Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2020. Том 61, № 6

УДК 512.543

О СЛАБОЙ π–МОЩНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП И СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Группа G называется *слабо π-мощной*, если она финитно аппроксимируема и для любого элемента x бесконечного порядка группы G существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент x в элемент порядка mn. Получены результаты о слабой π-мощности для некоторых групп и обобщенных свободных произведений.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.601

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, разрешимая минимаксная группа, обобщенное свободное произведение групп.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для любого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм группы G на конечную группу, при котором образ элемента x отличен от единицы. Здесь рассмотрены некоторые более тонкие аппроксимационные свойства групп.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Целое положительное число n называется *π-числом*, если все простые делители числа n принадлежат множеству π. Элемент x группы G будем называть *π-мощным*, если выполняется одно из следующих двух условий.

1. Порядок элемента x бесконечен, и для любого целого положительного π-числа n существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

2. Порядок элемента x конечен, и для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Группу G будем называть *π-мощной*, если она финитно аппроксимируема и все ее элементы π-мощные. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятия π-мощного элемента и π-мощной группы совпадают с классическими понятиями мощного элемента и мощной группы.

Для элемента бесконечного порядка свойство «быть мощным» (без соответствующего термина) возникло в работе Стиба [1], где в качестве вспомогательного результата установлена мощность для свободных групп и для конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. В дальнейшем понятие мощности изучалось рядом авторов и было распространено на элементы конечного порядка (см., например, [2, 3]).

По сравнению с финитной аппроксимируемостью свойство группы «быть мощной» является достаточно жестким ограничением. Примерами финитно аппроксимируемых групп, не являющихся мощными, служат разрешимые группы Баумслага — Солитэра $G_{1n} = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$ при $n \geq 2$. Тем не менее эти группы π-мощные, где π — множество всех простых чисел, не делящих n.

Как выяснилось, многие группы, не обладающие свойством π-мощности, слабо π-мощные. Понятие слабой π-мощности вводится следующим образом.

Элемент x бесконечного порядка группы G называют *слабо π-мощным*, если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, переводящий x в элемент порядка mn.

Группу G называют *слабо π-мощной*, если она финитно аппроксимируема и все ее элементы бесконечного порядка слабо π-мощные. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие слабо π-мощного элемента совпадает с известным понятием слабо мощного элемента (см., например, [4]).

Перейдем к формулировкам результатов настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа и π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G. Пусть $X = (x)$ — бесконечная циклическая подгруппа группы G.*

Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n в группе G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что $X \cap W = X^{mn}$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1.1. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа. Тогда группа G слабо π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G.*

В связи с формулировками теоремы 1 и следствия 1.1 напомним, что группа почти обладает каким-либо свойством, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством. Напомним также, что в любой почти разрешимой минимаксной группе G существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является либо квазициклической группой, либо бесконечной циклической группой, либо конечной группой. *Спектром* почти разрешимой минимаксной группы G называется множество всех простых p, для которых соответствующая квазициклическая группа присутствует среди членов упомянутого выше ряда. Очевидно, что полициклические группы являются разрешимыми минимаксными группами с пустым спектром.

Полициклические группы (даже при отсутствии кручения) не являются, вообще говоря, мощными. Соответствующий пример построен в [3]. Так как любая полициклическая группа финитно аппроксимируема [5] и ее спектр пуст, из следствия 1.1 вытекает хорошо известное утверждение (см., например, [4, 6]).

Следствие 1.2. *Любая полициклическая группа слабо мощная.*

Разрешимые минимаксные группы составляют важный подкласс в классе всех разрешимых групп конечного ранга (см., например, [7]). Напомним, что группа G имеет конечный ранг, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой [8], в качестве еще одного следствия из следствия 1.1 получается

Следствие 1.3. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга. Тогда группа G слабо π-мощная для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.*

Перейдем к свободным произведениям групп. Прежде всего заметим, что остается открытым вопрос о замкнутости класса всех мощных групп относительно свободных произведений («Коуровская тетрадь», вопрос 9.1). С другой стороны, установленные в настоящей работе теоремы 2–7 показывают, что свойство слабой мощности (слабой π-мощности) ведет себя достаточно «хорошо» относительно свободных конструкций.

Теорема 2. *Пусть $G = A * B$ — свободное произведение групп A и B.*
1. *Если A и B — π-мощные группы без кручения, то G — π-мощная группа.*
2. *Если A и B — π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.*
3. *Если A и B — слабо π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.*

Утверждение 1 этой теоремы установлено в [2] для случая, когда π совпадает с множеством всех простых чисел. Утверждение 2 является частным случаем утверждения 3, а утверждение 3 — частным случаем следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с конечной объединенной подгруппой H.*

Если A и B — слабо π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.

