Математические заметки

Том 97 выпуск 5 май 2015

УДК 512.543

Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп

Д. В. Гольцов

Рассматривается HNN-расширение группы с центральными связными подгруппами. Получены несколько условий аппроксимируемости такого HNN-расширения корневым классом групп, замкнутым относительно факторизации.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10653

1. Введение. Пусть $\mathscr{K}$ – абстрактный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу. Класс $\mathscr{K}$ называется *корневым*, если выполнены следующие три условия:

1) если группа A принадлежит классу $\mathscr{K}$ и B – подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathscr{K}$;
2) прямое произведение любых двух групп из класса $\mathscr{K}$ принадлежит классу $\mathscr{K}$;
3) если $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ – субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathscr{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathscr{K}$.

Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathscr{K}$ (или короче $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, переводящий элемент g в элемент отличный от 1.

Если класс $\mathscr{K}$ совпадает с классом $\mathscr{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathscr{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматривается также $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость, $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемость и S-аппроксимируемость, где p – простое число, π – множество простых чисел, $\mathscr{F}_p$ – класс всех конечных p-групп, $\mathscr{F}_\pi$ – класс всех конечных π-групп, S – класс всех разрешимых групп. Заметим, что все перечисленные классы $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_p$, $\mathscr{F}_\pi$, S являются корневыми и замкнутыми относительно факторизации.

Пусть G – группа, H и K – подгруппы группы G и $\varphi\colon H \to K$ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Рассмотрим HNN-расширение

$$G^* = \langle G, t;\, t^{-1}Ht = K, \varphi\rangle$$

группы G с подгруппами H и K связанными изоморфизмом φ. В работе рассматривается вопрос об аппроксимируемости корневым классом $\mathscr{K}$ HNN-расширения G^* в случае, когда подгруппы H и K являются центральными. Здесь доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G^* – HNN-расширение группы G с центральными подгруппами H и K, связанными изоморфизмом φ, причем $H \cap K = 1$. Пусть $\mathscr{K}$ – корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *если группа G принадлежит классу $\mathscr{K}$, то группа G^* аппроксимируема классом $\mathscr{K}$;*
2) *если группа G аппроксимируема классом $\mathscr{K}$, а подгруппы H и K конечные, то группа G^* аппроксимируема классом $\mathscr{K}$.*

Поскольку класс $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп является корневым и замкнутым относительно факторизации, то непосредственным следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть π – произвольное множество простых чисел. Любое HNN-расширение $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группы G с конечными центральными подгруппами H и K, пересекающимися тривиально, является $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группой.*

Это следствие обобщает следующий результат Молдаванского из [1].

Пусть p – простое число. Любое HNN-расширение $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы G с конечными центральными подгруппами H и K, пересекающимися тривиально, является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Частным случаем этого утверждения является следующий результат, полученный Тумановой в статье [2].

Любое HNN-расширение конечной p-группы G с центральными подгруппами H и K, пересекающимися тривиально, является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой.

В приведенных выше результатах предполагается, что связанные подгруппы H и K пересекаются тривиально. Это предположение существенно. В самом деле, HNN-расширение конечной p-группы с центральными связанными подгруппами не обязано быть $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой. В качестве соответствующего примера можно рассмотреть группу $\langle G, t;\, t^{-1}Gt = G, \varphi\rangle$, где G – неединичная абелева p-группа, φ – автоморфизм группы G, порядок которого взаимно прост с p.

В случае, когда связанные подгруппы H и K являются центральными и имеют неединичное пересечение, вопрос об $\mathscr{K}$-аппроксимируемости HNN-расширения $\mathscr{K}$-группы G остается неисследованным. Для обобщенных свободных произведений аналогичный вопрос решается следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{K}$ – корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации. Тогда свободное произведение двух групп из класса $\mathscr{K}$ с центральными объединенными подграппами является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой.*

Эта теорема была доказана Азаровым и Тумановой в работе [3].

Вопросам $\mathscr{F}$-аппроксимируемости и $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширений с центральными связными подгруппами посвящены работы Молдаванского [4] и [1].

Так в [4] получен критерий $\mathscr{F}$-аппроксимируемости группы $G^* = \langle G, t;\ t^{-1}Ht = K, \varphi\rangle$ при условии, что H и K – собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы G и в группе G финитно отделимы все подгруппы, лежащие в подгруппе $H \cdot K$ и имеющие в ней конечный индекс. Аналогичные утверждения для $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширений получены в работе [1].

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теоремы 1 используется несколько известных результатов. Первые две леммы относятся к известным свойствам корневых классов. Первая из них была доказана Грюнбергом в [5], вторая получена Азаровым и Тьеджо в статье [6].

