Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2019. Том 60, № 3

УДК 512.5

О КОНЕЧНЫХ ГОМОМОРФНЫХ ОБРАЗАХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

Д. Н. Азаров, Н. С. Романовский

Аннотация. Пусть π — конечное множество простых чисел. Доказано, что любая разрешимая группа конечного ранга содержит подгруппу конечного индекса, любой конечный гомоморфный π-образ которой нильпотентен. Аналогичное утверждение доказано для конечно порожденной группы конечного ранга. Эти утверждения получены как следствия из результата, установленного в работе: любая разрешимая про-π-группа конечного ранга содержит открытую нормальную пронильпотентную подгруппу.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.301

Ключевые слова: группа конечного ранга, разрешимая группа, гомоморфный образ группы, финитная аппроксимируемость, проконечная группа.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *группой конечного ранга*, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Вместо термина «группа конечного ранга» в зарубежной литературе используется также термин «группа конечного ранга Прюфера». Однако несомненное первенство в формировании понятия группы конечного ранга принадлежит А. И. Мальцеву. Это понятие и соответствующий термин «группа конечного специального ранга» введены А. И. Мальцевым в [1]. В дальнейшем такие группы стали называть просто группами конечного ранга.

Группы конечного ранга могут иметь достаточно сложное строение. Об этом свидетельствует, например, знаменитый результат А. Ю. Ольшанского [2] о существовании бесконечной группы, все собственные подгруппы которой являются группами простых порядков.

Группы конечного ранга занимают заметное место в теории разрешимых групп (см., например, [3]). Примерами разрешимой группы конечного ранга могут служить любая разрешимая минимаксная группа и, в частности, любая полициклическая группа. Напомним, что минимаксные группы — это группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет или условию минимальности, или условию максимальности для подгрупп. Разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой (см., например, [3, п. 5.1.6]).

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой группами из класса* $\mathscr{K}$ (или, короче, $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, при котором образ элемента g отличен от 1.

Наряду с $\mathscr{K}$-аппроксимируемостью изучается также и почти $\mathscr{K}$-аппроксимируемость. Напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Если $\mathscr{F}$ — класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости, введенным А. И. Мальцевым [4]. Примером финитно аппроксимируемой группы может служить любая полициклическая группа [5]. Более того, полициклические группы почти аппроксимируемы конечными p-группами для каждого простого p. Этот результат принадлежит А. Л. Шмелькину [6].

Необходимое условие финитной аппроксимируемости группы конечного ранга получено Лубоцким и Манном в [7]. А именно, они доказали, что если группа конечного ранга финитно аппроксимируема, то она почти локально разрешима. В [8] получен следующий аналог этого результата для аппроксимируемости конечными p-группами. Если группа конечного ранга аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна. Для полициклических групп этот результат установлен К. Сексенбаевым [9].

Для произвольных групп конечного ранга мы не располагаем критерием финитной аппроксимируемости. Однако для разрешимых групп конечного ранга такой критерий известен и принадлежит Робинсону (см., например, [3, п. 5.3.2]). Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел.

Вопрос об аппроксимируемости конечными p-группами разрешимых групп конечного ранга не исследован даже для полициклических групп. Тем не менее имеет место следующий аналог сформулированного выше критерия Робинсона для почти аппроксимируемости конечными p-группами и даже для почти аппроксимируемости конечными π-группами, где π — конечное множество простых чисел. Для разрешимой группы G конечного ранга следующие условия равносильны между собой.

1. Группа G почти аппроксимируема конечными π-группами.
2. Группа G почти аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами.
3. Все периодические подгруппы группы G конечны, и она не содержит подгрупп, изоморфных группе π-ичных дробей.

Этот результат в статье [10], посвященной работе первого автора [11], назван интересным. Основной результат из [11], обеспечивающий равносильность условий 1 и 2, формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Если разрешимая группа конечного ранга аппроксимируема конечными π-группами для некоторого конечного множества π простых чисел, то она содержит подгруппу конечного индекса, аппроксимируемую конечными нильпотентными π-группами.*

Здесь установлена следующая теорема, представляющая собой существенное усиление теоремы 1 и объясняющая причину возникновения свойства нильпотентной аппроксимируемости в условиях теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть π — конечное множество простых чисел. В каждой* *разрешимой группе конечного ранга существует подгруппа конечного индекса, любой конечный гомоморфный π-образ которой нильпотентен.*

Остается неясным, верна ли эта теорема для произвольных групп конечного ранга, т. е. можно ли в ней отказаться от условия разрешимости. Тем не менее удалось получить следующий аналог теоремы 2 для конечно порожденных групп конечного ранга.

Теорема 3. *Пусть π — конечное множество простых чисел. В каждой конечно порожденной группе конечного ранга существует подгруппа конечного индекса, любой конечный гомоморфный π-образ которой нильпотентен.*

С другой стороны, имеет место следующая известная теорема Робинсона (см. [3, п. 5.3.12]): если разрешимая минимаксная группа финитно аппроксимируема и не является нильпотентной, то некоторый ее конечный гомоморфный образ не нильпотентен.

