ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 512.543

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО ГРАФА ГРУПП КОРНЕВЫМ КЛАССОМ ГРУПП

Д. В. Гольцов (г. Иваново)

Аннотация

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп, и пусть $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну неединичную группу. Тогда класс $\mathcal{K}$ называется корневым, если выполнены следующие три условия:

1. Если $A \in \mathcal{K}$ и $B \leq A$, то $B \in \mathcal{K}$.
2. Если $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$, то $A \times B \in \mathcal{K}$.
3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ — субнормальный ряд группы A и $A/B, B/C \in \mathcal{K}$, тогда существует нормальная подгруппа D группы A такая, что $D \leq C$ и $A/D \in \mathcal{K}$.

Группа G называется аппроксимируемой корневым классом $\mathcal{K}$ (или $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G, существует гомоморфизм φ группы G на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\varphi \neq 1$. Другими словами, группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента g группы G существует нормальная подгруппа N группы G такая, что $G/N \in \mathcal{K}$ и $g \notin N$. Наиболее интересными аппроксимационными свойствами являются аппроксимируемость классом всех конечных групп (финитная аппроксимируемость), аппроксимируемость классом всех конечных p-групп и аппроксимируемость классом разрешимых групп. Все эти три класса являются корневыми. Поэтому результаты об аппроксимируемости корневым классом групп имеют достаточно общий характер.

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс конечных групп. И пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп с конечными реберными группами. Получено необходимое и достаточное условие почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Ключевые слова: корневой класс групп, фундаментальная группа графа групп, почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемость.

ROOT-CLASS RESIDUALITY OF FUNDAMENTAL GROUP OF A FINITE GRAPH OF GROUP

D. V. Goltsov

Abstract

Let $\mathcal{K}$ be an abstract class of groups. Suppose $\mathcal{K}$ contains at least a non trivial group. Then $\mathcal{K}$ is called a root-class if the following conditions are satisfied:

1. If $A \in \mathcal{K}$ and $B \leq A$, then $B \in \mathcal{K}$.
2. If $A \in \mathcal{K}$ and $B \in \mathcal{K}$, then $A \times B \in \mathcal{K}$.
3. If $1 \leq C \leq B \leq A$ is a subnormal sequence and $A/B, B/C \in \mathcal{K}$, then there exists a normal subgroup D in group A such that $D \leq C$ and $A/D \in \mathcal{K}$.

Group G is root-class residual (or $\mathcal{K}$-residual), for a root-class $\mathcal{K}$ if, for every $1 \neq g \in G$, exists a homomorphism φ of group G onto a group of root-class $\mathcal{K}$ such that $g\varphi \neq 1$. Equivalently, group G is $\mathcal{K}$-residual if, for every $1 \neq g \in G$, there exists a normal subgroup N of G such that $G/N \in \mathcal{K}$ and $g \notin N$. The most investigated residual properties of groups are finite groups residuality (residual finiteness), p-finite groups residuality and soluble groups residuality. All there three classes of groups are root-classes. Therefore results about root-class residuality have safficiently enough general character.

Let $\mathcal{K}$ be a root-class of finite groups. And let G be a fundamental group of a finite graph of groups with finite edges groups. The necessary and sufficient condition of virtual $\mathcal{K}$-residuality for the group G is obtained.

Key words: root-class of finite groups, fundamental group of a finite graph of groups, virtual $\mathcal{K}$-residuality.

1. Введение

Абстрактный класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым,* если выполнены следующие три условия.

1. Если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B — подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ — субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathcal{K}$ (или короче $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий элемент g в элемент отличный от 1. Группа G называется *почти $\mathcal{K}$-аппроксими руемой*, если в ней существует $\mathcal{K}$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса

Если класс $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматривается также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость, где p — простое число, π — множество простых чисел, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Заметим, что все перечисленные классы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_\pi$ являются корневыми классами конечных групп.