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{K}$ – корневой класс групп. Свободное произведение любого семейства $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой.*

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{K}$ – корневой класс групп. Расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы с помощью группы из класса $\mathscr{K}$ является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой.*

Следующая лемма является очевидным свойством группы, аппроксимируемой корневым классом.

Лемма 3. *Пусть группа G аппроксимируется корневым классом $\mathscr{K}$ и P – конечная подгруппа группы G. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа N такая, что $N \cap P = 1$ и $G/N \in \mathscr{K}$.*

Доказательство. Для любого неединичного элемента x подгруппы P рассмотрим гомоморфизм φ_x группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что $x\varphi_x \neq 1$. Обозначим через N_x ядро гомоморфизма φ_x. Очевидно, что $x \notin N_x$, и фактор-группы G/N_x принадлежат классу $\mathscr{K}$. Тогда обозначим через N пересечение подгрупп N_x по всем неединичным элементам x подгруппы P. Тогда $N \cap P = 1$, и фактор-группа G/N вкладывается в прямое произведение фактор-групп G/N_x. Отсюда и из замкнутости класса $\mathscr{K}$ относительно подгрупп и прямых произведений следует, что $G/N \in \mathscr{K}$. Поэтому подгруппа N является искомой.

Следующие две леммы относятся к свойствам HNN-расширений. Первая из них была получена Каррасом и Солитером в статье [7].

Лемма 4. *Пусть G^* – HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными изоморфизмом φ. Если L – подгруппа группы G^* такая, что*

$$L \cap x^{-1}Hx = 1, \quad x \in G^*, \qquad L \cap y^{-1}Ky = 1, \quad y \in G^*,$$

то группа L раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и некоторых пересечений $L \cap x^{-1}Gx$, где $x \in G$.

В частности, если L – нормальная подгруппа группы G и $L \cap H = 1 = L \cap K$, то группа L раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и некоторых пересечений $L \cap x^{-1}Gx$, где $x \in G$.

Лемма 5. *Пусть $G^* = \langle G, t;\ t^{-1}Ht = H, \mathrm{id}\rangle$ – HNN-расширение группы G с подгруппами H и H связанными относительно тождественного изоморфизма $\mathrm{id}\colon H \to H$. Тогда существует гомоморфизм группы G^* на группу G, который действует тождественно на группе G и переводит t в 1.*

Доказательство. Так как группа G^* определяется всеми определяющими соотношениями группы G и соотношениями вида $t^{-1}ht = h$, где $h \in H$, все определяющие соотношения группы G^* переходят в верные равенства группы G при отображениях $\mathrm{id}\colon G \to G$ и $t \to 1$. Поэтому данное отображение может быть продолжено до гомоморфизма $G^* \to G$.

3. Доказательство п. 1) теоремы 1. Пусть G^* – HNN-расширение группы G с центральными подгруппами H и K, связанными изоморфизмом φ, причем $H \cap K = 1$. И пусть группа G принадлежит классу $\mathscr{K}$. Докажем, что группа G^* аппроксимируема классом $\mathscr{K}$.

Рассмотрим нормальную подгруппу X группы G такую, что $X \cap H = 1 = X \cap K$. В этом случае отображение $\varphi_X : HX/X \to KX/X$, определенное по правилу $hX\varphi_X = h\varphi X$, $h \in H$, является изоморфизмом подгрупп HX/X и KX/X фактор-группы G/X. Следовательно можно рассмотреть HNN-расширение

$$(G/X)^* = \langle G/X, t;\, t^{-1}HX/Xt = KX/X, \varphi_X\rangle$$

группы G/X с подгруппами HX/X и KX/X, связанными изоморфизмом φ_X. Можно рассматривать также гомоморфизм ρ_X из G^* в $(G/X)^*$, продолжающий естественное отображение группы G на фактор-группу G/X и переводящий элемент t в себя.

Так как подгруппы H и K являются центральными подгруппами, множество $X = \{h^{-1}h\varphi \mid h \in H\}$ является центральной подгруппой группы G, а поскольку $H \cap K = 1$, то $H \cap X = K \cap X = 1$. Поэтому для данного X можно рассматривать введенное выше HNN-расширение $(G/X)^*$ и гомоморфизм ρ_X. Заметим, что гомоморфизм ρ_X инъективен на H и K.

В силу выбора множества X отображение φ_X является тождественным, поэтому к HNN-расширению $(G/X)^*$ можно применить лемму 5, в силу которой существует гомоморфизм ρ группы $(G/X)^*$ на группу G/X, продолжающий тождественное отображение группы G/X и переводящий элемент t в 1.