Частным случаем этого утверждения является аналогичная классическая теорема, доказанная Гиршем для полициклических групп [3, п. 1.3.12].

Вернемся к теоремам 2 и 3. Они показывают, что среди конечных гомоморфных образов групп конечного ранга существует достаточно много нильпотентных групп. Это свидетельствует о значимости сформулированного выше результата Робинсона.

Теоремы 2 и 3 дают следующую информацию о семействе всех конечных гомоморфных π-образов для фиксированной разрешимой (или конечно порожденной) группы конечного ранга и фиксированного конечного множества π простых чисел: в группах этого семейства подгруппы Фиттинга имеют ограниченные индексы. Напомним, что *подгруппой Фиттинга* конечной группы называется ее наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа.

На самом деле теоремы 2 и 3 будут получены как следствия утверждения, касающегося проконечных групп конечного ранга. Говорят, что проконечная группа *имеет конечный ранг r*, если всякая ее замкнутая подгруппа r-порождена (как топологическая группа) и число r минимально с этим условием. Отметим, что в проконечных группах условия «любая замкнутая подгруппа r-порождена» и «любая конечно порожденная замкнутая подгруппа r-порождена» равносильны. Будет доказана

Теорема 4. *Пусть π — конечное множество простых чисел и G — разрешимая про-π-группа конечного ранга. Тогда в G найдется открытая нормальная пронильпотентная подгруппа.*

2. Доказательство теоремы 4 и следствий

2.1. Условимся, что, когда речь идет о проконечных группах, такие термины, как подгруппа, гомоморфизм, порождающее множество и прочее, понимаются в топологическом смысле. Укажем две монографии по проконечным группам [12, 13] и отметим, что в последней есть глава, посвященная проконечным группам конечного ранга. Сначала сформулируем несколько известных фактов о проконечных группах и финитно аппроксимируемых группах с проконечной топологией.

В проконечной группе существует понятие p-силовской подгруппы — максимальная про-p-подгруппа, и имеет место следующий аналог теоремы Силова.

Предложение 1. *В проконечной группе для простого p всякая про-p-подгруппа вкладывается в p-силовскую и все p-силовские подгруппы сопряжены.*

Предложение 2. *Проконечная группа r-порождена тогда и только тогда, когда всякий ее конечный гомоморфный образ r-порожден.*

Предложение 3. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа с проконечной топологией и ее пополнение конечно порождено (как проконечная группа). Тогда в G существует убывающий по типу натуральных чисел ряд открытых характеристических подгрупп, составляющих базу окрестностей единицы.*

Предложение 4. *Проконечная группа пронильпотентна тогда и только тогда, когда она разлагается в прямое (топологическое) произведение своих силовских подгрупп.*

Из предложения 2 вытекает

Предложение 5. *Проконечная группа имеет конечный ранг $\leq r$ тогда и только тогда, когда она является проективным пределом конечных групп ранга $\leq r$.*

Достаточно очевидны следующие утверждения.

Предложение 6. *Для абелевой проконечной группы эквивалентны следующие условия:*

1) *группа имеет конечный ранг $\leq r$;*
2) *группа r-порождена;*
3) *всякая силовская подгруппа r-порождена.*

Предложение 7. *Для разрешимой проконечной группы эквивалентны следующие условия:*

1) *группа имеет конечный ранг;*
2) *каждый фактор некоторого (любого) разрешимого ряда группы является абелевой проконечной группой конечного ранга;*
3) *существует натуральное r такое, что всякая силовская подгруппа имеет ранг $\leq r$.*

Предложение 8. *Если финитно аппроксимируемая группа имеет конечный ранг $\leq r$ и на ней задана некоторая проконечная топология, то соответствующее пополнение этой группы является проконечной группой конечного ранга $\leq r$.*

2.2. Далее понадобится следующий классический результат Ф. Холла [14, гл. IX, § 4, 2.1]).

Лемма 1. *Пусть p — простое число, G — конечная p-группа и Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы G. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$, то Γ является p-группой.*

Как обычно, через p' обозначим множество всех простых чисел, отличных от p.

Лемма 2. *Пусть p — простое число, A — нормальная про-p-подгруппа проконечной группы G, C — про-p'-подгруппа и B — (замкнутая) подгруппа.*

Предположим, что C действует сопряжениями тривиально на $A/A'A^p$ и на B по модулю A. Тогда C централизует A и B.

Доказательство. Достаточно установить лемму для случая, когда G является конечной группой. Действие группы C на A дает гомоморфизм $G \to \operatorname{Aut} A$. По лемме 1 образ должен быть p-группой, а потому он тривиален. Итак, C централизует A. Зафиксируем элемент $b \in B$. Для каждого $c \in C$ имеем $b^c = a_c b$, где $a_c \in A$. Понятно, что $b^{c_1 c_2} = a_{c_1} a_{c_2} b$. Получаем, что отображение $c \to a_c$ является гомоморфизмом $C \to A$. Он также должен быть тривиальным. Лемма доказана.