Еще один результат настоящей работы относится к случаю, когда объединенная подгруппа H циклическая. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с бесконечной циклической объединенной подгруппой H. Пусть подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B, а порождающий элемент h подгруппы H слабо мощный в каждой из групп A и B.*

Если A и B — слабо π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.

Отсюда вытекает следующий результат, установленный в [4].

Следствие 4.1. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с бесконечной циклической объединенной подгруппой H, и пусть подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.*

Если A и B — слабо мощные группы, то G — слабо мощная группа.

Следующие три теоремы доказаны для свободного произведения $G = (A * B; H)$ финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H при различных ограничениях на H. Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима и минимаксна [8], эти теоремы применимы к свободному произведению $G = (A * B; H)$ финитно аппроксимируемых конечно порожденных групп A и B конечного ранга с объединением H.

Теорема 5. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$, и пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы.*

Следующие три утверждения равносильны между собой.

1. *Группа G финитно аппроксимируема.*

2. *Подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.*

3. *Группа G слабо π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.*

Равносильность утверждений 1 и 2 из формулировки теоремы 5 доказана в [9].

Следствие 5.1. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическим объединением является слабо мощной группой.*

Это известное утверждение вытекает из теоремы 5, так как любая полициклическая группа имеет пустой спектр и в ней все подгруппы финитно отделимы.

Теорема 6. *Пусть $G = (A*B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в каждой из групп A и B, причем $H \neq A$ и $H \neq B$, и пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы.*

Следующие три утверждения равносильны между собой.

1. *Группа G финитно аппроксимируема.*

2. *Подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.*

3. *Группа G слабо π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.*

Равносильность утверждений 1 и 2 из формулировки теоремы 6 доказана в [10].

Следствие 6.1. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с нормальным объединением является слабо мощной группой.*

Этот результат дополняет классическую теорему Баумслага [11], утверждающую финитную аппроксимируемость свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением.

Теорема 7. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечный индекс в каждой из групп A и B, причем $H \neq A$ и $H \neq B$, и пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы.*

Следующие три утверждения равносильны между собой.

1. *Группа G финитно аппроксимируема.*

2. *В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.*

3. *Группа G слабо π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы H.*

Равносильность утверждений 1 и 2 из формулировки теоремы 7 доказана в [12].

Следствие 7.1. *Пусть $G = (A*B; H)$ — свободное произведение почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечный индекс в каждой из групп A и B, причем $H \neq A$ и $H \neq B$.*

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой.

1. *Группа G финитно аппроксимируема.*

2. *В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.*

3. *Группа G слабо мощная.*

2. Вспомогательные утверждения

Пусть G — произвольная группа и n — целое положительное число. Через G^n, как обычно, будем обозначать степенную подгруппу, т. е. подгруппу группы G, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Если G — абелева группа, то G^n совпадает с множеством n-х степеней всех ее элементов. Если G — почти разрешимая минимаксная группа, то G^n, как легко видеть, имеет конечный индекс в G.

Лемма 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, A — абелева группа без кручения, не содержащая подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей, ни для какого p из π. Пусть $H = (h)$ — неединичная циклическая подгруппа группы A.*

Тогда для любого целого положительного π-числа n существует целое положительное π-число k такое, что $H \cap A^k = H^n$.

Доказательство. Пусть $n = {p_1}^{s_1} \dots {p_r}^{s_r}$ — разложение числа n на простые множители из π. По условию для каждого $i = 1, \dots, r$ группа A не содержит подгрупп, изоморфных Q_{p_i}. Поэтому для каждого $i = 1, \dots, r$ существует наибольшее целое неотрицательное число t_i, для которого уравнение $x^{{p_i}^{t_i}} = h$ разрешимо в группе A. Тогда $H \cap A^{{p_i}^{s_i+t_i}} = H^{{p_i}^{s_i}}$. Пересекая по всем $i = 1, \dots, r$ подгруппы, стоящие в левой (в правой) части этого равенства, получаем $H \cap A^k = H^n$, где $k = {p_1}^{s_1+t_1} \dots {p_r}^{s_r+t_r}$ — искомое π-число.

Лемма 2. *Пусть G — конечно порожденная почти свободная группа, F — какая-нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы G, $X = (x)$ — бесконечная циклическая подгруппа группы G, m — целое положительное число такое, что $X \cap F = X^m$.*

Для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм ψ группы G на конечную группу такой, что $|x\psi| = mn$.

