Вестник молодых ученых ИвГУ

Вып. 2 / 2002. С. 3–7

Иванова Е. А.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Установлен критерий аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения двух конечных групп с объединенной подгруппой. Указаны некоторые применения этого результата.

УДК 512.543

Введение. Формулировка результатов

Напомним (см. [3]), что если $\mathcal{K}$ – некоторый класс групп, то группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента g относительно которого отличен от единицы.

В данной работе рассматривается аппроксимируемость в классе нильпотентных групп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

Пусть H и K – некоторые группы, A и B – изоморфные подгруппы групп H и K соответственно и φ – некоторый изоморфизм подгруппы A на подгруппу B. Пусть $G=(H*K; A=B, \varphi)$ – свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B.

В работе [4] Г. Баумслагом доказано, что если группы H и K являются конечными, то группа $G=(H*K; A=B, \varphi)$ финитно аппроксимируема. Там же указана некоторая методика сведения к этой теореме вопросов о финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенной подгруппой других групп.

Аналогичная ситуация имеет место для свойства аппроксимируемости конечными p-группами. Г. Хигмен [5] указал критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных p-групп, и соответствующая модификация (см. [2]) идей работы [4] позволяет с помощью этого критерия изучать аппроксимируемость конечными p-группами свободного произведения с объединенной подгруппой произвольных групп.

В данной работе реализуется аналогичная схема для свойства аппроксимируемости нильпотентными группами. В первом из результатов работы дается критерий аппроксимируемости нильпотентными группами свободных произведений с объединенной подгруппой двух конечных групп:

Теорема 1. *Пусть H и K – конечные нильпотентные группы, $A \leq H$ и $B \leq K$ – их собственные изоморфные подгруппы и φ – некоторый изоморфизм группы A на группу B. Группа $G = (H * K; A = B, \varphi)$ аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p выполнены следующие условия:*

1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*
2) *подгруппа группы G, порожденная силовскими p-подгруппами групп H и K, аппроксимируется конечными p-группами.*

Отметим, что соответствующий критерий для HNN-расширения конечной базовой группы был указан в работе [6].

В более общем случае, когда группы H и K – конечно порожденные нильпотентные группы, столь исчерпывающего ответа получить не удалось. Здесь доказана

Теорема 2. *Пусть H и K – конечно порожденные нильпотентные группы, $A \leq H$ и $B \leq K$ – их собственные изоморфные подгруппы и φ – некоторый изоморфизм группы A на группу B. Предположим еще, что выполнено одно из следующих условий:*

а) A и B – центральные подгруппы групп H и K соответственно;

б) A и B – бесконечные циклические группы.

Если группа $G = (H * K; A = B, \varphi)$ аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что подгруппы A и B являются p'-изолированными в группах H и K соответственно.

Обратно, если для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы и в случае а) группы H и K не имеют p'-кручения, то группа G аппроксимируется конечными p-группами, а значит – и нильпотентными группами.

Из этой теоремы следует, в частности, что

если подгруппы A и B являются бесконечными циклическими, или группы H и K без кручения, а A и B – их центральные подгруппы, или H и K – абелевы группы, то следующие утверждения равносильны:

1. *Группа G аппроксимируется нильпотентными группами.*
2. *Существует такое простое число p, что подгруппы A и B являются*

p'-изолироваными в группах H и K соответственно.

3. *Существует такое простое число p, что группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

В связи с этим заметим, что существует группа, аппроксимируемая нильпотентными группами и не аппроксимируемая конечными p-группами ни для какого простого числа p (см. [2]).

1. Предварительные замечания

Пусть p – простое число. Подгруппа A некоторой группы H называется p-изолированной в группе H, если для любого элемента $h \in H$ из того, что $h^p \in A$ следует, что $h \in A$. Подгруппа A называется p'-изолированной в H, если она q-изолирована для всех простых чисел $q \neq p$. Следующее утверждение доказано в [2].

Предложение 1.1. *Подгруппа H конечного индекса нильпотентной группы G p'-изолирована тогда и только тогда, когда ее индекс в группе G является p-числом.*

Единственную силовскую p-подгруппу конечной нильпотентной группы G будем обозначать символом $S_p(G)$; если число p не является делителем порядка группы G, то $S_p(G)$ совпадает, разумеется, с единичной подгруппой.

Легко проверить справедливость следующего утверждения:

Предложение 1.2. *Пусть G – конечная нильпотентная группа. Подгруппа $H \leq G$ p'-изолирована тогда и только тогда, когда для любого простого числа $q \neq p$ подгруппа $S_q(G)$ содержится в H.*

Пусть теперь H и K – некоторые группы, $A \leq H$, $B \leq K$ и $\varphi : A \to B$ – изоморфизм. Подгруппы $R \leq H$ и $S \leq K$ называются (A, B, φ)-совме-стимыми, если они удовлетворяют требованию $(A \cap R)\varphi = B \cap S$.

Если нормальные подгруппы R и S групп H и K соответственно (A, B, φ)-совместимы, то отображение $\varphi_{R,S} : AR / R \to BS / S$, (корректно) определяемое по правилу $(aR)\varphi_{R,S} = (a\varphi)S$ $(a \in A)$, является изоморфизмом подгруппы AR / R фактор-группы H / R на подгруппу BS / S фактор-группы K / S. Поэтому можно построить свободное произведение $G_{R,S} = (H / R * K / S; AR / R = BS / S, \varphi_{R,S})$ групп H / R и K / S с подгруппами AR / R и BS / S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы H на фактор-группу H / R и группы K на фактор-группу K / S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы $G = (H * K; A = B, \varphi)$ на группу $G_{R,S}$.

