Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2004 С. 125 – 130

Е. А. Иванова, Д. И. Молдаванский

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Доказано, что для любого непустого собственного подмножества π множества всех простых чисел конечно порожденная нильпотентная группа аппроксимируема относительно сопряженности конечными π-группами тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является π-группой, а фактор-группа по периодической части абелева.

It is proved that for any non-empty proper subset π of the set of all primes a finitely generated nilpotent group is conjugacy separable in the class of finite π-groups if and only if the torsion subgroup of it is a finite π-group and the quotient group by the torsion subgroup is abelian.

УДК 512.543.

1. Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a этой группы найдется гомоморфизм группы G на некоторую группу X, принадлежащую классу $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-группу), при котором образ элемента a отличен от единицы. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу X, образы элементов a и b относительно которого не сопряжены в X.

Очевидно, что произвольная группа, $\mathcal{K}$-аппроксимируемая относительно сопряженности, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой. Поскольку обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, представляет интерес нахождение классов групп, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость которых влечет их $\mathcal{K}$-аппроксимируемость относительно сопряженности. Наиболее изученным (и хронологически первым) здесь является случай, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп; в этом случае говорят о финитной аппроксимируемости и о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Так, К. Грюнберг [5] показал, что конечно порожденные нильпотентные группы финитно аппроксимируемы, а затем Н. Блэкберн [4] установил их финитную аппроксимируемость относительно сопряженности. С другой стороны, известная теорема Ф. Холла утверждает финитную аппроксимируемость любой конечно порожденной метабелевой группы, но существует построенный М. И. Каргаполовым и Е. И. Тимошенко [1] пример конечно порожденной метабелевой группы, не являющейся финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

В тех случаях, когда для некоторого класса групп доказана $\mathcal{F}$-аппроксимируемость или $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности, естественно возникает вопрос, будут ли эти группы $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми или $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми относительно сопряженности для некоторого подкласса $\mathcal{K}$ класса $\mathcal{F}$. Наиболее часто с этой точки зрения рассматривается класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп. Например, финитная аппроксимируемость произвольных свободных групп установлена в работе А. И. Мальцева [2]. К. Грюнберг [5] доказал, что для любого простого числа p каждая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Отсюда и из известной теоремы В. Магнуса об $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободных групп, где $\mathcal{N}$ — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, следует, что для любого простого числа p произвольная свободная группа является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, а $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности всех свободных групп доказана в статье [3].

Как только что отмечалось, произвольная конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для любого простого числа p. Оказывается тем не менее, что для произвольного простого числа p конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда она абелева. В действительности имеет место следующее более общее утверждение.

Теорема. *Пусть π — собственное (непустое) подмножество множества всех простых чисел. Конечно порожденная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является $\mathcal{F}_\pi$-группой, а фактор-группа $G/\tau(G)$ абелева.*

(Через $\mathcal{F}_\pi$ здесь обозначается класс всех конечных π-групп, т. е. всех конечных групп, порядки которых делятся лишь на простые числа, принадлежащие множеству π.)

2. Доказательство теоремы начнем с одного замечания общего характера.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathcal{K}$-отделимой, если для любого элемента a этой группы, не принадлежащего подгруппе H, найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $a\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно, что если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, то для любой нормальной подгруппы N группы G $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы G/N равносильна $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы N. Отсюда следует, что если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, наследственен и замкнут относительно прямых произведений конечного числа сомножителей, то фактор-группа $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы по любой ее конечной нормальной подгруппе $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Для формулировки аналогичных утверждений для свойства $\mathcal{K}$-аппроксимируемости относительно сопряженности будет служить следующее понятие.