Аппроксимируемость различными корневыми классами конечных групп для обобщенных свободных произведений и HNN-расширений подробно изученаа в работах [1]–[7]. Работы [8]–[10] посвящены изучению аналогичных аппроксимационных свойств для групп автоморфизмов, расщепляемых расширений и некоторых классов разрешимых групп.

Грюнберг в [11] доказал, что свободное произведение групп аппроксимируемых корневым классом само аппроксимируемо этим классом при условии, что любая свободная группа аппроксимируема этим классом. В последствии Д. Н. Азаров в [12] установил, что это условие всегда выполняется, т.е. любая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом. Поэтому результат Грюнберга принимает следующий вид: свободное произведение групп аппроксимируемых корневым классом само обладает этим свойством.

Если теперь вместо свободного произведения рассмотреть свободное произведение с объединенными подгруппами, то для него результат, аналогичный теореме Грюнберга, уже не имеет место (даже в случае когда объединенная подгруппа конечная). Однако если вместо аппроксимируемости корневым классом рассмотреть почти аппроксимируемость корневым классом, то удается получить следующий результат.

Теорема 1. *Свободное произведение двух групп с конечными объединенными подгруппами почти аппроксимируемо корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладают свободные множители.*

Аналогичный результат имеет место и для HNN-расширения с конечными связными подгруппами.

Теорема 2. *HNN-расширение группы с конечными связными подгруппами почти аппроксимируемо корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладает база HNN-расширения.*

Теоремы 1 и 2 допускают следующее простое обобщение.

Теорема 3. *Фундаментальная группа конечного графа групп с конечными реберными группами почти аппроксимируема корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все вершинные группы.*

Напомним определение фундаментальной группы графа групп. Это понятие было введено и изучено Бассом и Серром в [13].

Пусть неориентированный связный *граф* Γ состоит из множества вершин X и из множества ребер Y. Для каждого ребра $y \in Y$ зафиксируем начало ребра $\alpha(y) \in X$ и конец ребра $\omega(y) \in X$.

Граф Γ называется *конечным* графом, если в этом графе множества X и Y являются конечными.

Граф групп $\Lambda(\Gamma)$ состоит из графа Γ, множества групп $\{G_x : x \in X\}$ (вершинные группы), множеста групп $\{H_y : y \in Y\}$ (реберные группы) и вложений групп $\alpha_y : H_y \to G_{\alpha(y)}$ и $\omega_y : H_y \to G_{\omega(y)}$ для всех $y \in Y$.

В графе Γ выберим некоторое максимальное поддерево S, т.е. максимальный подграф, являющийся деревом.

Фундаментальная группа графа групп $\Lambda(\Gamma)$ *относительно максимального поддерева* S — это группа, которая порождается всеми вершинными группами $G_x (x \in X)$ и множеством $\{t_y : y \in Y \setminus S\}$ и определяется следующими соотношениями:

$$t_y^{-1}\alpha_y(g)t_y = \omega_y(g) \quad (g \in H_y, y \in Y \setminus S),$$

$$\alpha_y(g) = \omega_y(g) \quad (g \in H_y, y \in S),$$

Если граф Γ представляет собой две вершины, соединенные одним ребром, то фундаментальная группа G этого графа представляет собой свободное произведение двух вершинных групп с объединенными подгруппами.

Если граф Γ представляет собой одну вершину, которая соединена сама с собой ребром в виде петли, то фундаментальная группа G этого графа представляет собой HNN-расширение вершинной группы.

Поэтому теоремы 1 и 2 являются частными случаями теоремы 3.