Говорят, что семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп конечного индекса некоторой группы X является фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$. Если Y –

некоторая подгруппа группы X, то фильтрация $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется Y-фильтрацией при условии, что $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} YN_\lambda = Y$.

Предложение 2 из работы [4] утверждает, что если $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – максимальное семейство пар (A, B, φ)-совместимых подгрупп групп H и K, то группа $G=(H*K; A=B, \varphi)$ будет финитно аппроксимируемой при условии, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является A-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является B-фильтрацией. Для формулировки аналогичного утверждения о свойстве аппроксимируемости конечными p-группами, в [2] предложено следующее понятие.

Пусть p – простое число. Подгруппы $R\le H$ и $S\le K$ называются (A, B, φ, p)-совместимыми, если существуют последовательности нормальных подгрупп $R=R_0\le R_1\le\ldots\le R_m=H$ и $S=S_0\le S_1\le\ldots\le S_n=K$ с факторами порядка p такие, что изоморфизм φ отображает множество пересечений $R_i\cap A$ на множество пересечений $S_j\cap B$.

Имеет место следующее утверждение (см. [4], предложение 5):

Предложение 1.3. *Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – максимальное семейство пар (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп групп H и K. Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является A-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является B-фильтрацией, то группа $G=(H*K; A=B, \varphi)$ аппроксимируема конечными p-группами.*

2. Доказательство теоремы 1

Всюду в этом параграфе будем предполагать фиксированными обозначения из формулировки этой теоремы. Договоримся также через $G(p)$ обозначать подгруппу группы $G=(H*K; A=B, \varphi)$, порожденную подгруппами $S_p(H)$ и $S_p(K)$. Так как подгруппы $S_p(H)$ и $S_p(K)$ являются (A, B, φ)-совместимыми, то группа $G(p)$ является свободным произведением групп $S_p(H)$ и $S_p(K)$ с подгруппами $S_p(A)$ и $S_p(B)$, объединенными относительно изоморфизма φ.

Как показано в [1], из аппроксимируемости группы G нильпотентными группами следует существование такого простого числа p, что подгруппы A и B являются p'-изолированными в группах H и K соответственно. Кроме того, как отмечено в [5], группа, являющаяся свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных p-групп, аппроксимируема нильпотентными группами в точности тогда, когда она аппроксимируема конечными p-группами.

Перейдем к доказательству достаточности условий теоремы. Из предложения 1.2 следует, что для любого простого числа $q\ne p$ выполнены включения $S_q(H)\subseteq A$ и $S_q(K)\subseteq B$, и потому в группе G имеет место равенство $S_q(H)=S_q(K)$. Поэтому произведение N всех силовских q-подгрупп (где $q\ne p$) группы H является нормальной подгруппой группы G. Легко видеть, что фактор-группа G/N изоморфна группе $G(p)$ и потому аппроксимируема конечными p-группами.

Если теперь g – произвольный неединичный элемент группы G и $g \notin N$, то существование гомоморфизма группы G, отделяющего его от 1, очевидно. Подгруппы $R = S_p(H)$ и $S = S_p(K)$ являются (A, B, φ)-совместимыми, и если элемент $g \in N$, то его образ относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$ отличен от единицы. Остается заметить, что группа $G_{R,S}$ изоморфна группе N и потому нильпотентна. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Формулировка теоремы 1 подсказывает введение следующей модификации понятия (A, B, φ)-совместимости.

Пусть p – простое число. Нормальные подгруппы $R \le H$ и $S \le K$ называются (A, B, φ, p, N)-совместимыми, если они (A, B, φ)-совместимы, фактор-группы H/R и K/S являются конечными нильпотентными группами, подгруппы AR и BS p'-изолированы в H и K и подгруппа $G_{R,S}(p)$ группы $G_{R,S}$ аппроксимируема конечными p-группами.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 1.

Предложение 3.1. *Если подгруппы R и S групп H и K являются (A, B, φ, p, N)-совместимыми, то группа $G_{R,S}$ аппроксимируема нильпотентными группами.*

Теперь мы можем сформулировать достаточное условие аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Его доказательство проводится стандартными рассуждениями, использующими несократимую запись элементов свободного произведения с объединенной подгруппой.

Предложение 3.2. *Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – максимальное семейство пар (A, B, φ, p, N)-совместимых подгрупп групп H и K. Предположим, что каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и для любых элементов $h_1, h_2, ..., h_m$ группы H, не принадлежащих подгруппе A и для любых элементов $k_1, k_2, ..., k_n$ группы K, не принадлежащих подгруппе B, найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что элементы $h_1, h_2, ..., h_m$ не входят в подгруппу AR_λ и элементы $k_1, k_2, ..., k_n$ не входят в подгруппу BS_λ. Тогда группа $G = (H * K; A = B, \varphi)$ аппроксимируема нильпотентными группами.*

Доказательство второго утверждения теоремы 2 сводится теперь к проверке того, что семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ всех пар (A, B, φ, p, N)-совместимых подгрупп групп H и K удовлетворяет условиям предложения 3.2. Первое ее утверждение следует из [1].

Список использованной литературы

1. *Азаров Д.Н.*, *Иванова Е.А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды ИвГУ. Математика. Вып.2. Иваново, 1999. С. 5–7.

2. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, № 2. P. 193–209.

5. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.

6. *Raptis E. and Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group. // J. Pure Applied Algebra. 1991. V. 76. P. 167–178.