Теперь обозначим через L ядро композиции $\rho_X\rho\colon G^* \to G/X$. Поскольку ρ_X инъективен на H и K, а гомоморфизм ρ действует инъективно на группе G/X, то группа L имеет тривиальное пересечение со связанными подгруппами H и K. Следовательно, по лемме 4 группа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых пересечений $L \cap x^{-1}Gx$, где $x \in G^*$. Все пересечения $L \cap x^{-1}Gx$ принадлежат классу $\mathscr{K}$, а свободная группа F является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой [6]. Тогда по лемме 1 L является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой.

Значит, группа G^* является расширением $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы L с помощью группы G/X, причем $G/X \in \mathscr{K}$, так как $G \in \mathscr{K}$ и класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно факторизации. Поэтому по лемме 2 группа G^* $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

4. Доказательство п. 2) теоремы 1. Пусть G^* – HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными изоморфизмом φ. И пусть группа G аппроксимируется классом $\mathscr{K}$, подгруппы H и K – конечные центральные подгруппы группы G и $H \cap K = 1$. Докажем, что группа G^* аппроксимируема классом $\mathscr{K}$.

Рассмотрим подгруппу $P = H \cdot K$ группы G. Подгруппа P представляет собой прямое произведение подгрупп H и K и является конечной центральной подгруппой группы G. Поскольку подгруппы H и K конечные, то подгруппа P является конечной подгруппой группы G. Отсюда и из того, что группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема, по лемме 3 следует, что существует нормальная подгруппа N группы G такая, что $P \cap N = 1$ и $G/N \in \mathscr{K}$.

Рассмотрим естественное отображение ε группы G на фактор-группу G/N. Поскольку $P \cap N = 1$, то гомоморфизм ε изоморфно отображает подгруппу P на $P\varepsilon =$

PN/N и, поэтому, подгруппа PN/N группы G/N представляет собой прямое произведение подгрупп HN/N и KN/N. Поэтому $HN/N \cap KN/N = 1$. Подгруппы HN/N и KN/N изоморфны и отображение φ_N, определенное по правилу $hN\varphi_N = h\varphi N$, $h \in H$, является изоморфизмом. Поэтому можно рассмотреть HNN-расширение

$$(G/N)^* = \langle G/N, t;\, t^{-1}HN/Nt = KN/N, \varphi_N \rangle$$

группы G/N с подгруппами HN/N и KN/N, связанными изоморфизмом φ_N. Можно также рассматривать гомоморфизм ρ_N из G^* в $(G/N)^*$, продолжающий естественное отображение ε группы G на фактор-группу G/N и переводящий элемент t в себя. Так как $H \cap N = 1 = K \cap N$, то гомоморфизм ρ_N инъективен на H и K.

Получаем, что группа G/N принадлежит классу $\mathscr{K}$, ее подгруппы HN/N и KN/N являются конечными центральными подгруппами и $HN/N \cap KN/N = 1$. Тогда из уже доказанного п. 1) теоремы 1 следует $\mathscr{K}$-аппроксимируемость группы $(G/N)^*$. Отсюда и из того, что подгруппы HN/N и KN/N конечные, следует, что существует гомоморфизм ρ группы $(G/N)^*$ на некоторую группу T из класса $\mathscr{K}$, инъективный на подгруппах HN/N и KN/N.

Теперь обозначим через L ядро композиции $\rho_N\rho\colon G^* \to T$. Поскольку ρ_N инъективен на H и K, а гомоморфизм ρ действует инъективно на подгруппах HN/N и KN/N, то группа L имеет тривиальное пересечение со связанными подгруппами H и K. Следовательно, по лемме 4 группа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых пересечений $L \cap x^{-1}Gx$, где $x \in G^*$. Все пересечения $L \cap x^{-1}Gx$ и свободная группа F являются $\mathscr{K}$-аппроксимируемыми группами. Тогда по лемме 1 L является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой.

Значит, группа G^* является расширением $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы L с помощью группы $T \in \mathscr{K}$. Поэтому по лемме 2 группа G^* $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д. И. Молдаванский, “Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”*, **3** (2003), 102–116.

[2] Е. А. Туманова, “Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений групп”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”*, **2** (2012), 139–141.

[3] Д. Н. Азаров, Е. А. Туманова, “Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами”, *Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та*, **6** (2008), 29–42.

[4] Д. И. Молдаванский, “Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”*, **3** (2002), 123–133.

[5] K. W. Gruenberg, “Residual properties of infinite soluble groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 29–62.

[6] Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо, “Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп”, *Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та*, **5** (2002), 6–10.

[7] A. Karrass, D. Solitar, “Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation”, *Canad. J. Math*, **23** (1971), 627–643.

Д. В. Гольцов
Ивановский государственный университет
E-mail: goltsov_89@mail.ru

Поступило
28.06.2014