \cong (G/N)/V(G/N) = (G/N)/(V(G)N/N) \cong G/(V(G)N).$$

Поэтому подгруппы $V(G)$ и $V(G)N$ имеют в группе G равные конечные индексы. Отсюда и из включения $V(G) \subseteq V(G)N$ следует, что $V(G) = V(G)N$. Поэтому $N \subseteq V(G)$. Отсюда и из включения $V(G) \subseteq S$ следует, что $N \subseteq S$.

Таким образом, N содержится в каждой нормальной подгруппе S конечного индекса группы G. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы G следует, что $N = 1$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 3.

ЛЕММА 4. *Пусть G – группа конечного общего ранга. И пусть N – нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Тогда в группе G существует вербальная подгруппа $V(G)$ конечного индекса такая, что $V(G) \subseteq N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – множество всех групповых слов, тождественно равных единице в группе G/N. Тогда, очевидно, $V(G) \subseteq N$. Так как G – группа конечного общего ранга и V – множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в конечной группе G/N, то по лемме 2 подгруппа $V(G)$ имеет конечный индекс в группе G. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 3. Пусть F – расщепляемое расширение группы G конечного общего ранга с помощью группы H. Докажем следующие утверждения.

1. Если в группах G и H все подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все подгруппы финитно отделимы.

2. Если в группе G все подгруппы финитно отделимы, а в группе H все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

3. Если в группах G и H все циклические подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все циклические подгруппы финитно отделимы.

Заметим сначала, что если группа G конечно порождена, то справедливость утверждений 1, 2 и 3 доказана Алленби и Грегорасом в работе [10]. В частности, эти утверждения справедливы в случае конечной группы G.

Из этого замечания следует, что для доказательства каждого из утверждений 1–3 достаточно для (произвольной, конечно порожденной или циклической) подгруппы S группы F и не принадлежащего ей элемента $f \in F$ найти такую нормальную подгруппу N группы F, лежащую в подгруппе G и имеющую в G конечный индекс, что $f \notin SN$.

Действительно, если φ – естественный гомоморфизм группы F на группу F/N, то элемент $f\varphi = fN$ не принадлежит подгруппе $S\varphi = SN/N$ группы F/N. Кроме того, группа G/N конечна, а группа F/N, как легко видеть, будет расщепляемым расширением группы G/N с помощью группы HN/N, которая изоморфна группе H, причем группа SN/N наследует от группы S конечную порожденность и цикличность. Поэтому из сделанного выше замечания следует существование гомоморфизма ψ группы F/N на некоторую конечную группу такого, что $f\varphi\psi \notin S\varphi\psi$. Таким образом, гомоморфизм $\rho = \varphi\psi$ группы F на конечную группу таков, что $f\rho \notin S\rho$.

Если элемент f не принадлежит подгруппе SG, то искомой подгруппой N является подгруппа G. Пусть теперь $f \in SG$, т.е. $f = sg$, где $s \in S$ и $g \in G$. Очевидно, что элемент g не принадлежит подгруппе $S_1 = S \cap G$, и так как S_1 наследует от S свойство цикличности, в условиях любого из утверждений 1–3 подгруппа S_1 группы G финитно отделима. Поэтому в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $g \notin S_1N$, причем ввиду конечности ранга группы G и в силу леммы 4 подгруппу N можно считать вербальной в G и потому нормальной в F. Остается показать, что элемент f не принадлежит подгруппе SN. Если, напротив, $f = s_1x$, где $s_1 \in S$ и $x \in N$, то $sg = s_1x$, откуда получаем равенство $s^{-1}s_1 = gx^{-1}$, левая часть которого является элементом подгруппы S, а правая – элементом подгруппы G. Следовательно, $s^{-1}s_1 \in S_1$, и поэтому элемент $g = s^{-1}s_1x$ принадлежит подгруппе S_1N, что противоречит выбору подгруппы N. Теорема 3 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Как уже отмечалось выше, теорема 2 доказана в работе [9]. Здесь мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Пусть G – финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга. Покажем, что ее группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ финитно аппроксимируема. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ и $\varphi \neq 1$. Тогда $a^{-1} \cdot a\varphi \neq 1$ для некоторого элемента a группы G. Так как группа G финитно аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа N конечного индекса, не содержащая элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. По лемме 4 подгруппу N можно считать характеристической в G. Характеристичность подгруппы N позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\rho_N \colon \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/N$, сопоставляющий каждому автоморфизму ψ группы G автоморфизм ψ_N группы G/N, действующий по правилу: $(gN)\psi_N = g\psi N$, где $g \in G$. Так как $a^{-1} \cdot a\varphi \notin N$, то $aN \neq a\varphi N$, т.е. $aN \neq (aN)\varphi_N$. Поэтому $\varphi_N \neq 1$. Таким образом, ρ_N – гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} G$ в группу $\operatorname{Aut} G/N$, переводящий φ в неединичный элемент φ_N, причем группа $\operatorname{Aut} G/N$ конечна, так как конечен индекс подгруппы N в группе G. Следовательно, группа $\operatorname{Aut} G$ финитно аппроксимируема.