Необходимость в каждой из теорем 1, 2 и 3 очевидна. Достаточность в каждой из этих теорем доказана ниже.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть группы A и B почти аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$ и подгруппы H и K конечны. Покажем, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Так как группа A почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$, то в ней существует подгруппа U конечного индекса аппроксимируемая классом $\mathcal{K}$. Без потери общности можно считать, что подгруппа U нормальна в A. Очевидно, что группа A финитно аппроксимируема, так как класс $\mathcal{K}$ состоит из конечных групп. Отсюда и из того, что H — конечная подгруппа группы A, следует, что в группе A существует нормальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \cap H = 1$. Пусть $M = U \cap V$. Тогда M — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $M \cap H = 1$ и группа M аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Аналогично проверяется, что в группе B существует нормальная подгруппа N конечного индекса, являющаяся аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ и такая, что $N \cap K = 1$.

Так как $M \cap H = 1$ и $N \cap K = 1$, то отображение φ_{MN} подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы A/M на подгруппу $KN/N = \{kN : k \in K\}$ группы B/N, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi N$ из KN/N, является изоморфизмом. Поэтому можно рассматривать свободное произведение

$$G_{MN} = A/M * B/N(HM/M, KN/N, \varphi_{MN})$$

групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}. Так как группы A/M и B/N конечны, то группа G_{MN} является финитно аппроксимируемой [14].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $\varepsilon_M : A \to A/M$ и $\varepsilon_N : B \to B/N$. Тогда $a\rho_{MN} = a\varepsilon_M = aM$ и $b\rho_{MN} = b\varepsilon_N = bN$ для произвольных элементов a и b из подгрупп A и B соответственно.

Поскольку группа G_{MN} финитно аппроксимируема и подгруппы A/M и B/N конечны, то существует гомоморфизм σ группы G_{MN} на конечную группу $\overline{G}$, инъективный на A/M и B/N. Тогда произведение $\rho_{MN}\sigma$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{MN}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Так как $A \cap \mathrm{Ker}\, \rho_{MN} = M$ и σ инъективен на подгруппе $A\rho_{MN} = A/M$, то $A \cap \mathrm{Ker}\, \rho_{MN}\sigma = M$, т. е. $L \cap A = M$. Аналогично получается, что $L \cap B = N$.

Тогда $L \cap H = L \cap A \cap H = M \cap H = 1$, т. е. $L \cap H = 1$. Отсюда и из того, что L — нормальная подгруппа группы G, следует, что L пересекается по единице со всеми сопряжениями к H в группе G. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман (см., напр., [15, с. 122]) подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Ax = x^{-1}(L \cap A)x = x^{-1}Mx,$$

$$L \cap y^{-1}By = y^{-1}(L \cap B)y = y^{-1}Ny,$$

где $x, y \in G$.

Свободная группа F аппроксимируема корневым классом $\mathcal{K}$ [12], а группы $x^{-1}Mx$ и $y^{-1}Ny$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, т. к. $x^{-1}Mx \cong M$ и $x^{-1}Nx \cong N$ для любых $x, y \in G$. Таким образом, группа L раскладывается в свободное произведение групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$. Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо [12] доказали, что свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Поэтому группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе G, следует, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Пусть

$$G^* = \langle G, t; t^{-1}ht = h\varphi (h \in H)\rangle$$

— HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными изоморфизмом φ. Будем предполагать, что подгруппы H и K конечны. И пусть группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Покажем, что группа G^* почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Как и в доказательстве теоремы 1 легко проверяется, что в группе G существует нормальная подгруппа M конечного индекса, являющаяся $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, и такая, что $M \cap H = 1 = M \cap K$. Так как $H \cap M = 1 = K \cap M$, то отображение φ_M подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы G/M на подгруппу $KM/M = \{kM : k \in K\}$ группы G/M, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi M$ из KM/M, является изоморфизмом.

