ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Д. В. Гольцов (г. Иваново)

Аннотация

Для некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп получены критерии почти аппроксимируемости корневым классом.

Ключевые слова: почти аппроксимируемость корневым классом групп, обобщенное свободное произведение групп, HNN-расширение.

ON THE VIRTUAL RESIDUALITY ROOT-CLASS RESIDUALITY OF GENERALIZED FREE PRODUCTS AND HNN-EXTENSION OF GROUPS

D. V. Goltsov

Abstract

The necessary and sufficient conditions of virtual root-class residuality for some generalized free products and HNN-extensions are obtained.

Keywords: virtually root-class residuality, generalized free product of groups, HNN-extension.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — непустой класс групп.

Группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если она содержит некоторую $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Пусть группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Рассмотрим семейство $(H_i)_{i \in I}$ всех $\mathcal{K}$-аппроксимируемых подгрупп конечного индекса группы G. Число

$$n = \min_{i \in I} [G : H_i]$$

будем называть индексом почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Пусть как и выше $\mathcal{K}$ — непустой класс групп. Класс $\mathcal{K}$ называется корневым [1], если выполнены следующие три условия:

1. Если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B — подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ — субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Примером корневого класса может служить класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп и класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп.

Здесь рассматривается аппроксимируемость обобщенных свободных произведений групп корневыми классами.

В [2, с. 429] приводится следующий результат К. Грюнберга: для того, чтобы любое свободное произведение групп аппроксимируемых данным корневым классом $\mathcal{K}$ само было $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой необходимо и достаточно, чтобы любая свободная группа была $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой.

В [3] Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо доказали, что любая свободная группа аппроксимируема любым корневым классом. Поэтому свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Здесь мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. . *Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое семейство групп и пусть $A = *_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ — свободное произведение групп A_λ. Группа A почти аппроксимируема корневым классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда все A_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости групп A_λ ограничены.*

Рассмотрим теперь свободное произведение P групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы корневым классом

$\mathcal{K}$, то группа P уже не обязана быть $\mathcal{K}$-аппроксимируемой. Большинство результатов о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы P получены в случае, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом всех конечных групп или с классом всех конечных p-групп. Оба эти класса являются корневыми. Наиболее исследованным аппроксимационным свойством обобщенных свободных произведений является финитная аппроксимируемость, т. е. аппроксимируемость классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп. Исследования в данном направлении как правило представляют собой доказательство финитной аппроксимируемости свободного произведения P групп A и B с объединенными подгруппами H и K при определенных ограничениях на группы A и B и объединяемые подгруппы H и K. Так, например, Г Баумслагом в [4] доказано, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой. Аналогичный результат для аппроксимируемости корневым классом уже не имеет место, поскольку, например, обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Тем не менее, если $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым, то свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Данное утверждение является частным случаем доказанной ниже теоремы. Эта теорема будет доказана в более общей ситуации — для свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной конечной подгруппой.

Пусть $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое (возможно бесконечное) семейство групп.

И пусть
$$G = (*_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, H)$$
— свободное произведение групп G_λ с одной объединенной подгруппой H. В работе [5] Д. Н. Азаровым доказано следующее утверждение, обобщающее упомянутый выше результат Баумслага.

Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и подгруппа H конечна. Тогда группа $G = (*_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, H)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе G_λ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса, тривиально пересекающая H, и такая, что индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены в совокупности.

В [5] получен аналогичный критерий для аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп. Здесь мы рассмотрим свойство почти аппроксимируемости такого свободного произведения корневым классом $\mathcal{K}$. Нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть группа $G = (*_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, H)$ финитно аппроксимируема и подгруппа H конечна. Группа G тогда и только тогда почти аппроксимируема корневым классом $\mathcal{K}$, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема и индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости групп G_λ ограничены в совокупности.*

Отсюда и из упомянутого выше результата Г. Баумслага вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $P = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B финитно аппроксимируемы и почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то и группа P почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. В частности, если группы A и B почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, состоящим из конечных групп, то группа P почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

А. Л. Шмелькин в работе [6] доказал, что произвольная полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Поэтому частным случаем следствия 1 является следующее утверждение.