В частности, имеют место следующие утверждения.

1. *Если $x \in F$ (т. е. если $m = 1$), то x — мощный элемент группы G.*

2. *Группа G слабо мощная.*

3. *В частности, обобщенное свободное произведение двух конечных групп является слабо мощной группой (так как оно почти свободно [11]).*

Доказательство. По теореме Магнуса в конечно порожденной свободной группе F пересечение всех членов нижнего центрального ряда $F = \gamma_1(F) \geq \gamma_2(F) \geq \dots$ тривиально, а все факторы этого ряда являются свободными абелевыми группами конечных рангов. Так как $x^m \in F$, найдутся соседние члены $A = \gamma_{i-1}(F)$ и $B = \gamma_i(F)$ такие, что $x^m \in A$ и $x^m \notin B$. Тогда $x^m B$ — неединичный элемент свободной абелевой группы A/B, и по лемме 1 для любого целого положительного числа n существует целое положительное число k такое, что элемент $x^m B$ имеет порядок n по модулю подгруппы $(A/B)^k = A^k B/B$. Тогда $|x^m A^k B| = n$, т. е. $X^m \cap A^k B = X^{mn}$, откуда $X \cap A^k B = X^{mn}$, т. е. порядок элемента xA^kB группы G/A^kB равен mn. Отсюда и из того, что группа G/A^kB финитно аппроксимируема (как конечно порожденная почти нильпотентная группа), следует, что существует гомоморфизм φ группы G/A^kB на конечную группу, переводящий xA^kB в элемент порядка mn. Теперь в качестве искомого гомоморфизма ψ нужно взять произведение $\varepsilon\varphi$, где ε — естественный гомоморфизм группы G на G/A^kB.

3. Доказательства теорем 1–7

Доказательство теоремы 1. Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G. Пусть $X = (x)$ — бесконечная циклическая подгруппа группы G.

Покажем, что существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n в группе G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что $X \cap W = X^{mn}$.

По условию теоремы в группе G существует разрешимая минимаксная подгруппа H конечного индекса. Так как H содержит в себе некоторую степенную подгруппу группы G и все степенные подгруппы группы G являются характеристическими подгруппами конечных индексов, можно считать, что H — характеристическая разрешимая минимаксная подгруппа конечного индекса группы G.

Пусть $\tau(H)$ — периодический радикал группы H, т. е. наибольшая нормальная периодическая подгруппа. Тогда $\tau(H)$ — разрешимая группа с условием минимальности, т. е. конечное расширение прямого произведения конечного (или нулевого) числа квазициклических групп. С другой стороны, группа G финитно аппроксимируема, поэтому она (а значит, и $\tau(H)$) не содержит квазициклических подгрупп. Следовательно, $\tau(H)$ — конечная подгруппа. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы G следует, что в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $N \cap \tau(H) = 1$, причем можно вдобавок считать, что N характеристична в G.

Из свойств подгрупп H и N следует, что подгруппа $S = H \cap N$ является характеристической разрешимой минимаксной подгруппой конечного индекса группы G и $S \cap \tau(H) = 1$. Отсюда и из того, что $\tau(S) \subseteq \tau(H)$, следует, что $\tau(S) = 1$.

По теореме А. И. Мальцева [7, п. 5.2.1] в фактор-группе произвольной разрешимой группы конечного ранга по ее периодическому радикалу существует характеристический ряд, все бесконечные факторы которого являются абелевыми группами без кручения конечного ранга. Отсюда и из того, что $\tau(S) = 1$, следует, что такой ряд существует и в группе S. Получаем, таким образом, характеристический ряд группы G: $G \geq S = S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_r = 1$, в котором все бесконечные факторы являются абелевыми группами без кручения конечного ранга.

Очевидно, что найдутся соседние члены этого ряда $A = S_{i-1}$ и $B = S_i$ такие, что $X \cap A = X^m \neq 1$ и $X \cap B = 1$. Тогда $x^m B$ — элемент бесконечного порядка группы A/B. Следовательно, A/B — бесконечная группа, поэтому она является абелевой группой без кручения конечного ранга.

Чтобы применить лемму 1 к группе A/B и к множеству π, нужно проверить, что A/B не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p, ни для какого p из π. Если предположить, что для некоторого p из π подгруппа Q_p содержится в A/B, то спектр группы Q_p (состоящий из одного числа p) содержится в спектре группы A/B, который, в свою очередь, содержится в спектре группы G, что противоречит определению множества π.