Поэтому можно рассматривать HNN-расширение

$$G^*_M = \langle G_M,\ t;\ t^{-1}\overline{h}t = \overline{h}\varphi_M\ (\overline{h} \in HM/M)\ \rangle$$

группы $G_M = G/M$ со связанными подгруппами HM/M и KM/M. Так как группа G_M конечная, то группа G^*_M финитно аппроксимируема [16].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_M : G^* \longrightarrow G^*_M$, продолжающий естественный гомоморфизм $\varepsilon_M : G \longrightarrow G_M$ и такой, что $t\rho_M = t$. Тогда для каждого элемента a из G выполняется $a\rho_M = aM$.

Так как группа G^*_M финитно аппроксимируема и ее подгруппа G_M конечна, то существует гомоморфизм σ группа G^*_M на конечную группу $\overline{G}$, иньективный на подгруппе G_M. Тогда произведение $\rho_M\sigma$ является гомоморфизмом группы G^* на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_M\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G^*.

Поскольку $G \cap \mathrm{Ker}\ \rho_M = M$ и σ инъективен на подгруппе $G_M = G\rho_M$, то $G \cap \mathrm{Ker}\ \rho_M\sigma = M$, т. е. $L \cap G = M$. Тогда $L \cap H = L \cap G \cap H = M \cap H = 1$. Таким образом, подгруппа L, а значит и все сопряженные к ней подгруппы группы G^*, тривиально пересекаются со связанной подгруппой H. Поэтому в силу теоремы А. Карраса и Д. Солитера [3, с. 288] подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Gx = x^{-1}(L \cap G)x = x^{-1}Mx,$$

где $x \in G^*$. Поскольку группа F и подгруппы $L \cap x^{-1}Gx$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, то и группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе G^*, следует, что группа G^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим конечный граф групп $\Lambda(\Gamma)$ состоящий из графа Γ, множества групп $\{G_x : x \in X\}$ (вершинные группы), множеста групп $\{H_y : y \in Y\}$ (реберные группы) и вложений групп $\alpha_y : H_y \to G_{\alpha(y)}$ и $\omega_y : H_y \to G_{\omega(y)}$ для всех $y \in Y$. Пусть S — некоторое максимальное поддерево в графе Γ, т.е. максимальный подграф, являющийся деревом. И пусть G — фундаментальная группа графа групп $\Lambda(\Gamma)$ относительно максимального поддерева S. Заметим, что группа G не зависит от выбора дерева S, дерево S необходимо только при описании группы G.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Пусть группы G_x почти аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$ для любого $x \in X$ и группы H_y являются конечными для любого $y \in Y$. Докажем, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$ индукцией по количеству ребер в графе Γ.

Для доказательства базы индукции рассмотрим граф групп с одной реберной группой. Фундаментальная группа такого графа представляет собой либо свободное произведение двух почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечным объединением, либо HNN-расширение почти

$\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы с конечными связными подгруппами. Справедливость теоремы 3 в этих случаях следует из теорем 1 и 2.

Индуктивный шаг также обеспечивается теоремами 1 и 2. В самом деле возможны два случая.

1. Рассмотрим сначала случай, когда S совпадает с Γ. В этом случае группа G является древесным свободным произведение групп G_x. Поэтому группу G легко представить как свободное произведение с конечными объединенными подгруппами двух древесных произведений с меньшим количеством реберных групп.

2. Рассмотрим теперь случай, когда S не совпадает с Γ, то есть существует ребро y из Y, не входящее в S. В этом случае группу G можно представить как HNN-расширение с конечными подгруппами, связанными ребром y, базой которого является фундаментальная группа графа групп с меньшим числом реберных групп.

В первом из рассмотренных случаев индуктивный шаг обеспечивается теоремой 1, во втором — теоремой 2. Теорема 3 доказана.

5. Заключение

Рассмотрен вопрос о почти аппроксимируемости корневым классом обобщенных свободных произведений групп и HNN-расширений. Получены критерии почти аппроксимируемости корневым классом конечных групп свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами и HNN-расширения группы с конечными связными подгруппами. Эти результаты получили обобщения в виде критерия почти аппроксимируемости корневым классом конечных групп фундаментальной группы конечного графа групп.