Следствие 2. *Свободное произведение любых двух полициклических групп с конечными объединенными подгруппами является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для каждого простого числа p.*

Хорошо известно, [7] что HNN-расширение финитно аппроксимируемой группы с конечными связанными подгруппами само является финитно аппроксимируемой группой. Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на аппроксимируемость произвольным корневым классом, но тем не менее, нам удалось доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $C^* = (C, t, t^{-1}Ht = K)$ — HNN-расширение группы C с конечными связанными подгруппами H и K. Если группа C финитно аппроксимируемы и почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то и группа C^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. В частности, если группа C почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, состоящим из конечных групп, то группа C^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Отсюда и из отмеченного выше результат А.Л. Шмелькина следует, что HNN-расширение полициклической группы с конечными связанными подгруппами является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для каждого простого числа p.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый корневой класс групп, пусть $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство групп и пусть

$$A = *_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

— свободное произведение групп A_λ.

Очевидно, что если группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то любая подгруппа этой группы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема, и ее индекс почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости не превосходит индекса почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G. Поэтому, если группа A почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее подгруппы A_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, и индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости групп A_λ ограничены индексом почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы A. Таким образом, необходимость в теореме очевидна. Для доказательства достаточности сначала докажим следующую лемму.

Лемма 1. . *Пусть все группы A_λ конечны и их порядки ограничены. Тогда существует гомоморфизм группы A на конечную группу, инъективный на всех A_λ.*

Доказательство. Так как порядки групп A_λ ограничены, то все эти группы с точностью до изоморфизма исчерпываются конечным набором групп B_1, B_2, ..., B_n. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через φ_λ изоморфизм группы A_λ на одну из групп B_i. Тогда изоморфизмы φ_λ можно продолжить до гомоморфизма φ группы A на прямое произведение групп $B_1, B_2, ..., B_n$. Этот гомоморфизм является искомым. Лемма доказана.

Пусть теперь для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа A_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема и индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости групп A_λ ограничены. Покажем, что свободное произведение A групп A_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемо.

По условию для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе A_λ существует $\mathcal{K}$-аппроксимируемая подгруппа B_λ такая, что индексы $[A_\lambda : B_\lambda]$ ограничены. Без потери общности можно считать, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа B_λ является нормальной в группе A_λ. Пусть

$$C = *_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda/B_\lambda.$$

— свободное произведение фактор-групп A_λ/B_λ. И пусть ε — гомоморфизм группы A на группу C, продолжающий естественные гомоморфизмы $A_\lambda \to A_\lambda/B_\lambda$. Так как порядки групп A_λ/B_λ ограничены, то по лемме 1 существует гомоморфизм ρ группы C на некоторую конечную группу D инъективный на всех A_λ/B_λ. Обозначим через L ядро гомоморфизма $\varepsilon\rho$. Тогда L — нормальная подгруппа конечного индекса группы A и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $A_\lambda \cap L = B_\lambda$. По теореме Куроша L раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$x^{-1}A_\lambda x \cap L = x^{-1}(A_\lambda \cap L)x = x^{-1}B_\lambda x,$$

где $x \in A$. Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо [3] доказали, что свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Кроме того в [3] доказано, что свободная группа аппроксимируема любым корневым классом. Так как свободная группа F и подгруппы $x^{-1}B_\lambda x \cong B_\lambda$ являются $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми, то и группа L также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Таким образом, группа A почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый корневой класс, пусть $G = (*_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, H)$ — свободное произведение групп G_λ с конечной объединенной подгруппой H, и пусть группа G финитно аппроксимируема.

Предположим, что группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема, т. е. содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу индекса n. Тогда все G_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, и их индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости ограничены числом n.