Пусть n — целое положительное π-число. Покажем, что в группе G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, $X \cap W = X^{mn}$.

Применяя лемму 1 к бесконечной циклической подгруппе $(x^m B)$ группы A/B, заключаем, что существует целое положительное π-число k такое, что элемент $x^m B$ имеет порядок n по модулю подгруппы $(A/B)^k = A^k B/B$. Поэтому элемент x^m группы A имеет порядок n по модулю подгруппы $A^k B$, т. е. $X^m \cap A^k B = X^{mn}$. Тогда $X \cap A^k B = X \cap A \cap A^k B = X^m \cap A^k B = X^{mn}$, т. е. порядок элемента $xA^k B$ группы $G/A^k B$ равен mn.

Покажем, что группа $G/A^k B$ финитно аппроксимируема. Общий критерий финитной аппроксимируемости почти разрешимой группы конечного ранга получен Робинсоном и состоит в том, что эта группа редуцирована, т. е. не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел [7, п. 5.3.2]. Так как группа $G/A^k B$ наследует от группы G свойства почти разрешимости и минимаксности, она не содержит подгрупп, изоморфных группе Q. Отсутствие в группе $G/A^k B$ квазициклических подгрупп следует из того, что все бесконечные факторы ряда $G \geq S = S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_{i-1} = A \geq A^k B$ являются абелевыми группами без кручения.

Таким образом, $xA^k B$ — элемент конечного порядка mn в финитно аппроксимируемой группе $G/A^k B$. Поэтому в группе $G/A^k B$ найдется степенная подгруппа $(G/A^k B)^l = G^l A^k B/A^k B$, по модулю которой порядок элемента $xA^k B$ равен mn. Тогда порядок элемента x по модулю подгруппы $W = G^l A^k B$ равен mn, т. е. $X \cap W = X^{mn}$, причем W — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G.

Доказательство теоремы 2. Как отмечалось, утверждения 2 и 3 теоремы 2 являются следствиями теоремы 3. Докажем утверждение 1 теоремы 2, т. е. что свободное произведение $G = A * B$ π-мощных групп A и B без кручения является π-мощной группой.

Обозначим через D декартову подгруппу группы G. Фактор-группа G/D изоморфна прямому произведению π-мощных групп A и B, поэтому G/D — π-мощная группа.

Покажем, что произвольный неединичный элемент x группы G π-мощный.

Это очевидно в случае, когда $x \notin D$. В этом случае (ввиду отсутствия кручения в группах A и B) элемент xD имеет бесконечный порядок в группе $G/D \cong A \times B$ и является π-мощным элементом этой группы. Тогда x является π-мощным элементом группы G как гомоморфный прообраз π-мощного элемента бесконечного порядка.

Рассмотрим случай, когда $x \in D$. В этом случае элемент x имеет несократимую запись $x = x_1 x_2 \dots x_r$ длины $r > 1$. Без потери общности можно считать, что $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, $x_3 \in A, \dots$. В силу финитной аппроксимируемости групп A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов групп A и B такие, что $x_1 \notin M$, $x_2 \notin N$, $x_3 \notin M, \dots$. Рассмотрим свободное произведение $G_{MN} = A/M * B/N$ конечных групп A/M и B/N, а также гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Тогда элемент $x\rho_{MN}$ имеет в группе G_{MN} несократимую запись $x\rho_{MN} = x_1 M \cdot x_2 N \cdot x_3 M \dots$ длины $r > 1$, поэтому $x\rho_{MN} \neq 1$. Отсюда и из того, что x принадлежит декартовой подгруппе D группы G, следует, что $x\rho_{MN}$ — неединичный элемент декартовой подгруппы F группы G_{MN}, причем (как и любая декартова подгруппа) F является нормальной свободной подгруппой группы G_{MN} и ее индекс в G_{MN} конечен (так как $G_{MN}/F \cong A/M \times B/N$ — конечная группа). Поэтому в силу леммы 2(1) $x\rho_{MN}$ — мощный элемент (бесконечного порядка) группы G_{MN}. Отсюда следует, что x — мощный (и, в частности, π-мощный) элемент группы G.

Доказательство теоремы 3. Пусть $G = (A * B; H = K)$ — свободное произведение слабо π-мощных групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. Покажем, что G — слабо π-мощная группа. Так как свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечным объединением финитно аппроксимируемо [11], группа G финитно аппроксимируема. Поэтому для доказательства слабой π-мощности группы G нужно проверить, что любой элемент x бесконечного порядка группы G слабо π-мощный.