2.3. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4, оно требуется для случая, когда группа G некоммутативна. Возьмем последний нетривиальный коммутант группы G и в нем какую-то нетривиальную силовскую подгруппу A, пусть она соответствует простому числу $p \in \pi$. Тогда A — абелева конечно порожденная про-p-группа и она нормальна в G. По индукции предполагаем, что для G/A выполняется утверждение теоремы. Можно считать, что сама группа G/A является прямым произведением своих силовских подгрупп. Рассмотрим действие группы G сопряжениями на конечной абелевой p-группе A/A^p. Стабилизатор будет открытой нормальной подгруппой группы G, содержащей A. Без ограничения общности можно предполагать, что сама группа G действует тривиально на A/A^p. Покажем, что в этой ситуации G разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп. Пусть C — q-силовская подгруппа из G, где $q \in \pi,\ q \neq p$. Если B — силовская подгруппа из G, соответствующая простому числу $\neq q$, то C централизует B по модулю A, а тогда по лемме 2 C просто централизует B. Теорема 4 доказана.

2.4. Выведем теорему 2 из теоремы 4. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга и π — множество простых чисел. Обозначим через $\pi(G)$ пересечение ядер всех гомоморфизмов группы G в конечные π-группы. Это характеристическая подгруппа, и $G/\pi(G)$ — наибольшая по накрытию фактор-группа группы G, которая аппроксимируется конечными π-группами. Пусть G_π обозначает про-π-пополнение группы $G/\pi(G)$. По теореме 4 в G_π найдется открытая нормальная пронильпотентная подгруппа L. Возьмем пересечение $(G/\pi(G)) \cap L$ и его прообраз H в G. По построению H является нормальной подгруппой в G конечного π-индекса. Покажем, что $\pi(G) = \pi(H)$. С одной стороны, так как $H/(\pi(G) \cap H)$ аппроксимируется конечными π-группами, то $\pi(G) \geqslant \pi(H)$. С другой стороны, если $g \notin \pi(H)$, то по предложению 3 в группе $H/\pi(H)$ найдется открытая характеристическая подгруппа $U/\pi(H)$ такая, что $g \notin U$. Поскольку фактор-группа G/U является конечной π-группой, $g \notin \pi(G)$, так что $\pi(G) = \pi(H)$. Заодно отметим, что подгруппы вида $U/\pi(H)$ будут открытыми подгруппами и в $G/\pi(G)$. Поэтому про-π-топология группы $G/\pi(G)$ индуцирует на $H/\pi(H)$ собственную про-π-топологию. Значит, про-π-пополнение группы $H/\pi(H)$ отождествляется с подгруппой из L, а тогда всякий гомоморфный образ группы H в конечной π-группе будет нильпотентен. Теорема 2 доказана.

2.5. Выведем теорему 3 из теоремы 2. Для этого потребуется следующий частный случай основного результата из [7]: если конечно порожденная группа конечного ранга финитно аппроксимируема, то она почти разрешима.

Пусть π — конечное множество простых чисел и G — конечно порожденная группа конечного ранга. Покажем, что в G существует подгруппа H конечного индекса, любой конечный гомоморфный π-образ которой нильпотентен.

Обозначим через $f(G)$ пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G. Фактор-группа $G/f(G)$ является конечно порожденной финитно аппроксимируемой группой конечного ранга, поэтому (как отмечено выше) она содержит разрешимую подгруппу $S/f(G)$ конечного индекса. По теореме 2 в группе $S/f(G)$ существует подгруппа $H/f(G)$ конечного индекса, любой конечный гомоморфный π-образ которой нильпотентен. Так как группа $G/f(G)$ конечно порождена, подгруппу $H/f(G)$ можно выбрать характеристической. Тогда и H будет характеристической подгруппой конечного индекса в G. Легко понять, что $f(G) = f(H)$. Так как любой гомоморфизм группы H в конечную π-группу пропускается через $H/f(H) = H/f(G)$, его образ будет нильпотентен. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.
2. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 2. С. 309–321.
3. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.
4. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.
5. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
6. *Шмелькин А. Л.* О полициклических группах // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 1. С. 234–235.
7. *Lubotzky A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1989. V. 106, N 3. P. 185–188.
8. *Азаров Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга // Моделир. и анал. инф. систем. 2014. Т. 21, № 2. С. 163–169.
9. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 2. С. 79–83.
10. *Wehrfritz B. A. F.* Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank // Boll. Unione Mat. Ital. 2016. P. doi:10.1007/s40574-015-0047-8.
11. *Азаров Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, № 1. С. 7–19.
12. *Ribes L., Zalesskii P.* Profinite groups. Berlin: Springer-Verl., 2000.
13. *Wilson J. S.* Profinite groups. Oxford: Clarendon press, 1988.
14. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 17 июля 2018 г.
После доработки 11 февраля 2019 г.
Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru

Романовский Николай Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
rmnvski@math.nsc.ru