Подмножество M группы G назовем сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым, если для любого элемента a этой группы, не сопряженного ни с одним элементом из M, найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу X такой, что в группе X элемент $a\varphi$ не сопряжен ни с одним элементом из $M\varphi$. Иначе говоря, подмножество M группы G является сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым, если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из M, найдется нормальная подгруппа H группы G такая, что фактор-группа G/H входит в $\mathcal{K}$ и в группе G элемент a не сопряжен ни с одним элементом из множества MH.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — гомоморфно замкнутый класс групп. Для любой группы G и произвольной ее нормальной подгруппы N фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы G по подгруппе N сопряженно $\mathcal{K}$-отделим.*

Доказательство. Покажем сначала, что если некоторый смежный класс группы G по подгруппе N не является сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым, то фактор-группа G/N не является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Действительно, если элемент a группы G не сопряжен ни с одним элементом из смежного класса bN, то элементы aN и bN фактор-группы G/N не сопряжены в этой группе. С другой стороны, если в каждом гомоморфном образе группы G, являющемся $\mathcal{K}$-группой, образ элемента a сопряжен с образом некоторого элемента из класса bN и если φ — гомоморфизм группы G/N на некоторую $\mathcal{K}$-группу X, то произведение естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \to G/N$ и гомоморфизма φ отображает группу G на группу X, и потому для некоторых элементов $g \in G$ и $c \in N$ имеет место равенство

$$(g(\varepsilon\varphi))^{-1}a(\varepsilon\varphi)g(\varepsilon\varphi) = (bc)(\varepsilon\varphi),$$

т. е. $((gN)\varphi)^{-1}(aN)\varphi(gN)\varphi = (bN)\varphi$. Следовательно, образы элементов aN и bN при любом гомоморфизме группы G/N на произвольную $\mathcal{K}$-группу оказываются сопряженными.

Обратно, пусть каждый смежный класс группы G по подгруппе N является сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым. Если элементы aN и bN фактор-группы G/N не сопряжены в этой группе, то в группе G элемент a не сопряжен ни с одним элементом из смежного класса bN, и потому элемент a не сопряжен в группе G ни с одним элементом из смежного класса bNH для некоторой нормальной подгруппы H группы G, фактор-группа G/H по которой принадлежит классу $\mathcal{K}$. Это означает, что элементы aNH и bNH гомоморфного образа G/NH группы G/N не являются сопряженными. Остается заметить, что ввиду гомоморфной замкнутости класса $\mathcal{K}$ фактор-группа $G/NH \simeq (G/H)/(NH/H)$ является $\mathcal{K}$-группой.

Непосредственно из предложения 1 следует

Предложение 2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, наследственен и замкнут относительно прямых произведений конечного числа сомножителей. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема относительно сопряженности, то и фактор-группа G/N группы G по любой ее конечной* *нормальной подгруппе N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Действительно, из наследственности класса $\mathcal{K}$ и его замкнутости относительно прямых произведений конечного числа сомножителей следует, что в произвольной группе G семейство всех ее нормальных подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$, замкнуто относительно конечных пересечений. Отсюда, в свою очередь, следует, что если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема относительно сопряженности, то каждое ее конечное подмножество является сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым.

Пусть теперь π — произвольное множество простых чисел и пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая относительно сопряженности. Так как тогда группа G является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, то ее периодическая часть $\tau(G)$ должна быть $\mathcal{F}_\pi$-группой. Поскольку фактор-группа $G/\tau(G)$ не содержит элементов конечного порядка и ввиду предложения 2 является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности, для доказательства необходимости условий теоремы остается доказать

Предложение 3. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения и π — собственное подмножество множества всех простых чисел. Если группа G является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности, то она абелева.*

Доказательство. Пусть $1 = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \cdots \leqslant Z_n = G$ — верхний центральный ряд группы G. Если предположить, рассуждая от противного, что группа G не является абелевой, то $n \geqslant 2$. Выберем в подгруппе Z_2 элемент a, не принадлежащий подгруппе Z_1. Поскольку для любого элемента $g \in G$ коммутатор $[a, g]$ входит в Z_1, имеем $g^{-1}ag = az$ для некоторого $z \in Z_1$. Так как элемент a не принадлежит центру Z_1 группы G, найдется элемент $b \in G$, неперестановочный с элементом a, так что $b^{-1}ab = ac$ для некоторого неединичного элемента $c \in Z_1$.