Сначала рассмотрим частный случай, когда $x \in A$. Пусть $X = (x)$. Так как A — слабо π-мощная группа, существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n в группе A существует нормальная подгруппа P_n конечного индекса такая, что $X \cap P_n = X^{mn}$. В частности, $X \cap P_1 = X^m$.

Так как H — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы A, в A существует нормальная подгруппа T конечного индекса такая, что $H \cap T = 1$.

Пусть $S = P_1 \cap T$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $H \cap S = 1$, $X \cap S = X \cap P_1 \cap T = X^m \cap T = X^{ml}$ для некоторого целого положительного l.

Доказательство слабой π-мощности элемента x в группе G будет состоять в следующем: покажем, что для любого целого положительного π-числа k существует гомоморфизм группы G на конечную группу, при котором образ элемента x имеет порядок mlk.

Запишем число l в виде $l = l_1 l_2$, где l_1 — π-число, l_2 – π'-число, π' — дополнение к множеству π в множестве всех простых чисел. Для π-числа $n = l_1 k$ равенство $X \cap P_n = X^{mn}$ принимает вид $X \cap P_{l_1 k} = X^{ml_1 k}$. Пусть $U = P_{l_1 k} \cap S$. Тогда U — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $H \cap U = 1$, $X \cap U = X \cap P_{l_1 k} \cap X \cap S = X^{ml_1 k} \cap X^{ml} = X^d$, где $d = \text{НОК}(ml_1 k, ml_1 l_2) = ml_1 k l_2 = mlk$ (так как l_2 и k взаимно просты). Таким образом, $X \cap U = X^{mlk}$, т. е. порядок элемента x по модулю подгруппы U равен mlk.

Обозначим через V какую-нибудь нормальную подгруппу конечного индекса группы B, тривиально пересекающую K. Условие $H \cap U = 1 = K \cap V$ позволяет рассмотреть свободное произведение с объединением $G_{UV} = (A/U * B/V; HU/U = KV/V)$ конечных групп A/U и B/V, а также гомоморфизм $\rho_{UV} : G \to G_{UV}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/U$ и $B \to B/V$. Так как порядок элемента $x\rho_{UV} = xU$ группы G_{UV} равен mlk и группа G_{UV} финитно аппроксимируема [11], существует гомоморфизм ρ группы G_{UV} на конечную группу, сохраняющий порядок элемента $x\rho_{UV}$, т. е. такой, что $|x\rho_{UV}\rho| = |x\rho_{UV}| = mlk$. Это завершает доказательство слабой π-мощности элемента x для случая, когда $x \in A$. Аналогично рассматривается случай, когда $x \in B$.

Рассмотрим общий случай, когда x — произвольный элемент бесконечного порядка группы G. Так как порядки сопряженных элементов группы равны и любой элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом этой группы, нужно доказать слабую π-мощность для циклически несократимого элемента x бесконечного порядка группы G. Рассмотрим его несократимую запись $x = x_1 x_2 \dots x_r$. Если $r = 1$, то $x \in A$ или $x \in B$, и тогда в силу рассмотренного выше частного случая элемент x слабо π-мощный в группе G.

Пусть $r > 1$. Без потери общности можно считать, что $x_1 \in A \setminus H$, $x_2 \in B \setminus K$, $x_3 \in A \setminus H, \dots$. Так как H и K — конечные подгруппы финитно аппроксимируемых групп A и B, то H и K финитно отделимы в A и B. Поэтому существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов групп A и B такие, что $H \cap M = 1 = K \cap N$, и $x_1 \notin HM$, $x_2 \notin KN$, $x_3 \notin HM, \dots$. Условие $H \cap M = 1 = K \cap N$ позволяет рассмотреть обобщенное свободное произведение $G_{MN} = (A/M * B/N; HM/M = KM/N)$ конечных групп A/M и B/N, а также гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Так как запись $x = x_1 x_2 \dots x_r$ циклически несократима, в силу выбора подгрупп M и N запись $x\rho_{MN} = x_1 M \cdot x_2 N \cdot x_3 M \dots$ также циклически несократима и ее длина r больше 1. Поэтому $x\rho_{MN}$ имеет бесконечный порядок в группе G_{MN}, которая слабо мощная по лемме 2(3). Следовательно, $x\rho_{MN}$ — слабо мощный элемент группы G_{MN}. Отсюда следует, что x — слабо мощный (и, в частности, слабо π-мощный) элемент группы G.