Остаётся неисследованным вопрос о том, будут ли теоремы 1, 2 и 3 справедливы для произвольного корневого класса, не обязательно состоящего из конечных групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Azarov. Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Commun. in Algebra. 2015. Vol. 43:4. P. 1464 – 1471.

2. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56. № 2. С. 249 – 264.

3. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 6. С. 1203 – 1215.

4. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. В. 1. С. 9 – 19.

5. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 3. С. 485 – 497.

6. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага – Солитэра // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20. № 1. С. 116 – 123.

7. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. В. 3(35). С. 11 – 20.

8. Азаров Д. Н. Аппроксимационные свойства групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Известия ВУЗов. Математика. 2015. № 8. С. 3 – 13.

9. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Известия ВУЗов. Математика. 2014. № 8. С. 18 – 29.

10. Азаров Д. Н. Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. Вып. 1(49). С. 7 – 18.

11. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite solublegroups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, P. 29-62.

12. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. 2002. Т. 5, С. 6-10.

13. Serre J.-P. Trees. Springer-Verlag 1980.

14. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, №2. P. 193-209.

15. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

16. Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. V. 28, P. 627–643.

REFERENCES

1. Azarov, D. N. 2015, "Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation", Commun. in Algebra. Vol. 43:4. P. 1464–1471.

2. Azarov, D. N. 2015, "Residuallity by same classes of finite groups of generalized free products of groups with normal amalgamation", Sibirskii Math. J., vol. 56, issue 2, pp. 249—264. (Russian)

3. Azarov, D. N. 2015, "On residual finiteness of HNN-extension and of generalized free products of finite rank groups", Sibirskii Math. J., vol. 54, issue 6, pp. 1203—1215. (Russian)

4. Azarov, D. N. 2012, "On the virtually residuallity by finite p-groups of descending HNN-extensions", Chebyshevskii Sb., vol. 13, issue 1, pp. 9—19. (Russian)

5. Azarov, D. N. 2013, "On residual finiteness of generalized free products of groups of finite rank", Sibirskii Math. J., vol. 54, issue 3, pp. 485—497. (Russian)

6. Azarov, D. N. 2013, "On the virtually residuallity by finite p-groups of Baumslag–Solitar groups", Modeling and Analysis of Information Systems., vol. 20, issue 1, pp. 116—123. (Russian)

7. Azarov, D. N. 2010, "On the virtually residuallity by finite p-groups", Chebyshevskii Sb., vol. 11, issue 3, pp. 11—21. (Russian)

8. Azarov, D. N. 2015, "Residual properties of automorphism groups and split extension" Izvestiya VUZov. Mathematics, issue 8, pp. 3—13. (Russian)

9. Azarov, D. N. 2014, "The residuallity of solvable groups of finite rank by some classes of finite groups", Izvestiya VUZov. Mathematics, issue 8, pp. 18—29. (Russian)

10. Azarov, D. N. 2014, "The residuallity of solvable groups of finite rank by some classes of finite groups" , Izvestiya VUZov. Mathematics, issue 8, pp. 18—29. (Russian)

11. Gruenberg, K. W. 1957, "Residual properties of infinite solublegroups" , Proc. London Math. Soc. V. 7, P. 29-62.

12. Azarov, D. N., Tieudjo, D. 2002, "On the residuallity of a free product with amalgamation by a root class of groups" , Nauch. trudy of Ivanovo State University. Mathematics., issue 5, pp. 6—10. (Russian)

13. Serre J.-P. Trees. Springer-Verlag 1980.

14. Baumslag G. 1963, "On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups" Trans. Amer. Math. Soc. V. 106, №2. P. 193-209.

15. Lyndon R. C., Schupp P. E., Combinatorial group theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1977

16. Karrass A., Solitar D. 1971, "Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation" Can. J. Math. V. 28, P. 627–643.

Ивановский государственный университет.
Получено 3.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.