Наоборот, пусть группы G_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости групп G_λ ограничены числом n. Так как группа G финитно аппроксимируема и H — конечная подгруппа группы G, то в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $N \cap H = 1$. По теореме Х. Нейман [8, с. 122] подгруппа N раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$x^{-1} G_\lambda x \cap N = x^{-1}(G_\lambda \cap N)x,$$

где $x \in G$. Группы $x^{-1}(G_\lambda \cap N)x$ изоморфны некоторым подгруппам в группах G_λ. Отсюда из того, что группы G_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и их индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости ограничены, следует, что аналогичным свойством обладают и подгруппы $x^{-1}(G_\lambda \cap N)x$.

Так как свободная группа F является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой, группы $x^{-1}(G_\lambda \cap N)x$ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и их индексы почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости ограничены, то по теореме 1 группа N почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что индекс подгруппы N в группе G конечен, следует, что и группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

4. Доказательство теоремы 3

Пусть C — группа, H и K — подгруппы группы C, φ —изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$C^* = \langle C, t; t^{-1}ht = h\varphi (h \in H) \rangle$$

— HNN-расширение группы C со связанными подгруппами H и K. Будем предполагать, что подгруппы H и K конечны. И пусть группа C финитно аппроксимируема и почти аппроксимируема корневым классом $\mathcal{K}$. Покажем, что группа C^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как группа C почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то в ней существует подгруппа U конечного индекса аппроксимируемая классом $\mathcal{K}$. Без потери общности можно считать, что подгруппа U нормальна в C. Так как группа C финитно аппроксимируема, а подгруппы H и K конечные, то в группе C существует нормальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \cap H = 1$ и $V \cap K = 1$.

Пусть $M = U \cap V$. Тогда M — нормальная подгруппа конечного индекса группы C, $M \cap H = 1$, $M \cap K = 1$ и группа M аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Так как $H \cap M = 1 = K \cap M$, то отображение φ_{M} подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы C/M на подгруппу $KM/M = \{kM : k \in K\}$ группы C/M, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi M$ из KM/M, является изоморфизмом. Поэтому можно рассматривать HNN-расширение

$$C^*_{M} = \langle C_{M},\ t;\ t^{-1}\overline{h}t = \overline{h}\varphi_{M}\ (\overline{h} \in HM/M)\ \rangle$$

группы $C_{M} = C/M$ со связанными подгруппами HM/M и KM/M. Так как группа C_{M} конечная, то группа C^*_{M} финитно аппроксимируема [7].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_{M} : C^* \longrightarrow C^*_{M}$, продолжающий естественный гомоморфизм $\varepsilon_{M} : C \longrightarrow C_{M}$ и такой, что $t\rho_{M} = t$. Тогда для каждого элемента a из C выполняется $a\rho_{M} = aM$.

Так как группа C^*_{M} финитно аппроксимируема и ее подгруппа C_{M} конечна, то существует гомоморфизм σ группа C^*_{M} на конечную группу $\overline{C}$, иньективный на подгрупре C_{M}. Тогда произведение $\rho_{M}\sigma$ является гомоморфизмом группы C^* на конечную группу $\overline{C}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{M}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы C^*.

Поскольку $C \cap Ker\ \rho_{M} = M$ и σ инъективен на подгрупре $C_{M} = C\rho_{M}$, то $C \cap Ker\ \rho_{M}\sigma = M$, т. е. $L \cap C = M$. Тогда $L \cap H = L \cap C \cap H = M \cap H = 1$. Таким образом, подгруппа L тривиально пересекаются со связанной подгруппой H. Поэтому в силу теоремы А. Карраса и Д. Солитера [8, с. 288] подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Cx = x^{-1}(L \cap C)x = x^{-1}Mx,$$

где $x \in C^*$. Поскольку группа F и подгруппы $L \cap x^{-1}Cx$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, то и группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе C^*, следует, что группа C^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.

2. Магнус К., Каррас А, Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

3. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6—10.

4. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.

5. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 3—13.

6. Шмелькин А. Л. Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.

7. Baumslag B., Tretkoff M. Residually finite HNN-extensions // Commun. in Algebra. 1978. Vol. 6, № 2. P. 179—194.

8. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

Ивановский государственный университет
Поступило 18.09.2013