Доказательство теоремы 4. Пусть $G = (A * B; h = k)$ — свободное произведение слабо π-мощных групп A и B с бесконечными объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$, финитно отделимыми в группах A и B соответственно. Пусть элементы h и k являются слабо мощными в группах A и B. Так как группа G финитно аппроксимируема [9, лемма 5], для доказательства слабой π-мощности группы G нужно проверить, что любой элемент x бесконечного порядка группы G слабо π-мощный.

Поскольку элементы h и k слабо мощные в группах A и B, существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n в группах A и B существуют нормальные подгруппы S_n и T_n конечных индексов такие, что $H \cap S_n = H^{mn}$ и $K \cap T_n = K^{mn}$. В частности, $H \cap S_1 = H^m$.

Сначала рассмотрим частный случай, когда $x \in A$. Пусть $X = (x)$. Так как A — слабо π-мощная группа, существует целое положительное число μ такое, что для любого целого положительного π-числа ν в группе A существует нормальная подгруппа P_ν конечного индекса такая, что $X \cap P_\nu = X^{\mu\nu}$. В частности, $X \cap P_1 = X^\mu$.

Пусть $S = S_1 \cap P_1$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, при этом $H \cap S = H \cap S_1 \cap P_1 = H^m \cap P_1 = H^{ml}$, $X \cap S = X \cap P_1 \cap S_1 = X^\mu \cap S_1 = X^{\mu\lambda}$ для некоторых целых положительных l и λ.

Доказательство слабой π-мощности элемента x в группе G будет состоять в следующем: для любого целого положительного π-числа κ укажем гомоморфизм группы G на конечную группу, при котором образ элемента x имеет порядок $\mu\lambda\kappa$.

Запишем число λ в виде $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, где λ_1 — π-число, λ_2 — π'-число. Для π-числа $\nu = \lambda_1\kappa$ равенство $X \cap P_\nu = X^{\mu\nu}$ принимает вид $X \cap P_{\lambda_1\kappa} = X^{\mu\lambda_1\kappa}$.

Пусть $U = P_{\lambda_1\kappa} \cap S$. Тогда U — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $H \cap U = H \cap S \cap P_{\lambda_1\kappa} = H^{ml} \cap P_{\lambda_1\kappa} = H^{mll_1}$ для некоторого целого положительного числа l_1 и $X \cap U = X \cap P_{\lambda_1\kappa} \cap X \cap S = X^{\mu\lambda_1\kappa} \cap X^{\mu\lambda} = X^\delta$, где $\delta = \text{НОК}(\mu\lambda_1\kappa, \mu\lambda_1\lambda_2) = \mu\lambda_1\kappa\lambda_2 = \mu\lambda\kappa$ (так как λ_2 и κ взаимно просты). Таким образом, $X \cap U = X^{\mu\lambda\kappa}$ и $H \cap U = H^{mll_1}$, т. е. $|xU| = \mu\lambda\kappa$ и $|hU| = mll_1$.

При $n = ll_1$ равенство $K \cap T_n = K^{mn}$ принимает вид $K \cap T_{ll_1} = K^{mll_1}$. Подгруппа $V = T_{ll_1}$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы B и $|kV| = mll_1 = |hU|$.

Последнее равенство позволяет рассмотреть свободное произведение с циклическим объединением $G_{UV} = (A/U * B/V; hU = kV)$ конечных групп A/U

и B/V, а также гомоморфизм $\rho_{UV} : G \to G_{UV}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/U$ и $B \to B/V$. Так как $|x\rho_{UV}| = |xU| = \mu\lambda\kappa$ и группа G_{UV} финитно аппроксимируема [11], существует гомоморфизм ρ группы G_{UV} на конечную группу такой, что $|x\rho_{UV}\rho| = |x\rho_{UV}| = \mu\lambda\kappa$. Это завершает доказательство слабой π-мощности элемента x для случая, когда $x \in A$. Аналогично рассматривается случай, когда $x \in B$.

Рассмотрим общий случай, когда x — произвольный элемент бесконечного порядка группы G. Как и в доказательстве теоремы 3, можно считать, что элемент x циклически несократим. Рассмотрим его несократимую запись $x = x_1x_2\dots x_r$. Если $r = 1$, то $x \in A$ или $x \in B$, и тогда в силу рассмотренного выше частного случая элемент x является слабо π-мощным в G.

Пусть теперь $r > 1$. Можно считать, что $x_1 \in A \setminus H$, $x_2 \in B \setminus K$, $x_3 \in A \setminus H, \dots$. Так как по условию теоремы H и K финитно отделимы в A и B, существуют нормальные подгруппы Q и R конечных индексов групп A и B такие, что $x_1 \notin HQ$, $x_2 \notin KR$, $x_3 \notin HQ, \dots$.