Пусть теперь F – расщепляемое расширение финитно аппроксимируемой группы G конечного общего ранга с помощью финитно аппроксимируемой группы H. Покажем, что группа F финитно аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента $f \in F$ указать нормальную подгруппу N группы F, не содержащую элемент f и такую, что фактор-группа F/N финитно аппроксимируема. Если $f \notin G$, то в качестве N можно взять подгруппу G, так как $F/G \cong H$ – финитно аппроксимируемая группа. Пусть теперь $f \in G$. Так как группа G финитно аппроксимируема, в ней существует нормальная подгруппа N конечного индекса, не содержащая элемент f. Ввиду леммы 4 подгруппу N можно считать вербальной в G и потому нормальной в F. При этом фактор-группа F/N финитно аппроксимируема как расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью финитно аппроксимируемой группы $HN/N \cong H$. Таким образом, подгруппа N является искомой. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. Чандлер, В. Магнус, *Развитие комбинаторной теории групп. Очерк истории развития идей*, Мир, М., 1985.

[2] А. И. Мальцев, “Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами”, *Матем. сб.*, **8 (50)**:3 (1940), 405–422.

[3] А. И. Мальцев, “Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы”, *Матем. сб.*, **25 (67)**:3 (1949), 347–366.

[4] Д. И. Молдаванский, “Два замечания о финитно аппроксимируемых группах с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов”, *Науч. тр. Ивановского гос. ун-та*, **4** (2001), 83–87.

[5] А. И. Мальцев, “О группах конечного ранга”, *Матем. сб.*, **22 (64)**:2 (1948), 351–352.

[6] Д. М. Смирнов, “К теории финитно аппроксимируемых групп”, *Укр. матем. журн.*, **15** (1962), 453–457.

[7] G. Baumslag, “Automorphism groups of residually finite groups”, *J. London Math. Soc.*, **38** (1963), 117–118.

[8] А. И. Мальцев, “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Уч. зап. Ивановского гос. пед. ин-та*, **18** (1958), 49–60.

[9] Д. Н. Азаров, “О почти аппроксимируемости конечными p-группами”, *Чебышевский сб.*, **11**:3 (2010), 11–21.

[10] R. B. J. T. Allenby, R. J. Gregorac, “On locally extended residually finite groups”, *Conference on Group Theory*, Lecture Notes Math., **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 9–17.

[11] Д. Н. Азаров, “О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:6 (2013), 1203–1215.

[12] Д. Н. Азаров, “О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений групп”, *Чебышевский сб.*, **13**:1 (2012), 9–19.

[13] J. C. Lennox, D. J. S. Robinson, *The Theory of Infinite Soluble Groups*, Clarendon press, Oxford, 2004.

[14] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1982.

Д. Н. Азаров
Ивановский государственный университет
E-mail: azarovdn@mail.ru

Поступило
28.07.2014
Исправленный вариант
10.06.2016