Фиксируем теперь некоторое простое число q, не принадлежащее множеству π. Так как Z_1 является свободной абелевой группой и ее элемент c отличен от 1, то для некоторого целого числа $n \geqslant 1$ уравнение $x^{q^n} = c$ не имеет решений в группе Z_1. Утверждается, что тогда элементы a^{q^n} и $a^{q^n}c$ не сопряжены в группе G.

В самом деле, пусть для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $g^{-1}a^{q^n}g = a^{q^n}c$. Так как $g^{-1}ag = az$ для некоторого $z \in Z_1$, получаем тогда
$$a^{q^n}c = (g^{-1}ag)^{q^n} = a^{q^n}z^{q^n},$$
откуда $c = z^{q^n}$, что невозможно.

Покажем, с другой стороны, что образы элементов a^{q^n} и $a^{q^n}c$ при любом гомоморфизме группы G на произвольную $\mathcal{F}_\pi$-группу являются сопряженными.

Действительно, пусть N — такая нормальная подгруппа группы G, что $c^m \equiv 1 \pmod N$ для некоторого π-числа $m > 0$. Так как числа q^n и m взаимно просты, существует целое число k такое, что $q^nk \equiv 1 \pmod m$. Поскольку элемент c является центральным, то из равенства $b^{-1}ab = ac$ следует равенство $b^{-k}ab^k = ac^k$ и
$$a^{q^n}c \equiv a^{q^n}c^{q^nk} = (ac^k)^{q^n} = b^{-k}a^{q^n}b^k \pmod N.$$

Таким образом, группа G оказалась не $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности, и предложение 3 доказано.

Переходя к доказательству достаточности, заметим, что если периодическая часть $\tau(G)$ конечно порожденной нильпотентной группы G является $\mathcal{F}_\pi$-группой, то ввиду [5] группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, и требующееся нам утверждение содержится в следующем несколько более общем результате:

Предложение 4. *Пусть π — произвольное множество простых чисел и пусть группа G является расширением конечной группы при помощи конечно порожденной абелевой группы. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она является и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Доказательство. Пусть F — конечная нормальная подгруппа группы G, фактор-группа G/F по которой является конечно порожденной абелевой группой. Ввиду замечания, сделанного в начале этого пункта, из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость фактор-группы G/F. Поэтому если для не сопряженных в группе G элементов a и b смежные классы aF и bF различны, то различными (и, следовательно, несопряженными) будут и их образы при подходящем гомоморфизме группы G/F на некоторую $\mathcal{F}_\pi$-группу.

Предположим, что $aF = bF$, т. е. $b = af$ для некоторого элемента $f \in F$. Из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует существование в ней такой нормальной подгруппы N конечного π-индекса, что $N \cap F = 1$. Утверждается, что в фактор-группе G/N элементы aN и bN не являются сопряженными.

Действительно, в противном случае для некоторого элемента $g \in G$ должно выполняться сравнение $g^{-1}ag \equiv b \pmod N$. Поскольку фактор-группа G/F абелева, $g^{-1}ag = ax$ для некоторого $x \in F$. Таким образом, мы получаем сравнение $x \equiv f \pmod N$, из которого ввиду того, что $N \cap F = 1$, следует равенство $x = f$. Но это равенство означает сопряженность в группе G элементов a и b, что невозможно. Предложение 4 доказано.

Библиографический список

1. *Каргаполов М. И., Тимошенко Е. И.* К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп // IV Всесоюзный симпозиум по теории групп, Новосибирск, 5—9 февраля 1973 г.: Тез. докл. Новосибирск, 1973. С. 86—88.
2. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами //Мат. сб. 1940. Т. 8. С. 405—422.
3. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. С. 1085—1099.
4. *Blackburn N.* Conjugacy in nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, № 1. P. 143—148.
5. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.