Очевидно, что существуют целые положительные числа i и j такие, что $H \cap Q = H^i$ и $K \cap R = K^j$. При $n = ij$ равенства $H \cap S_n = H^{mn}$ и $K \cap T_n = K^{mn}$ принимают вид $H \cap S_{ij} = H^{mij}$ и $K \cap T_{ij} = K^{mij}$. С другой стороны, как отмечалось выше, $H \cap Q = H^i$ и $K \cap R = K^j$. Поэтому для подгрупп $M = Q \cap S_{ij}$ и $N = R \cap T_{ij}$ имеют место равенства $H \cap M = H^{mij}$ и $K \cap N = K^{mij}$, т. е. $|hM| = mij = |kN|$.

Последнее равенство позволяет рассмотреть обобщенное свободное произведение $G_{MN} = (A/M * B/N; hM = kN)$ конечных групп A/M и B/N, а также гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$.

Так как $M \subseteq Q$, $N \subseteq R$, $x_1 \notin HQ$, $x_2 \notin KR$, $x_3 \notin HQ, \dots$, то $x_1 \notin HM$, $x_2 \notin KN$, $x_3 \notin HM, \dots$. Это означает, что запись $x\rho_{MN} = x_1M \cdot x_2N \cdot x_3M \dots$ несократима (и даже циклически несократима), причем ее длина r больше 1. Поэтому $x\rho_{MN}$ имеет бесконечный порядок в группе G_{MN}, которая слабо мощная по лемме 2(3). Следовательно, $x\rho_{MN}$ — слабо мощный элемент группы G_{MN}. Отсюда следует, что x — слабо мощный (и, в частности, слабо π-мощный) элемент группы G.

Доказательство теоремы 5. Пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B. По следствию 1.1 группы A и B слабо π-мощные.

Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой $H = (h)$, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Доказываемая здесь теорема 5 утверждает равносильность следующих условий.

1. Группа G финитно аппроксимируема.
2. Подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.
3. Группа G слабо π-мощная.

Равносильность условий 1 и 2 доказана в [9]. Здесь будет доказано, что эти условия равносильны условию 3. Прежде всего заметим, что в случае, когда подгруппа H конечна, все три условия выполняются (слабая π-мощность группы G обеспечивается теоремой 3, а финитная аппроксимируемость группы G — теоремой Баусмслага [11]).

Теперь можно считать, что H — бесконечная циклическая подгруппа. В [9, лемма 3] доказано, что если в финитно аппроксимируемой почти разрешимой минимаксной группе A бесконечная циклическая подгруппа H финитно отделима, то ее порождающий элемент h слабо мощный в группе A. Поэтому если выполняется условие 2, то элемент h слабо мощный в группах A и B, и тогда по теореме 4 группа G наследует слабую π-мощность от групп A и B. Таким образом, справедлива импликация $2 \Rightarrow 3$.

Для завершения доказательства остается заметить, что импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

Доказательство теоремы 6. Пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B. Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$.

Доказываемая здесь теорема 6 утверждает равносильность следующих условий.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. Подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B, т. е. фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы.

3. Группа G слабо π-мощная.

Равносильность условий 1 и 2 доказана в [10]. Импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна, и остается проверить импликацию $2 \Rightarrow 3$.

Пусть выполняется условие 2, т. е. фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы. Имеем следующий набор финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп: A, B, A/H и B/H, причем спектр каждой из этих групп не пересекается с множеством π. Поэтому в силу следствия 1.1 группы A, B, A/H и B/H слабо π-мощные. Отсюда по теореме 2 следует, что свободное произведение $A/H * B/H \cong G/H$ является слабо π-мощной группой.

Так как по условию 1 группа G финитно аппроксимируема, для доказательства ее слабой π-мощности нужно проверить слабую π-мощность для произвольного элемента x бесконечного порядка группы G.

Если порядок элемента xH бесконечен, то в силу слабой π-мощности группы G/H элемент xH (а значит, и элемент x) слабо π-мощный.

Пусть элемент xH имеет конечный порядок l, т. е. $X \cap H = X^l$, где $X = (x)$. Тогда X^l — бесконечная циклическая подгруппа в финитно аппроксимируемой почти разрешимой минимаксной группе H, причем спектр группы H содержится в спектрах групп A и B и, следовательно, не пересекается с множеством π.

Поэтому в силу теоремы 1 существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n в группе H существует характеристическая подгруппа W_n конечного индекса такая, что $X^l \cap W_n = X^{lmn}$. Тогда $X \cap W_n = X \cap H \cap W_n = X^l \cap W_n = X^{lmn}$, т. е. $|xW_n| = lmn$. Заметим, что W_n нормальна в G (так как W_n характеристична в H и H нормальна в G). Пусть $\varepsilon_n : G \to G/W_n$ — естественный гомоморфизм. Тогда $|x\varepsilon_n| = |xW_n| = lmn$.

Группы A/W_n и B/W_n являются расширениями конечной группы H/W_n с помощью финитно аппроксимируемых групп A/H и B/H. Поэтому A/W_n и B/W_n финитно аппроксимируемы, в чем легко убедиться, используя результат Робинсона [7, п. 5.3.2], утверждающий, что для разрешимой (почти разрешимой) группы конечного ранга финитная аппроксимируемость равносильна редуцированности, т. е. отсутствию квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел.

Фактор-группа $G/W_n = (A/W_n * B/W_n; H/W_n)$ представляет собой свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/W_n и B/W_n с конечной объединенной подгруппой H/W_n. Поэтому группа G/W_n финитно аппроксимируема [11]. Отсюда и из того, что $x\varepsilon_n$ — элемент порядка lmn группы G/W_n, следует, что существует гомоморфизм φ_n группы G/W_n на конечную группу такой, что порядок элемента $x\varepsilon_n\varphi_n$ равен lmn. Это завершает доказательство слабой π-мощности элемента x.

Доказательство теоремы 7. Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп A и B.

Доказываемая здесь теорема 7 утверждает равносильность следующих условий.

1. Группа G финитно аппроксимируема.
2. В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.
3. Группа G слабо π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы H.

Равносильность условий 1 и 2 доказана в [12]. Импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна, и в проверке нуждается только импликация $2 \Rightarrow 3$.

Пусть выполняется условие 2, т. е. в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G. Так как по условию 1 группа G финитно аппроксимируема, для проверки условия 3 остается доказать слабую π-мощность для произвольного элемента x бесконечного порядка группы G.

Сначала рассмотрим случай, когда xL — элемент бесконечного порядка группы $G/L = (A/L * B/L; H/L)$ (которая представляет собой свободное произведение конечных групп A/L и B/L с объединением H/L, поэтому является слабо мощной в силу леммы 2). В этом случае элемент xL (а значит, и элемент x) слабо мощный и, в частности, слабо π-мощный.

Пусть элемент xL имеет конечный порядок l, т. е. $X \cap L = X^l$, где $X = (x)$. Тогда X^l — бесконечная циклическая подгруппа в финитно аппроксимируемой почти разрешимой минимаксной группе L. Еще заметим, что спектр группы L совпадает со спектром группы H, поэтому не пересекается с множеством π.

Следовательно, в силу теоремы 1 существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n в группе L существует характеристическая подгруппа W_n конечного индекса такая, что $X^l \cap W_n = X^{lmn}$. Тогда $X \cap W_n = X \cap L \cap W_n = X^l \cap W_n = X^{lmn}$, т. е. $|xW_n| = lmn$. Заметим, что W_n нормальна в G (так как W_n характеристична в L и L нормальна в G). Пусть $\varepsilon_n : G \to G/W_n$ — естественный гомоморфизм. Тогда $|x\varepsilon_n| = |xW_n| = lmn$.

Фактор-группа $G/W_n = (A/W_n * B/W_n; H/W_n)$ представляет собой свободное произведение конечных групп A/W_n и B/W_n с объединенной подгруппой H/W_n. Поэтому группа G/W_n финитно аппроксимируема [11]. Отсюда и из того, что $|x\varepsilon_n| = lmn$, следует, что существует гомоморфизм φ_n группы G/W_n на конечную группу такой, что $|x\varepsilon_n\varphi_n| = lmn$. Это завершает доказательство слабой π-мощности элемента x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stibe P.* Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.

2. *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36, N 1. P. 204–210.
3. *Hartley B., Lennox J. C., Rhemtulla A. H.* Cyclically separated groups // Bull. Aust. Math. Soc. 1982. V. 26. P. 355–384.
4. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
5. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. Lond. Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
6. *Tang C. Y.* Conjugacy separability of generalized free products of certain conjugacy separable groups // Can. Math. Bull. 1995. V. 38, N 1. P. 120–127.
7. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon Press, 2004.
8. *Lubotzky A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1989. V. 106. P. 185–188.
9. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 483–491.
10. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.
11. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
12. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.

Поступила в редакцию 28 апреля 2020 г.
После доработки 17 июня 2020 г.
Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru